МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha$ - ? (не меньше 3 решений)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac15} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad 1+\sin 2\alpha = \mp 2\cos 2\alpha$

$1+\sin 2\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \mp 2(\cancel{\sin^2}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \mp 2(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$

1) $\sin\alpha = -\cos\alpha$ – одно из решений

$tg\alpha = -1$

сократим на $(\sin\alpha+\cos\alpha)$:

$\sin\alpha+\cos\alpha = \mp 2(\cos\alpha-\sin\alpha)$

2) $\sin\alpha+\cos\alpha = 2\cos\alpha - 2\sin\alpha$

$3\sin\alpha = \cos\alpha$

$tg\alpha = \frac13$

3) $\sin\alpha+\cos\alpha = -2\cos\alpha + 2\sin\alpha$

$3\cos\alpha = \sin\alpha$

$tg\alpha = 3$

Ответ: $tg\alpha \in \{-1; 1/3; 3\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

② $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$2xy-12y-x+6=2y(x-6)-(x-6)=(2y-1)(x-6)$

$x-12y=x-6-12y+6=(x-6)-6(2y-1)$

$x^2-12x+36y^2-36y=x^2-12x+36+9(4y^2-4y+1)-45=(x-6)^2+9(2y-1)^2-45$

$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$, тогда: $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \ (\wedge 2) \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ ограничения: $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a>6b \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90+27b^2=13ab \\ a^2=90-9b^2 \end{cases} \begin{cases} a=\frac{27b^2+90}{13b} \\ a^2=90-9b^2 \end{cases}$

$(27b^2+90)^2=(13b)^2\cdot 9\cdot(10-b^2) \ |9$

$(9b^2+30)^2=(13b)^2\cdot(10-b^2)$

$81b^4+540b^2+900=169b^2(10-b^2)=1690b^2-169b^4$

$250b^4-1150b^2+900=0 \ |50$

$5b^4-23b^2+18=0$

$5b^4-5b^2-18b^2+18=(5b^2-18)(b^2-1)=0$ 1) $b^2=\frac{18}{5}$, $b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

2) $b^2=1$, $b=\pm 1$

~~1) $a^2=90-9\cdot\frac{18}{5}=\frac{450-162}{5}=\frac{288}{5}$ $a=\frac{14}{\sqrt5}$ при $b=\sqrt{\frac{18}{5}}$ (т.к. $ab\geq 0$)~~

~~$a=-\frac{14}{\sqrt5}$ при $b=-\sqrt{\frac{18}{5}}$~~

~~$2y-1=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$ $y=\frac{1\pm\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}}{2}$~~

~~$x-6=\pm\frac{14}{\sqrt5}$ $x=6\pm\frac{14}{\sqrt5}$ $\left(\frac{1+\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}}{2}; 6+\frac{14}{\sqrt5}\right), \left(6-\frac{14}{\sqrt5}; \frac{1-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}}{2}\right)$~~

~~2) $a^2=90-9=81$ $a=9$ при $b=1$, $a=-9$ при $b=-1$ (т.к. $ab\geq 0$)~~

~~$x-6=\pm 9$ $x_1=15$, $x_2=-3$; $2y-1=\pm 1$ $y_1=1$ $y_2=0$.~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $a^2 = 90 - 9 \cdot \frac{18}{5} = \frac{450-162}{5} = \frac{288}{5}$ $a = \pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$a = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ при $b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (т.к. $ab \geq 0$), но $a > 6b$ (по ограничению)

$\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ - противоречие => ~~корень~~ решение не подходит

$a = -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ при $b = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > -\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ - соответствует ограничению => решение подходит.

