МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Найдем $f(1)$, подставим $a=b=1$ в $f(ab)=f(a)+f(b)$
$\Rightarrow f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$ Найдем $f(\frac{1}{p})$ где p - простое
$f(p\cdot\frac{1}{p}) = f(p)+f(\frac{1}{p}) \Rightarrow 0 = [\frac{p}{4}] + f(\frac{1}{p}) \Rightarrow f(\frac{1}{p}) = -[\frac{p}{4}]$
Тогда если $x = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ раскладывается на простые множители $\Rightarrow f(x) = \alpha_1 f(p_1)+\ldots+\alpha_k f(p_k) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(p_i)$
Просто используя свойство $f(ab)=f(a)+f(b)$
Теперь рассмотрим пары (x,y) где $x = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ и $y = q_1^{\beta_1}\ldots q_m^{\beta_m}$ где все p_i и q_i - простые, (x,y) такие что $f(\frac{x}{y})<0$, тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$ $\{f(y\cdot\frac{1}{y})=0 \Rightarrow 0=f(y)+f(\frac{1}{y})\}$
$= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(p_i) - f(y) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(p_i) - \sum_{i=1}^{m}\beta_i f(q_i) < 0$

Т.е $\Leftrightarrow f(x)<f(y)$ Теперь найдем f от чисел от 3 до 27. Заметим что $f(3)=f(2)=f(1)=0$ т.к. $f(p)=[\frac{p}{4}] \Rightarrow$ число состоящее из множителей только 2 и 3 то $f(2^x\cdot 3^y)=0$
$\Rightarrow f(3)=f(6)=f(12)=f(24)=f(9)=f(18)=f(27)=f(2)=f(4)=f(8)=f(16)=0$. Теперь посчитаем для остальных простых $f(p)$: $f(5)=[\frac{5}{4}]=1$; $f(7)=[\frac{7}{4}]=1$; $f(11)=[\frac{11}{4}]=2$, $f(13)=[\frac{13}{4}]=3$ $f(17)=[\frac{17}{4}]=4=f(19)$; $f(23)=[\frac{23}{4}]=5$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$; $f(14)=f(2)+f(7)=1$; $f(15)=f(5)+f(3)==1$; $f(20)=f(5)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$; $f(22)=f(2)+f(11)=2$; $f(25)=2f(5)=2$; $f(26)=f(13)=3$. Тогда у нас 10 значений нолей $f(2)=0$ но $2<3$
7 значений 1; 3 значения 2; 2 значения 3
2 значения 4 и 1 значение 5

Тогда кол-во способов выбрать x, y : мы можем брать x, y только из групп чисел разных значений f причем выбрав 2 группы значения x и y однозн. соответ группам им группы где f > соответствует y т.к. $f(y) > f(x)$

Тогда всего 5 групп

кол-во элементов	значение f
10	0
7	1
3	2
2	3
2	4
1	5

Суммируются m·n где m кол-во способов выбрать число из 1 группы n из другой

Тогда всего пар: $10(7+3+2+2+1) + 7(3+2+2+1) + 3(2+2+1) + 2(2+1) + 2\cdot 1$

$= 10(15) + 7\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 = 150 + 56 + 15 + 8 = 206 + 23$

$= 229$ Ответ: 229

№6. $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x-2}$ тогда $f'(x) =$

$= \dfrac{4(2x-2) - 2(4x-3)}{(2x-2)^2} = \dfrac{-2}{(2x-2)^2} < 0$

$\Rightarrow f(x)$ убывает на $(1; 3]$

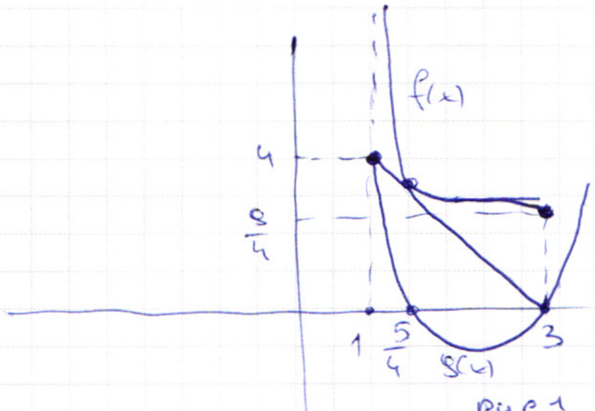


рис 1

$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$

$g(x) = 8(x-3)\left(x - \frac{10}{8}\right)$; $g(1) = 4$

$f(3) = \frac{9}{4}$; $g(3) = 0$ см рис 1

Тогда наша прямая $ax + b$ не пересекает прямую проходящую через $(1,4)$ и $(3,0)$ на $(1; 3]$ т.е отрезок. т.к парабола $8x^2 - 34x + 30$ в силу выпуклости лежит по 1 сторону от этого отрезка $\Rightarrow$ что $ax + b$ на $(1;3]$ пересечет ~~прямую~~ параболу тогда $ax + b$ лежит выше отрезка $(1,4)$ и $(3,0)$ на $(1;3]$ Поймем что график $f(x)$ касается ~~g(x)~~ отрезка $(1,4)$; $(3,0)$ в точке $x = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{6-3}{3-2} = 3$ и

