МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

1) Рассмотрим второе равенство:

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$2\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{17}$$

подставим первое

$$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

2) $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$ по осн. тригоном

$\Downarrow$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

N1 (продолжение)

3) $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$tg\,\alpha$ определ. ⇓ можно сокращать на $\cos\alpha$ и $\cos^2\alpha$

$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} + 5 - 3\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

пусть ~~tg~~ $t = tg\,\alpha$

$3t^2 - 2t - 5 = 0$

$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 5\cdot 4\cdot 3}}{6}$

$t = \frac{2 \pm 8}{6}$

$tg\,\alpha = -1$ $\quad$ $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

$\sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 0$

$tg\,\alpha$ опр. ⇓ можно сокращ. на $\cos^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$

$2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3 + 5\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

пусть $t = tg\,\alpha$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 5\cdot 4\cdot 3}}{10}$

$t = \frac{-2 \pm 8}{10}$

$t = -1$

$tg\,\alpha = -1$ $\quad$ $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

Ответ: $\{-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Сделаем замену $a=y-6$

$b=x-1$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} ab\geq 0 \\ a-6b\geq 0 \\ a^2-13ab+36b^2=0 \end{cases} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \begin{cases} ab \geq 0 \\ a - 6b \geq 0 \\ a^2 - 13ab + b^2 = 0 \end{cases} \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 6b \\ (a-4b)(a-9b) = 0 \end{cases} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array} \right. \end{cases} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array} \right. \end{cases} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array} \right. \\ a \geq 6b \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$a = 4b$ рассмотрим отдельно $a = 9b$

$$\begin{cases} a = 4b \\ a \geq 6b \\ 25b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 9b \\ a \geq 6b \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ a \geq 6b \\ b = \pm\sqrt{\frac{90}{25}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = 1 \\ a = 9b \\ a \geq 6b \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} b = -\sqrt{\frac{18}{5}}; \\ a = -4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1; \\ a = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{18}{5}}; \\ y = 6 - 4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2; \\ y = 15 \end{cases}$$

Ответ: $(x;y) \in \left\{ (2;15), \left(1 - \sqrt{\frac{18}{5}}; 6 - 4\sqrt{\frac{18}{5}}\right) \right\}$

№3 (продолж)

Раз знак равенства достигается единожды, значит производная меняет знак лишь единожды

⇓

у функции (1) не более 2 корней

Заметим, что при $a<1$ $a > a^{\log_5 13}$, т.к. $\log_5 13 > 1$, т.к. $13 > 5$

⇓

функция на интервале $(0;1)$ больше 0

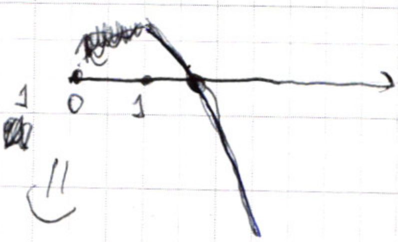
~~Заметим, что и производная~~

Заметим, что при $a \to +\infty$

$$\lim_{a\to+\infty} f(a) = \lim_{a\to+\infty} a^{\log_5 13}\left(\frac{a^{\log_5 12}}{a^{\log_5 13}} + \frac{a}{a^{\log_5 13}} - 1\right) = \lim_{a\to+\infty} a^{\log_5 13}(0+0-1) = -\infty$$

⇓

её вид при $a>0$



⇓

при $a>0$ только 1 корень (2)

подбором получаем $a=25$

$$\left(25^{\log_5 12} - 25^{\log_5 13} + 25 = 144 - 169 + 25 = 0\right)$$

Из (2) следует, что $a \in (0; 25]$ - решения неравенства

$0 < 26x - x^2 \le 25$

$0 > x^2 - 26x \ge -25$

[illegible]

$x^2 - 26x < 0$ | $x^2 - 26x + 25 \ge 0$
$x(x-26) < 0$ | $(x-1)(x-25) \ge 0$
$x \in (0; 26)$ | $x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