$\begin{cases} x - 6 = -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 2y - 1 = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{6\sqrt{5}-12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$ $\left(\frac{6\sqrt{5}-12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)$

2) $a^2 = 90 - 9 \cdot 1 = 81$ $a = \pm 9$

$a = 9$ при $b = 1$ (т.к. $ab \geq 0$), $9 > 6 \cdot 1$ - соответствует ограничению => решение подходит. $\begin{cases} x - 6 = 9 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$ $(15; 1)$

$a = -9$ при $b = -1$ (т.к. $ab \geq 0$), но $-9 < -1 \cdot 6$ (не соответствует ограничению) => решение не подходит.

Ответ: $(15; 1)$ $\left(\frac{6\sqrt{5}-12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)$

(3) $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ Ограничение: $10x-x^2>0$

$x\in(0;10)$

$(10x-x^2)+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$|x^2-10x| = |-(\underbrace{-x^2+10x}_{>0})| = 10x-x^2$

Пусть $10x-x^2=t$, $t>0$, тогда:

$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$ $t=t^{\log_3 3}=3^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$

Пусть $\log_3 t=a$, тогда: $3^a \geq 5^a-4^a$ ($3^a=5^a-4^a$ при $a=2$)

~~Возьмём производную, чтобы понять поведение функции~~ ~~$5^a-4^a-3^a$: Пусть $f(a)=5^a-4^a-3^a$ $f'(a)=a5^{a-1}-a4^{a-1}-a3^{a-1}=$~~
~~$=a(5^{a-1}-4^{a-1}-3^{a-1})$~~

при $a>2$, $3^a+4^a<5^a$ (т.к. $(k-1)^a+k^a=2k^a-\dots+(-1)^a>k^a+\dots+1$ при больших a, при этом функция монотонно возрастает т.к. $f'(a)>0$, при $a>2$)

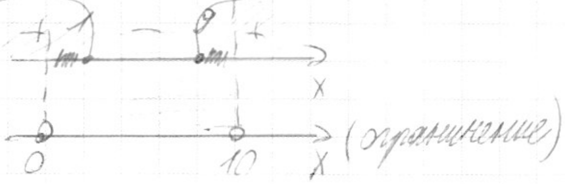
Пусть $f(a)=5^a-4^a-3^a$,
тогда $f'(a)=a(5^{a-1}-4^{a-1}-3^{a-1})$

Значит $a\leq 2$, $\log_3 t\leq 2$, $t\leq 9$

$10x-x^2\leq 9$

$x^2-10x+9\geq 0$

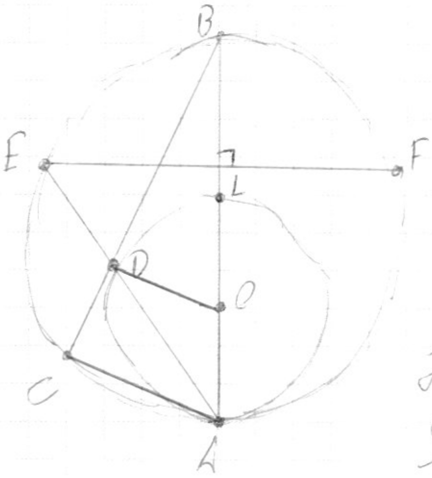
$(x-9)(x-1)\geq 0$



Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



Дано: $O(\Omega) \cap O(\omega) = A$; AB-диам. $O(\Omega)$; BC-хорда, BD-касат. $O(\omega)$, $D \in BC$; $AD \cap O(\Omega) = E$; $(\cdot)F$ такая, что: $EF \perp AB$, $F \in O(\Omega)$; $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

Найти: $R(\Omega)$-?, $R(\omega)$-?, $\angle AFE$-?, $S_{\triangle AFE}$-?

Решение:

Пусть O - центр $O(\omega)$, тогда $OD \perp BD$
$\angle ACB = 90$ (т.к. AB-диам.) $\Big\} \Rightarrow OD \parallel CA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle ACB$ (т.к. $\angle BCBA$-общий) $\Rightarrow \frac{BD}{DO} = \frac{BC}{CA}$

Пусть AL - диаметр $O(\omega)$, тогда $\angle ADL = 90°$.