отрезок $(1,4)$ и $(3,0)$ лежит на прямой $y = -2x + 6 \Rightarrow$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = -3 + 6 = 3$ Построим касательную к $f(x)$ в точке $\frac{3}{2} \Rightarrow y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{-2}{\left(\frac{3}{2}2-2\right)^2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 3 = -2x + 3 + 3 = -2x + 6 \Rightarrow$ график $f(x)$ касается $y = -2x + 6$ но тогда любая $ax + b$ ~~единственная~~ прямая которая на $(1; 3]$ не пересекает (не ниже) $f(x)$ ~~[illegible]~~ и лежит выше отрез $(1,4)$; $(3;0)$ это только

это касательная (см рис 1) поскольку ей придется пройти чрз точку $x = \frac{3}{2}$ иначе она пересечёт $f(x)$ в 2 точках $\rightarrow$ где то она будет $> f(x)$ но раз она пересекает $y = -2x + 6$ в $x = \frac{3}{2}$ и остальные

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

точки на прямой не ниже $y=-2x+6$ то она просто совпадает с $y=-2x+6$ => Ответ $a=-2$ $b=6$, Такая прямая подходит ведь парабола полностью снизу от нее на $(1;3]$ а $f(x)$ сверху и касается в 1 точке. $(-2;6]$

№1) $\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ и $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow \sin(2\beta)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\pm(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha\pm(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

1) Если знак +:

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1=0$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$\operatorname{tg}\alpha$ - определен => $\cos\alpha\neq0$

$8\sin\alpha=-2\cos\alpha$

$4\sin\alpha=-\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$

2) Если знак −

$8\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+1=0$

$8\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=0$

либо $\sin\alpha=0\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=0$

либо

$4\cos\alpha+\sin\alpha=0$

$-\sin\alpha=4\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha=-4$

всего 3 значения и по условию их ≥3 => все они подходят.

Ответ: $-4;-\frac{1}{4};0$

№2) $\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$

Пусть $A=3y-2$ и $B=x-1$

1) $3y-2x=A-2B$

2) $3xy-2x-3y+2=AB$

3) $3x^2+3y^2-6x-4y-4=3B^2+\frac{A^2}{3}-8\frac{1}{3}$

$\begin{cases}A-2B=\sqrt{AB}\\3B^2+\frac{A^2}{3}=\frac{25}{3}\end{cases}$

$\begin{cases}(A-2B)^2=AB\\9B^2+A^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A^2+4B^2-5AB=0\\9B^2+A^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9B^2+A^2=25\\(25-9B^2)+4B^2=5AB\end{cases}$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\begin{cases} 9B^2+A^2=25 \\ 5-B^2=AB \end{cases}$ $\Rightarrow A=\pm\sqrt{25-9B^2}$ система 1

$\Rightarrow 5-B^2=\pm\sqrt{25-9B^2}\cdot B$ ~~только~~ заметим, что если A, B решение то $(-A,-B)$ – решение тогда будем решать для знака +

$(5-B^2)^2=(25-9B^2)\cdot B^2 \Leftrightarrow 25+B^4-10B^2=25B^2-9B^4 \Leftrightarrow$

$10B^4-35B^2+25=0 \Leftrightarrow 2B^4-7B^2+5=0 \Leftrightarrow$

$2(B^2-1)(B^2-\frac{5}{2}) \Rightarrow B=\pm1$ или $B=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Так как $(A-2B)^2=AB \Rightarrow$ знак A и B одинаковый

Тогда мы получили пары $(4;1)$ и $(-4;-1)$ а также $(\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}})$ и $(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}})$ они все удовлетворяют системе (1) По ним восстановим x и y:

$x=B+1$ и $y=\frac{A+2}{3}$

Ответ: $(2;2)$; $(0;-\frac{2}{3})$; $(\sqrt{\frac{5}{2}}+1;\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3})$; $(-\sqrt{\frac{5}{2}}+1;\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3})$

№3 Пусть $A=x^2+6x$ тогда наше нер-во $\Leftrightarrow$

$3^{\log_4 a}+a\geq|a|^{\log_4 5}$ т.к. $\log_4 a$ определен $\Rightarrow a\geq0 \Rightarrow |a|=a \Rightarrow$

Пусть $a=4^{x_0}$ т.е $\log_4 a=x_0$ тогда нер-во $\Leftrightarrow$

$3^{x_0}+a\geq a^{\log_4 5} \Leftrightarrow 3^{x_0}+4^{x_0}\geq5^{x_0} \Leftrightarrow (3^2)^{\frac{x_0}{2}}+(4^2)^{\frac{x_0}{2}}\geq(5^2)^{\frac{x_0}{2}}$