⇓ ⇓

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

пусть $a=26x-x^2$, $a>0$, т.к. $\log_5 a$ определен

$$|-a|^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$$

$\log_5 a$ определен $\Rightarrow a>0$

$$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$$

$$a^{\log_5 12}+a \geq a^{\log_5 13}$$

$$a^{\log_5 12}+a-a^{\log_5 13} \geq 0 \quad (1)$$

Вывод формулы "переноса этажей"

$$a^{\log_b c} \vee c^{\log_b a}$$

$\log_a(\ )$

$$\log_a(a^{\log_b c}) \vee \log_a(c^{\log_b a})$$

$$\log_b c \vee \log_b a \log_a c$$

$$\log_b c \vee \log_b c$$

$$\log_b c = \log_b c$$

Рассмотрю производную (1)

$$\log_5 12\, a^{\log_5 12-1}+1-\log_5 13\, a^{\log_5 13}$$

пусть $k_1=\log_5 12$

$k_2=\log_5 13$

$$k_1 a^{k_1-1}+1 \vee k_2 a^{k_2-1}$$

знак равенства достигается единожды

Заметим, что слева степенная функция + const, а ~~слева~~ справа степенная функция с большим показателем, при этом $a>0$ (см. выше)

☐ черновик ☑ чистовик

Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

св-во (1): $f(ab) = f(a) + f(b)$

(2): $f(p) = [p/4]$ для прост. p

1) Определим f для первых 28 натур. чисел:

пропустим 1

$f(2) = 0$ по (2)

$f(3) = 0$ по (2)

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$ по (1)

$f(5) = 1$ по (2)

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$ по (1)

$f(7) = 1$ по (2)

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$ по (1)

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$ по (1)

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$ по (1)

$f(11) = 2$ по (2)

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$ по (1)

$f(13) = 3$ по (2)

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$ по (1)

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$ по (1)

$f(16) = f(2) + f(8) = 0$ по (1)

$f(17) = 4$ по (2)

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$ по (1)

$f(19) = 4$ по (2)

$f(20) = f(2) + f(10) = 1$ по (1)

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$ по (1)

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$ по (1)

$f(23) = 5$ по (2)

$f(24) = f(12) + f(2) = 0$ по (1)

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$ по (1)

$f(26) = f(2) + f(13) = 3$ по (1)

$f(27) = f(3) + f(9) = 0$ по (1)

$f(28) = f(14) + f(2) = 1$ по (1)

2) Заметим, что

$f(2) = f(2) + f(1)$ по (1)

$\Downarrow$

$f(1) = 0$

3) Заметим, что

$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ для любого x на опр. множ.

$f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

$0 = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

№5 (продолжение)

$$4)\ f\left(\frac{x}{y}\right) \overset{\text{по св-ву 1}}{=} f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \overset{\text{см. пункт 3)}}{=}$$
$$= f(x) - f(y)$$

$\Downarrow$

Задача сводится к поиску кол-ва пар x и y удовлетвор. $f(x) - f(y) < 0$

$\Updownarrow$

$f(x) < f(y)$

5) Исходя из приведенных расчетов на первой странице несложно определить ответ, перебрав x:

Например,

для $x = 4 \to y \in \{5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23; 25; 26; 28\} \to$ для $x = 1$ сущ. 16 знач y

Далее буду писать $x = \ldots \to$ кол-во подход. знач y

$x = 5 \to 8$
$x = 6 \to 16$
$x = 7 \to 8$
$x = 8 \to 16$
$x = 9 \to 16$
$x = 10 \to 8$
$x = 11 \to 5$
$x = 12 \to 16$
$x = 13 \to 3$
$x = 14 \to 8$
$x = 15 \to 8$
$x = 16 \to 16$
$x = 17 \to 1$
$x = 18 \to 16$
$x = 19 \to 1$
$x = 20 \to 8$
$x = 21 \to 8$
$x = 22 \to 5$
$x = 23 \to 0$
$x = 24 \to 16$
$x = 25 \to 5$
$x = 26 \to 3$
$x = 27 \to 16$
$x = 28 \to 8$