$\angle DAL = \angle LDB$ (т.к. BD-касат.) $= 180° - 90° - \angle CDA = 90° - \angle CDA = \angle CAD$
$\Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle CAB \Rightarrow \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$, пусть $AC = 15x$, $AB = 17x$

$(15x)^2 + \left(\frac{17+15}{2}\right)^2 = (17x)^2$ (по т. Пифагора для $\triangle ACB$)

$(16)^2 = 64x^2$

$4 = x^2$ $x = 2$, $AB = 2 \cdot 17 = 34 = 2 \cdot R(\Omega) \Rightarrow R(\Omega) = 17$

$CA = 2 \cdot 15 = 30$

$\frac{BD}{DO} = \frac{BC}{CA} \Leftrightarrow \frac{\frac{17}{2}}{DO} = \frac{16}{30}$ $DO = R(\omega) = \frac{17}{2} : \frac{16}{30} = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

$\angle AFE = 2\overset{\frown}{AE} = 2\overset{\frown}{AC} + 2\overset{\frown}{CE}$

$\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{EB}$ т.к. AE - бис-са $\angle CAB$ $\Rightarrow \angle AFE = 2\overset{\frown}{AC} + 2\overset{\frown}{EB} = \angle CDA$

$tg\angle CDA = \frac{AC}{CD} = 30 : \frac{15}{2} = 4$

$\angle CDA = arctg\, 4 = \angle AFE$

$R(\Omega) = \frac{AE}{2 \cdot \sin\angle AFE} = 17$ $\quad AE = 34 \sin\angle AFE$

$\angle EAF = 2\angle EAB$ (т.к. $\triangle AFE$ - р/б $\triangle$ (из симметрии относительно AB), значит AB - высота, бис-са)

~~$tg\angle EAB = \frac{1}{tg\angle CDA} = \frac{1}{4}$ $\quad \angle EAB = arctg\frac{1}{4}$~~

~~$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin\angle EAF = \frac{1}{2} \cdot (34^2 \cdot \sin^2\angle AFE) \cdot \sin\angle EAF$~~

$AD = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 30^2} = \sqrt{\frac{225+3600}{4}} = \sqrt{\frac{3825}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{153}$

~~$\sin\angle CDA = \frac{5}{2}\sqrt{153} : 30 = \frac{1}{12}\sqrt{153} = \sin\angle AFE$~~

~~$\sin\angle CAD =$~~ $\sin\angle CDA = 30 : \frac{5}{2}\sqrt{153} = \frac{12}{\sqrt{153}} = \sin\angle AFE$

$\sin\angle CAD = \frac{15}{2} : \frac{5}{2}\sqrt{153} = \frac{3}{\sqrt{153}}$

$\cos\angle CAD = \sin\angle CDA = \frac{12}{\sqrt{153}}$ $\quad 2 \cdot \sin\angle CAD \cdot \cos\angle CAD = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{153}} \cdot \frac{12}{\sqrt{153}} = \frac{72}{153} \cdot 2 = \frac{144}{153} = \sin 2\angle CAD = \sin\angle EAF$

$AE = 34 \cdot \frac{12}{\sqrt{153}}$ $\quad S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} \cdot AE^2 \cdot \sin\angle EAF = \frac{1}{2} \cdot \frac{34^2 \cdot 12^2}{153} \cdot \frac{144}{153} =$

$= \frac{34^2 \cdot 12^4}{153^2 \cdot 2} = \frac{34^2 \cdot 4^4}{17^2 \cdot 2} = 4^4 \cdot \frac{2^2}{2} = 16^2 \cdot 2 = 512$

Ответ: $R(\Omega) = 17$, $R(\omega) = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = arctg\, 4$, $S_{\triangle AFE} = 512$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 $f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=[p/4]$, p-простое