$9^{\frac{x_0}{2}}+16^{\frac{x_0}{2}}\geq25^{\frac{x_0}{2}}$. ~~Докажем лемму, что~~ $a^x+b^x\geq(a+b)^x$

$\Leftrightarrow x\leq1$ Лемма док-во: $\Leftrightarrow 1+(\frac{b}{a})^x\geq(\frac{a+b}{a})^x \Leftrightarrow$

$c=\frac{b}{a}$

$1+c^x\geq(1+c)^x$ Пусть $f(x)=1+c^x-(1+c)^x \Rightarrow$

$f'(x)=$ ~~$\ln(c)$~~ $xc^{x-1}-x(1+c)^{x-1}$ ~~≥0~~ $\leq0 \Leftrightarrow c^{x-1}\leq(1+c)^{x-1}$ и

т.е при $x\geq1$

≥0 в случае $c^{x-1}\geq(1+c)^{x-1}$ тогда при $x-1\geq0$ $f'(x)\leq0$

при $x\leq1$

а при $x-1\leq0$ $f'(x)\geq0$ Тогда $f(1)=0$ $f(0)=1$

~~возрастает~~ ≥0

$f(x)$ ~~возрастает~~ ~~убывает~~ до $x=1$, а потом возрастает до $x=+\infty \Rightarrow$

$f(x)$

Т.е $9^{\frac{x_0}{2}}+16^{\frac{x_0}{2}}\geq(9+16)^{\frac{x_0}{2}} \Leftrightarrow \frac{x_0}{2}\leq1$ т.е $x_0\leq2$

$\Leftarrow$ ||

$\log_4(x^2+6x)\leq2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\log_4(x^2+6x) \le \log_4 16$

$0 < x^2+6x \le 16$

$0 < x(x+6) \le 16$

Найдем корни $x(x+6)$ это 0 и -6 => при $x \in (-\infty;-6) \cup (0,+\infty)$ тогда $x(x+6) < 0$

Найдем когда $(x)(x+6) - 16 \le 0$

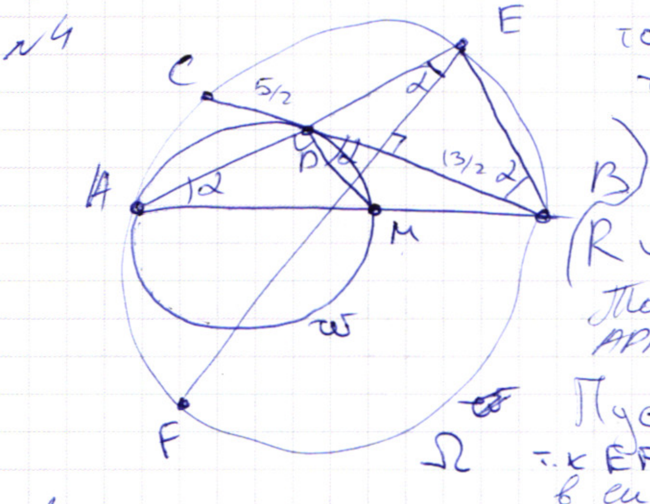
$x^2+6x-16 \le 0 \iff (x+8)(x-2) \le 0$

т.е $x \in [-8;-2]$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty) \\ x \in [-8;-2] \end{cases} \iff x \in [-8;-6) \cancel{\cup(0;2)}$$

Ответ:

№4



Заметим что раз AB диаметр Ω то AM где M = ω ∩ AB диаметр ω т.к центры лежат на общ. перпен. к общей касательной точке ∃ Гомотетия в A переводящая ω в Ω с коэф $\frac{R}{r}$ где R и r соотв. радиусы Ω и ω. Тогда раз AM диаметр ω => $\angle APM = \angle AEB = 90$ в $\triangle PER$;

Пусть $\angle AEF = \alpha$ тогда $\angle EDB = 90-\alpha$ т.к $EF \perp BD$ => $\angle EBP = \alpha$ т.к $\angle PEB = 90$ в силу параллельности PM и EB т.к они $\perp AE$ $\angle EBD = \angle BPM = \alpha$ как накрест лежащие и раз BP касательная к ω то $\angle PAM = \angle MPB = \alpha$ тогда к описанной окружности $\triangle ADB$ EB − касательная т.к $\angle DAB = \angle DBE = \alpha$ => $EB^2 = ED \cdot EA$ и также $ED - AD = CD$.

$DB = \deg P$ относительно Ω => $ED(ED+DA) = EB^2 \iff$

$ED^2 + \frac{65}{4} = EB^2$ тогда в $\triangle EBD$ по т. Пифагора

$ED^2 + EB^2 = \frac{169}{4} \iff 2ED^2 + \frac{65}{4} = \frac{169}{4} \iff ED^2 = \frac{104}{8} \iff ED^2 = 13$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$ED\cdot AD=\frac{65}{4} \Rightarrow AD=\frac{5\sqrt{13}}{4}$ $EB^2=13+\frac{65}{4}=\frac{117}{4}$ в $\triangle EBA$

по т. Пифагора $4R^2=\frac{117}{4}+\left(\sqrt{13}+\frac{5\sqrt{13}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$4R^2=\frac{117}{4}+13\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{117}{4}+\frac{13\cdot 81}{16}=\frac{468+1053}{16}=\frac{(39)^2}{16}$

$R^2=\frac{(39)^2}{4\cdot 16} \Rightarrow R=\frac{39}{8}$ в силу $\parallel$ DM и EB $\Rightarrow$

$\frac{r}{R}=\frac{AM}{AB}=\frac{AD}{AE} \Rightarrow r=\frac{39}{8}\left(\frac{5\sqrt{13}}{4}:\left(\frac{4\sqrt{13}+5\sqrt{13}}{4}\right)\right)$

$r=\frac{5\sqrt{13}\,4}{4(9\sqrt{13})}\cdot\frac{39}{8}=\frac{5}{9}\cdot\frac{39}{8}=\frac{195}{72}$

$\angle AFE$ опирается на AE $\Rightarrow \sin(\angle AFE)=\frac{AE}{2R}$ по т синусов

$=\frac{9\sqrt{13}}{8\cdot\frac{39}{8}}=\frac{9}{3\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AFE=\arcsin(\cancel{2}3/\sqrt{13})$

$S_{\triangle AFE}=\frac{1}{2}AE\cdot EF\cdot\sin(\angle AEF)=\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{2R\cdot\sin\alpha}{2}=$ в $\triangle DEB$ $\frac{DE}{DB}$

$\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{39}{8}\cdot\frac{\sqrt{13}\cdot 4}{169}=$

$S=\frac{9\cdot 3\cdot 13^2\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 169}=\frac{27}{8}$

№7

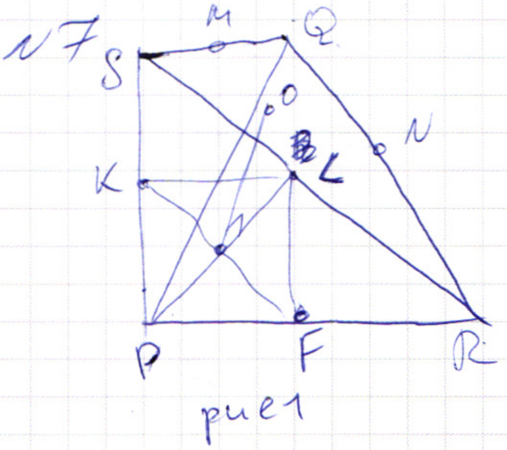


рис1

На сфере лежат точки K, L, F, P см рис 1 середины сторон $\triangle SPR \Rightarrow \cap$ сферы и плоскости это окр $\Rightarrow$ K, L, F, P $\in$ 1 окр.

$\Rightarrow \angle KPF + \angle KLF = 180$

$\angle KLF = \cancel{180}\ \angle KPF \Rightarrow \angle KPF = 90$

$\Rightarrow \angle PKL = \angle PFL = 90^\circ$ тогда

Вводим систему координат PR, PS, оси Ox и Oy

ось Oz $\perp$ плоскости PSR $\Rightarrow$

$P(0,0,0)$ $R(2a,0,0)$ $S(0,\sqrt{2},0)$ Пусть $Q(x,y,z)$

$K(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ $F(a,0,0)$ тогда O - центр сферы лежит на перпендикуляре к центру ~~квадр~~ прямоугольника.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow O\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; h\right) \Rightarrow M\left(\frac{x}{2}; \frac{y+\sqrt{2}}{2}; \frac{z}{2}\right)$

Рсз $OM = ON = OP$ $\Leftarrow$ $N\left(\frac{x}{2}+a, \frac{y}{2}; \frac{z}{2}\right)$

$\Downarrow$

$\frac{a^2}{4} + \frac{2}{16} + h^2 = \frac{(a-x)^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{y+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} - h\right)^2 =$

$= \left(\frac{x+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} - h\right)^2 \Leftrightarrow$

$a^2 + \frac{1}{2} + 4h^2 = a^2 + x^2 - 2ax + y^2 + \frac{1}{2} + y\sqrt{2} + z^2 + 4h^2 - 4hz =$

$= x^2 + a^2 + 2ax + y^2 + \frac{1}{2} - y\sqrt{2} + z^2 + 4h^2 - 4hz \Leftrightarrow$

$0 = x^2 - 2ax + y^2 + y\sqrt{2} + z^2 - 4hz = x^2 + 2ax + y^2 - y\sqrt{2} + z^2 - 4hz$

$\Downarrow$

$2ax = y\sqrt{2}$

Т.к. $QR = 2$ и $QS = 1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} y^2 + z^2 + (x-2a)^2 = 4 \\ x^2 + z^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 1 \end{cases}$ - вычтем $\Rightarrow 3 = -4ax + 4a^2 - 2 + 2\sqrt{2}y$