1) Пусть b-составное, тогда $b=cd$

$f(ab)=f(acd)=f(ac)+f(d)=f(a)+f(c)+f(d)$, значит если ab-составное, то мы можем его разложить на сумму $f(i)$, где i-простые числа, входящие в ab (аналогично можно разложить a, c или d, если они составные)

$f(2)=0$ $f(7)=1$ $f(12)=2f(2)+f(3)=0$ $f(17)=4$

$f(3)=0$ $f(8)=f(2)+2f(4)=0$ $f(13)=3$ $f(18)=2f(3)+f(2)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$ $f(9)=2\cdot f(3)=0$ $f(14)=f(2)+f(7)=1$ $f(19)=4$

$f(5)=1$ $f(10)=f(2)+f(5)=1$ $f(15)=f(3)+f(5)=1$ $f(20)=2f(2)+f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$ $f(11)=2$ $f(16)=2f(4)=0$ $f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$ $f(23)=5$ $f(24)=3f(2)+f(3)=0$ $f(25)=2f(5)=2$

$f(x)=f(x/y)+f(y)$ $f(x)-f(y)=f(x/y)<0 \Rightarrow f(x)-f(y)<0$, $f(x)<f(y)$

всего у нас 10 значений i, что $f(i)=0$, 7 знач. i, что $f(i)=1$, 3 знач. i, что $f(i)=2$, $f(13)=3$, $f(17)$ и $f(19)=4$, $f(23)=5$

при $f(x)=0$ x принии. ∀ из 10 значений, y же принимает любое из $24-10=14$ значений: $14\cdot10=140$

при $f(x)=1$ x принии. 7 знач., y же $14-7$ (т.к. $f(y)=0$ и $f(y)=1$ не подходит): $7\cdot7=49$

при $f(x)=2$: $3\cdot4=12$, при $f(x)=3$: $1\cdot3=3$, при $f(x)=4$, $f(y)=5$, $y=23$

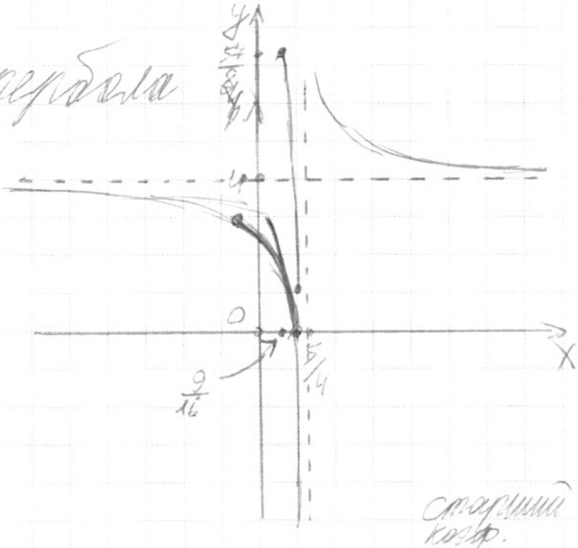
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

В итоге сумма равна: $140+49+12+3+1=205$

Ответ: 205 пар x и y

(6) $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \quad x\in[\frac{1}{4};1]$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$ - гипербола



$4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$, асимптоты: $x=\frac{5}{4}$, $y=4$