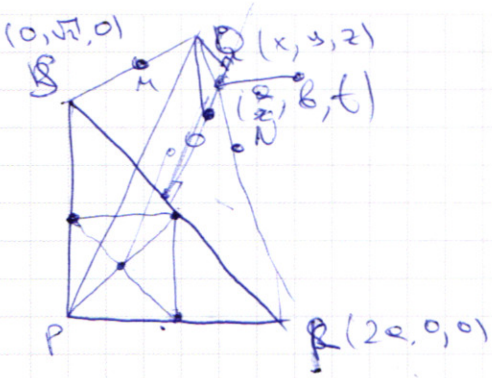
$\Downarrow$

$5 = 4a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Тогда $RS^2 = 4a^2 + 2$

$= 5 + 2 = 7 \Rightarrow RS = \sqrt{7}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$O\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, h\right)$

$\frac{a^2}{4} + \frac{2}{16} + h^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{y+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} - h\right)^2$

$\left(\frac{x+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} - h\right)^2$

$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y+\sqrt{2}}{2}, \frac{z}{2}\right)$ $N\left(\frac{x}{2} + a, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$

$y^2 + z^2 + (x-2a)^2 = 4$

$x^2 + z^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$ $\quad + y + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2 + \frac{1}{2} + 4h^2 = (a-x)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - y - \sqrt{2}\right)^2 + (z-2h)^2 =$

$= (x+a)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (z-2h)^2$

$\cancel{a^2} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{4h^2} = \cancel{a^2} + x^2 - 2ax + y^2 + \cancel{\frac{1}{2}} + y\sqrt{2} + z^2 + \cancel{4h^2} - 4hz =$

$= x^2 + \cancel{a^2} + 2ax + y^2 + \cancel{\frac{1}{2}} - y\sqrt{2} + z^2 + \cancel{4h^2} - 4hz$

$0 = x^2 - 2ax + y^2 + y\sqrt{2} + z^2 - 4hz = x^2 + 2ax + y^2 - y\sqrt{2} + z^2 - 4hz$

$4ax - 2y\sqrt{2} = 0$

$4 - 1 = -4ax + 4a^2 - 2 + 2\sqrt{2}y$

$3 = 4a^2 - 2$ $\quad a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad 0 = x^2 + y^2 + z^2 - 4hz$ $\quad 4ax = 2y\sqrt{2}$

$5 = 4a^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4hz$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-t)^2 - \min$

$= \cancel{4+4a^2}\ 9 + 4ax$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9 + 4ax$

$4ax = 2y\sqrt{2}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$1+e^x \geq (1+e)^x$

$f(x)=1+e^x-(1+e)^x \geq 0$

$f(0)=1$

$f(1)=0$

$f'(x)=x\left(e^{x-1}-(1+e)^{x-1}\right) \geq 0$

$x \leq 1$

$f'(x) \geq 0 \quad x \geq 1$

$< 0 \quad x \leq 1$

$\frac{52+65}{4}$

440
28

$$\begin{array}{r} 81 \\ 13 \\ \hline 243 \\ 81 \\ \hline 1053 \end{array}$$

1510

$$\begin{array}{r} 1053 \\ 468 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$1521 / 9 = 169$

9
62
54
81

41
×41

$9 \cdot 169$

✖ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

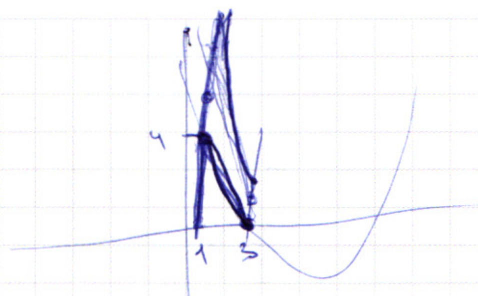
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

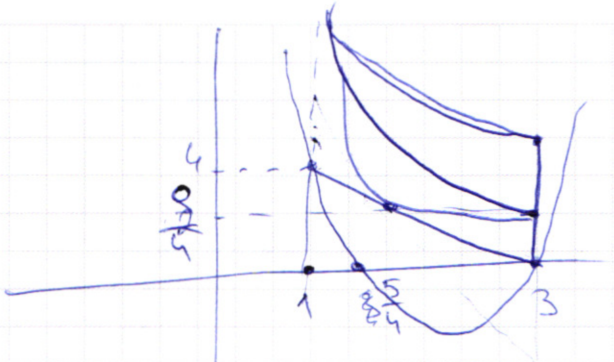
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$(1, 4)$

$(3, 0)$

$y =$

$\frac{4x-2}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

$y = 3k + b = 0$

$8(x-3)\left(x - \frac{10}{8}\right)$

$-24 - 10$

$4(2x-2) - 2(4x-3)$

$-8 + 6$

$y = kx + b$

0 3

4 1

$y = -2x + 6$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

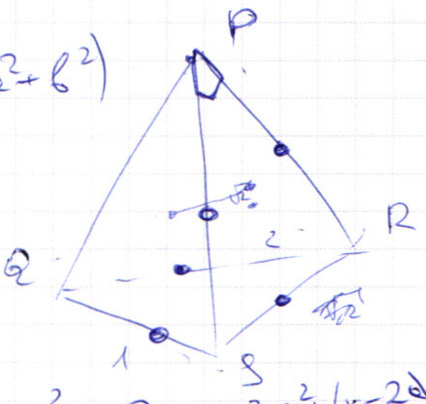
$3k + b = 0$

$k + b = 4$

$k = -2$

$2k = -4 \quad b = 6$

$4(a^2 + b^2)$



$(2x-2)(6-2x) = 4x - 3$

$4(x-1)(3-x) = 4x - 3$

$4(3x - 3 - x^2 + x) = 4x - 3$

$12x - 12 - 4x^2 + 3 = 0$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 \quad x = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2$

$x^2 + z^2 + (y - 2b)^2$

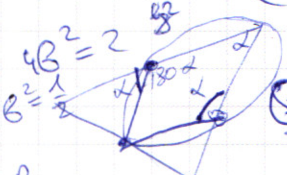
$y^2 + z^2 + (x - 2b)^2 = 4$

$x^2 + z^2 + (y - 2b)^2 = 1$

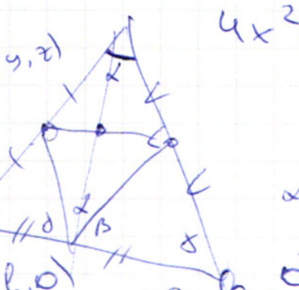
$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$4b^2 = 2$

$b^2 = \frac{1}{2}$

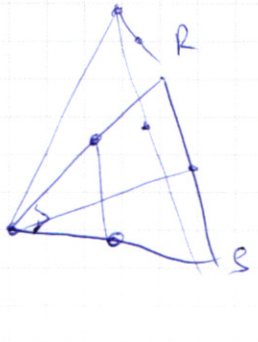


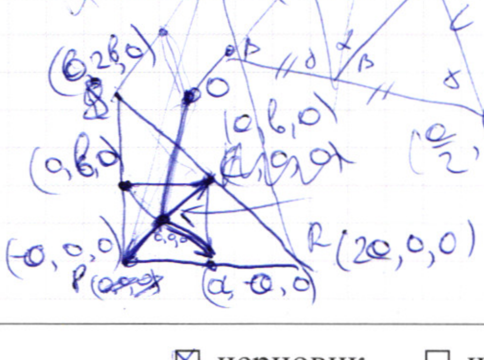
$Q(x, y, z)$



$\alpha = 90°$

$O\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, h\right)$





$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p-простое

$f\left(\frac{x}{y}\right) \le 0$

$f(p^2) = 2f(p)$

$p\left(\frac{1}{p}\cdot p\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p)$

$f(1) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p)$

$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \to f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_n f(p_n) < 0$

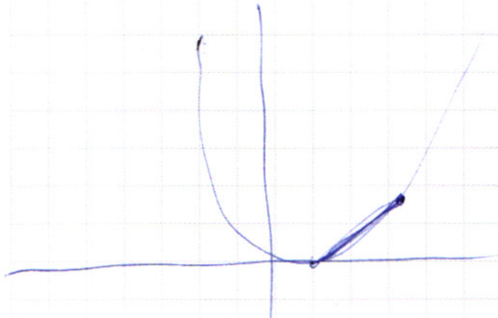
$f\left(\frac{1}{p^2}\right) = -2\left[\frac{p}{4}\right]$

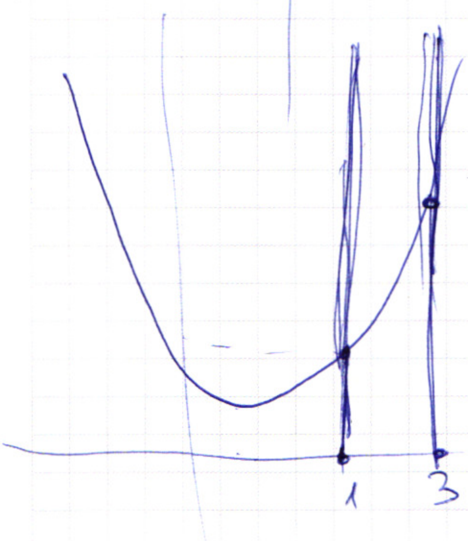
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
5 = 1
6 = 0
7 = 1
8 = 0
9 = 0
10 = 1
11 = 2
12 = 0
13 = 3
14 = 1
15 = 1
16 = 0
17 = 4
18 = 0
19 = 4
20 = 1
21 = 2
22
23 = 5
24 = 0
25 = 2
26 = 3
27 = 0