при $x\to\infty$, $f(x)>4$

$f(1)=4+\frac{1}{1-\frac{5}{4}}=4+\frac{1}{-\frac{1}{4}}=4-4=0$

$f(\frac{1}{4})=4+\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}=4-1=3$

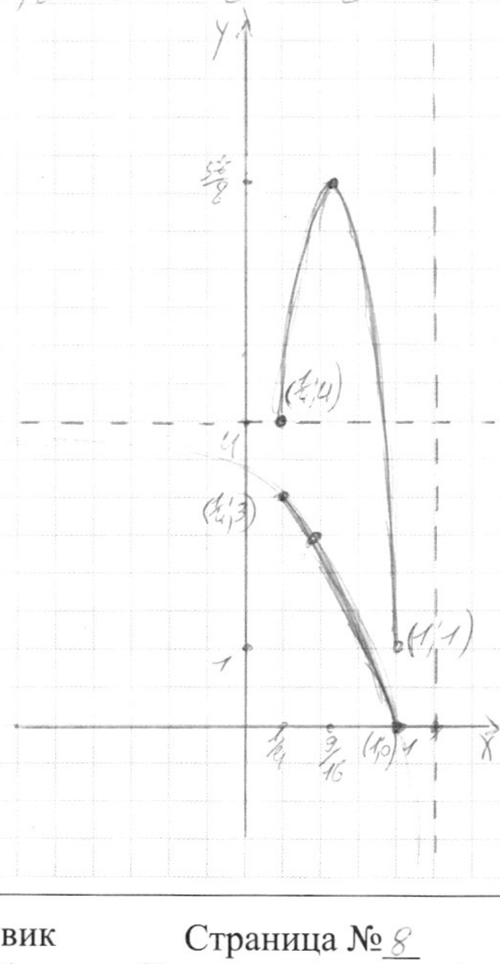
Рассмотрим функцию $-32x^2+36x-3$: парабола, ветви вниз (старший коэф. $a=-1$)

$x_в=-\frac{b}{2a}=\frac{-36}{-2\cdot 32}=\frac{9}{16}$ $\quad y_в=-32\cdot(\frac{9}{16})^2+36\cdot\frac{9}{16}-3=-\frac{81}{8}+\frac{9\cdot 18}{8}-3=$

$=\frac{81}{8}-3=\frac{81-24}{8}=\frac{57}{8}$

$f(1)=-32+36-3=1$

$f(\frac{1}{4})=-32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3=-2+9-3=4$



$ax+b$ - прямая: 1) $a<0$

max(a) при $ax+b$, где $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;0)\in ax+b$

$\begin{cases}\frac{a}{4}+b=4\\ a+b=0\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{-b}{4}+b=4\\ a=-b\end{cases}$ $\begin{cases}b=\frac{16}{3} - \max b\\ a=-\frac{16}{3} - \min a\end{cases}$

min(a) при $ax+b$, где $(\frac{1}{4};3)$ и $(1;1)\in ax+b$

$\begin{cases}\frac{a}{4}+b=3\\ a+b=1\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{4}+\frac{3b}{4}=3\\ a=1-b\end{cases}$ $\begin{cases}b=\frac{11}{3}\\ a=-\frac{8}{3}\end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~max(a) и min(в) график будет~~

Убедимся, что при max(a) и min(в) прямая будет иметь с гиперболой только одну точку пересечения (касание):

$-\frac{8}{3}x + \frac{11}{3} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ $(\cdot 3)$

$-8x + 11 = 12 + \frac{12}{4x-5}$

$8x + 1 + \frac{12}{4x-5} = 0$ $(\cdot(4x-5))$

$8x(4x-5) + 4x - 5 + 12 = 0$

$32x^2 - 40x + 4x + 7 = 0$

$32x^2 - 36x + 7 = 0$

$D > 0$, значит уравнение имеет 2 корня, значит точки a и в не подходят.

~~$ax + в = 4 - \frac{4}{4x-5}$ имеет 1 решение $\cdot(4x-5)$~~

~~$4ax^2 - 5ax + 4вx - 5в = 16x - 20 - 4$~~

~~$4ax^2 - (5a + 16)x + в + 20 + 4 = 0$~~

~~$(5a+16)^2 - 4 \cdot 4a(в + 24) = 0$~~ ~~$25a^2 + 160a + 256 - 16aв - 384a =$~~

~~$= 25a^2 - (224 + 16в)a + 256 = 0$~~

~~$4ax^2 - 5ax + 4вx - 5в = 16x - 20 - 4$~~

~~$4ax^2 - (5a - 4в + 16)x - 5в + 24 = 0$~~

~~$(5a - 4в + 16)^2 - 4 \cdot 4a(-5в + 24) = 0$~~

~~$25a^2 + 16в^2 + 256 - 40aв - 128в + 160a + 80aв - 384a = 0$~~

~~$25a^2 + 16в^2 - 128в + 40aв - 224a = 0$~~

Ответ: $a \geq -\frac{16}{3}$; $в \leq \frac{16}{3}$; $a < -\frac{8}{3}$; $в < \frac{11}{3}$.

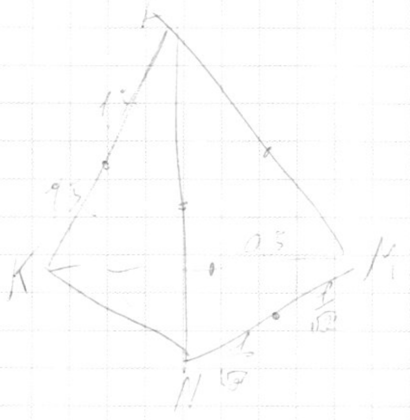
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

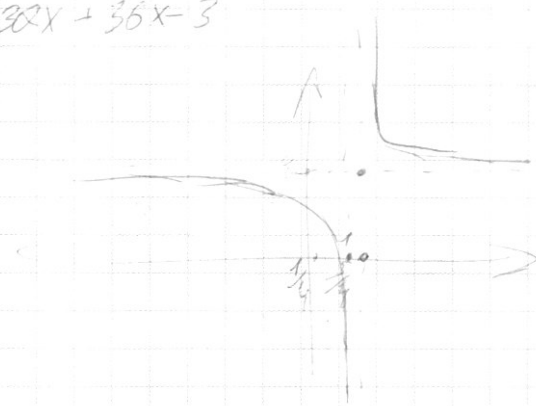
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$4+\frac{4}{4x-5}\le ax-b\le -32x^2+36x-3$$

гип.

$$4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

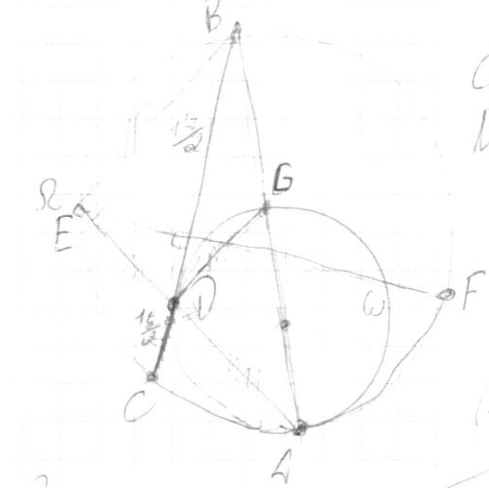
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = \frac{15}{2}$ $R - ?$ $r - ?$

$BD = \frac{15}{2}$ $\angle AFE - ?$ $S_{\triangle EF} - ?$

$k^a + (k^a-1)^2 \ge (k+1)^a$

$(10x - x^2)^{\log_3 5}$

$10x + (x^2 - 10x)^{\log_3 4} \ge x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2 + |10x - x^2|^{\log_3 4} \ge (10x - x^2)^{\log_3 5}$

Ограничения:

$10x - x^2 > 0$

$x(10-x) > 0$

0 10

$(0;10)$

$16 \cdot 24 = 64 + 32 = 384$

Пусть $10x - x^2 = t$, $t \in (0;25)$, $t > 0$

$t + |t|^{\log_3 4} \ge (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$t + t^{\log_3 4} \ge t^{\log_3 5}$

$t \ge t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$t^{\log_3 3} \ge t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$k^a + (k-1)^a \ge (k+1)^a$

$5^{\log_3 t}$ $4^{\log_3 t}$

$1 \ge t^{\log_3(\frac{5}{3})} - t^{\log_3(\frac{4}{3})}$

$1 \ge \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t}$

1. $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\,\alpha - ?$, ≥ 3 знак.