0 : 10
1 : 7
2 : 3
3 : 3
4 : 2
5 : 1

10 · 15 +

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax + b \ge 8x^2 - 34x + 30$





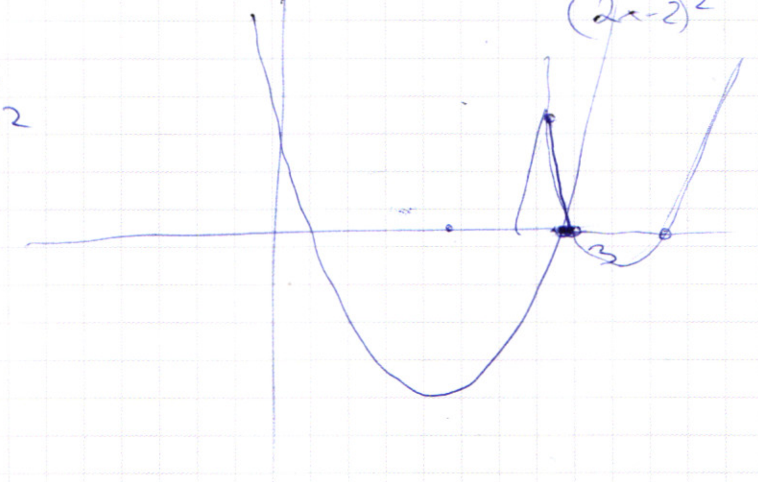
$\frac{34}{16}$

$\frac{9}{4}$

72 + 30 − 34·3
102 − 90 − 12

$\frac{4x-3}{2x-2}$ $\quad \frac{4(2x-2) - (4x-3)2}{(2x-2)^2}$

$\frac{-2}{(2x-2)^2} < 0$



$\frac{36}{8}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(a)} + a \ge a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3} + a^{\log_4 4} \ge a^{\log_4 5}$

$a(a^{\log_4 3 - 1} + 1 - a^{\log_4 5 - \log_4 4}$

$a^{\log_4 3} + a - a^{\log_4 5}$

$\ln a^{\log_4 3} + 1 - a \cdot \ln a^{\log_4 5}$

$3^x + 4^x \ge 5^x$ $(4+1)^x$ $x \in$

$3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - 5^x \ln 5 \ge 0$

$(x+1)^{a-1} \ge \frac{x^a+1}{x+1}$

$\sqrt[a]{\frac{x^a+y^a}{2}}$

$\sqrt{3^2+1}$ $(3^2+1)^3$ 3^6+1 $+3\cdot3^2+3^{2\cdot3}$

$\sqrt[3]{3^3+1}$ $(3^3+1)^2$ $2\cdot3^3$

$a = 4^x$ $1+3\ge2$

$3^x + 4^x \le 5^x$ $x \ge 2$

$9^a + 16^a \le 25^a$

$\sqrt[a]{9^a+16^a} \le (9+16)^a$

$\sqrt[a]{9^a+16^a} \le 25$ $a \ge 1$

$x^a + y^a \le (x+y)^a$

$(x+1)^a \ge x^a + 1$

$x+1 \ge \sqrt[a]{x^a+1}$

$1 + \left(\frac{x}{y}\right)^a \le \left(\frac{x+y}{y}\right)^a$

$(x+1)^a - 1^a \ge x^a$

$1 + \left(\frac{x}{y}\right)^a \le \left(\frac{x}{y}+1\right)^a$

$x^a((x+1)^{a-1} + (x+1)^{a-2} + \ldots +$

$x \ge y$

$9^{x'} \ge 9^{y'}$

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$(x+1)^a \ge x^a + 1$ $\left(\frac{x+1}{2}\right) \ge \frac{\sqrt[a]{x^a+1}}{2}$

$(x+1)^a \ge x^a + 1$

$(x+1)^a - x^a \ge 1$

$1(x^{a-1} + x^{a-2} + \ldots + 1)$

$x^a +$

$x^a + x^{a-1} + \ldots +$

$(x^a+1)^{\frac{1}{a}}$ $\frac{1}{a}(x^a+1)^{\frac{1-a}{a}} \cdot x^a \ln x$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$(x+1)^a \geq x^a + 1$

$x+1 \geq \sqrt[a]{(x^a+1)}$

$\frac{1}{a}(x^a+1)^{\frac{1-a}{a}} \cdot ax^{a-1} < 0$

$\sqrt[2]{c^2+1}$

$\sqrt[3]{c^3+1}$

$\frac{1}{a}$

$(c+1)^x \geq c^x+1$

$c+1 \geq \sqrt[x]{c^x+1}$

$x($

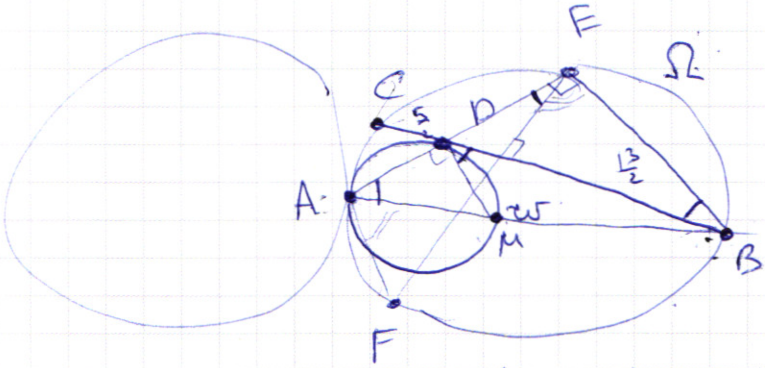
$(c^x+1)^{\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x}(c^x+1)^{\frac{1}{x}-1} \cdot xc^{x-1}$

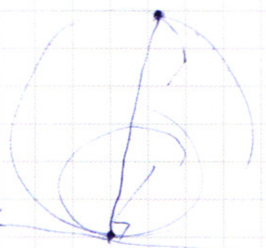
$(c+1)^x - c^x - 1 \geq 0$

$x(c+1)^{x-1} - xc^{x-1} \geq 0$ $\quad x \geq 1$

$(c+1)^{x-1} \geq c^{x-1}$



$CD = \frac{5}{2}$ $\quad BD = \frac{13}{2}$



$\frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AB} = \frac{r}{R}$ $\quad r = R\cdot k$

$(2R-2r)\cdot 2R = \frac{189}{2}$ $\quad AD \cdot DE = \frac{65}{4}$

$DE^2 + BE^2 = \frac{169}{4}$

$DE(AD+DE) = BE^2$

$(R-\cancel{r})R$

$2DE^2 + \frac{65}{4} = \frac{169}{4}$

$DE^2 + \frac{65}{4} = BE^2$

$DE^2 = \frac{104}{8} = \frac{52}{4} = 13$

$DE = \sqrt{13}$

$\sin \frac{\sqrt{13}}{13}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad x \geq 1$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-8}{17}$

$\left(\frac{1+e}{e}\right)^{x-1} \geq 1$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-8}{17}$, $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\quad \cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos$ $\quad \sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad a^x = a^x \cdot$

$\sin 2\alpha \cdot 4 + \cos 2\alpha = -1$ $\quad a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = 0$ $\quad 1+e^x \geq (1+e)^x$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$ $\quad 1+e^x-(1+e)^x \geq 0$

$\cancel{8\sin\alpha\cos\alpha}$ $\frac{\cancel{8}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cancel{2}\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$ $\quad e^{x-1} \geq (1+e)^{x-1}$

$3^{\log_4 a} + a - a^{\log_4 5} \geq 0$

$3^{\log_4 a} \cdot \ln($ $\quad 8\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$ $\quad \frac{1}{e} > \frac{1}{1+e}$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha$ $\quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$4\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$ $\quad 5\sin^2\alpha = 1$ $\quad -x^2$ $\quad \ln a\, a^{\log_4 3}\left(1-a^{\log_4 \frac{3}{5}}\right)$

4 $\quad 1 \qquad -1$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x + x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3 = 4^x$ $\quad a<$

$a = 4^y$

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$ $\quad y$

$4^{x \cdot \log_4 a}$ $\quad (4^2)^5 \quad 4^{10}$

$a^x + a \geq 5^y$

$a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3} = 3^{\log_4 a}$ $\quad a^{\log_4 3} + a - a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3} \cdot \ln a + 1 - a^{\log_4 5}\ln a \geq 0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$ $\qquad 25-\frac{45}{2}$

$\frac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\beta)=\frac{\pm 1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$ $\qquad 8\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+1=0$

$8\sin\alpha+\cos\alpha=0$ $\qquad 8\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0$

$4\cos\alpha=\sin\alpha$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$(A-2B)^2=AB$ $\qquad 3y(x-1)+2(1-x$

$3B^2+\frac{A^2}{3}=8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$ $\qquad (3y-2)(x-1)$

$(3y-2x)^2=\underset{A}{(3y-2)}\underset{B}{(x-1)}$

$3x^2-6x+3$ $\qquad (A-2B)^2$

$3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2=3x^2-6x+3$

$9B^2+A^2=25$ $\qquad \frac{(3y-2)^2}{3}=\frac{9y^2-12y+4}{3}=3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$(A-2B)^2=AB$ $\qquad 5=B(A+B)$

$A^2+4B^2-5AB=0$ $\qquad 25=9B^2+A^2$

$25-9B^2+4B^2-5AB=0$ $\qquad A^2=\sqrt{25-9B^2}$

$5-B^2-AB=0$ $\qquad 5=B\left(\sqrt{25-9B^2}+B\right)$

$\cancel{B(A+B)}$ $\qquad (5-B^2)^2=B^2(25-9B^2)$

$25+B^4-10B^2=25B^2-9B^4$

$e^{x-1}\ge(1+e)^{x-1}$ $\qquad 10B^4-35B^2+5=0$

$\left(\frac{e}{1+e}\right)^{x-1}\ge 1$ $\qquad B^2=1 \qquad B=\pm 1$

$B^2=\frac{5}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)