$1 > \left(\frac{5}{3}\right)^a - \left(\frac{4}{3}\right)^a$ при $a \ge 2$

$3^a \ge 5^a - 4^a$

$3^2 = 5^2 - 4^2$ $a = 2$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \sin(2\beta)\cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha$

$\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right)\cos\frac{4\beta}{2} =$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$= 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

~~$x^2+36y^2-12x-36y = x^2+12xy+36y^2-(12x+24xy+36y)=$~~

$=(x+6y)^2-12(x+xy+3y)$ ~~$-12x+72$~~ $-36y-3x+18+6xy$

~~$x^2+36y^2-36y-3x+18+6xy-3x-6xy=63$~~

~~$x^2-6xy+9y^2+27y^2-9x-3(x-6)$~~

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90 \end{cases}$$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$x-6=a$ $\quad a-6b=x-6-12y+6=x-12y$

$2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

~~$\frac{12x-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$ $\quad -32x^2+36x-3$~~

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$,

p - простое

$2\le x\le 25$

$2\le y\le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$

$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\boxed{f(x)<f(y)}$

$p-2,3,5,7,11,13,17,19,23$

$y=2,3$ $\quad x=\{5,7,...,23\}$ $\quad 7\cdot 2$ $\quad 14+10+4+3+2=33$

$y=5,7$ $\quad x=\{11,...,23\}$ $\quad 5\cdot 2$

$y=11$ $\quad 4$

$y=13$ $\quad 3$

$y=17,19$ $\quad x=\{23\}$ $\quad 2$

$y=23$ $\quad \varnothing$

$f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=f(2)+f(4)=3\cdot f(2)=0$ $\quad f(9)=2\cdot f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$ $\quad f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(12)=f(2)+f(6)=f(2)+f(2)+f(3)=0$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(21)=f(7)+f(3)=1$

$f(16)=4\cdot f(2)=0$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(18)=f(2)+f(3)+f(3)=0$

$f(24)=3\cdot f(2)+f(3)=0$

$f(20)=f(5)+2\cdot f(2)=1$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

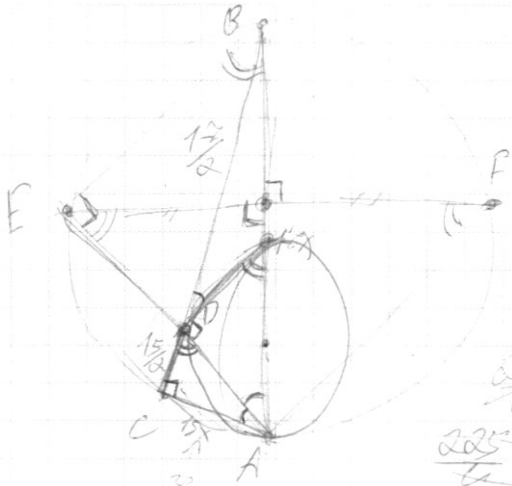
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$289x^2 = 225x^2 + \frac{30^2}{16}$

$R = \frac{AF}{2\sin\angle AFE}$

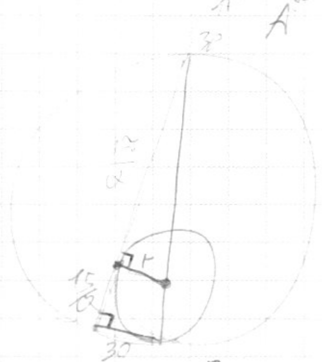
$64x^2 = \frac{30^2}{16}$

$x^2 = \frac{30^2}{16 \cdot 64}$ $x = \frac{30}{32}$

$AD = \frac{17 \cdot 30}{32}$ $R = \frac{17 \cdot 32}{2} \ldots (17)$

$\frac{225}{4} + 60^2 = \sqrt{\frac{3\ldots}{2}} = AD$

$\frac{225}{4} + 3600$ $CA = 30$ $30 \; 34 \; 16$

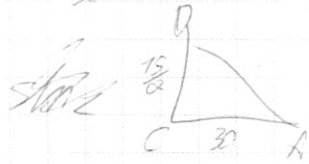


$\frac{16}{30} = \frac{\frac{17}{2}}{r}$ через подобие

$\frac{8}{15} = \frac{17}{2r}$ $r = \frac{17}{2} : \frac{8}{15} =$

$\frac{16}{30} = \frac{\frac{17}{2}}{r}$ $r = \frac{17}{2} \cdot \frac{30}{16} = \frac{17 \cdot 15}{16} =$

$tg\angle CDA = \frac{30 \cdot 2}{15} = 4$ $\angle AFE = arctg\,4$



$S_{\triangle AFE}(R)$

$$\begin{cases} a^2 - 11ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$ $ab \geq 0$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

~~$a^2(a+b)^2 = 90 + 2ab$~~

$(a+6b)^2$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$a^2 + 2ab$

$$\begin{cases} 11ab - 35b^2 = 90 \\ ~~a^2 + b^2 = 90~~ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$$\begin{cases} a^2 - 11ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11ab = 90 + 35b^2 \\ 90 + 35b^2 = 11b(90 - b^2) \end{cases}$$ $a = \frac{90 + 35b^2}{11b}$

$90 + 35b^2 = 990b - 11b^3$

~~$11b^3 + 35b^2 - 990b + 90 = 0$~~

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \quad \begin{cases} 90+35b^2=13ab \\ a^2=90-b^2 \end{cases}$$

$ab>0$

$$\begin{cases} \frac{90+35b^2}{13b}=a \\ a^2=90-b^2 \end{cases} \quad \left\{ (90+35b^2)^2=169b^2(90-b^2) \right.$$

$169 \cdot 90 = 15210$

$15210 - 6300 = 8910$

$8100+6300b^2+1225b^4=15210b^2-169b^4$

$1056b^4-8910b^2+8100=0$

$528b^4-4455b^2+4050=0$

$288=4\cdot 72$

$144\cdot 2$ ~~$=8\cdot 36=16$~~

$12\sqrt{2}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{2}{5}$

$\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \frac{\cancel{\sin}}{\cos} 2\beta+\cos 2\alpha \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha=-1$

$1+\sin 2\alpha=\pm 2(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=\pm 2\sin\alpha \mp 2\cos\alpha$

$\sin\alpha=\cos\alpha$

$\tg\alpha=1$

1) $\sin\alpha=3\cos\alpha$ $\quad$ 2) $3\sin\alpha=\cos\alpha$

$\tg\alpha=\frac13$ $\quad$ $\tg\alpha=3$

$\frac{21\pm\sqrt{441-360}}{10}=b=$

$=\frac{21\pm 9}{10}=b$ $\quad b=3$ $\quad b=-\frac{6}{5}$

$b=3$ $\quad a^2=90-9=81$ $\quad a=9$

~~$b=\frac{6}{5}$~~ ~~$a^2=88{,}56$~~

$5b^4-21b^2+18=0$

$250b^4-1150b^2+900=0 \quad |50$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

~~$45b^4-205b^2+450=0$~~

$$\begin{cases} 90+27b^2=13ab \\ a^2=9(10-b^2) \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{9(10+3b^2)}{13b} \\ 9^2(10+3b^2)^2=(13b)^2(10-b^2)\cdot 9 \end{cases}$$

$900+540b^2+81b^4=1690b^2-169b^4$ ~~$94b^4+4130b^2+200=0$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)