Не сложно понять, имея данные таблицы, что
$\to 16$ при $f(x) = 0$
$\to 8$ при $f(x) = 1$
$\to 5$ при $f(x) = 2$
$\to 3$ при $f(x) = 3$
$\to 1$ при $f(x) = 4$
$\to 0$ при $f(x) \geq 5$

6) Тогда ответ:

$$16 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$$
$$= 144 + 64 + 15 + 7 = 208 + 22 = 230$$

Ответ: 230

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

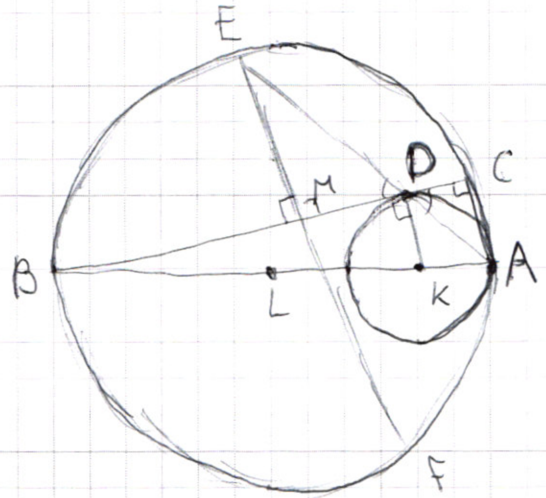
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано:

$CD = 12$

$BD = 13$

Решение:

1) Заметим, что BC - касат. $\Rightarrow \angle BDK = 90^\circ$

2) Заметим, что $\angle BCA$ опирается на диам. $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$

3) Из (1) и (2) следует, что $(EF) \parallel (DK) \parallel (AC)$, т.к. они все $\perp (BC)$

4) $\triangle ACD \sim \triangle EMD$ по 2ум углам, т.к. $\angle EDM = \angle CDA$ как верт и 2 угла по 90°

5) $\frac{DK}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{25}$

6) DK - радиус малой окр.

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ Ответ: $(-3;4)$

$-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b \geq$ ~~парабола~~ $18x^2-51x+28$

гипербола

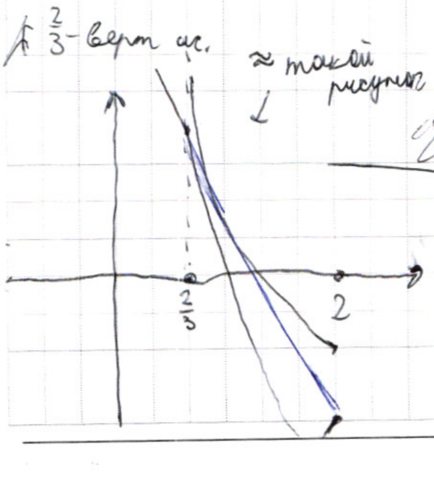
прямая

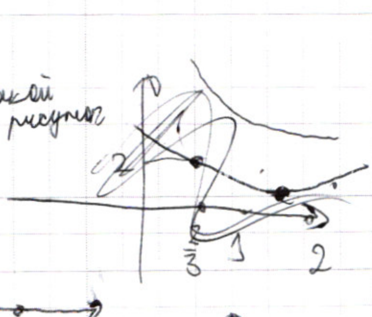
парабола ветви вверх,

$f(2) = -1$

$\frac{2}{3}$ - верт ас.

≈ такой рисунок





$f(x) 7$

$f(\frac{2}{3}) = 8-34+28 =$

$= 2$

$x_в = \frac{51}{36} < 2$

$\vee$

1

$f(2) = 18\cdot 4 - 102 + 28 =$

$= 72 + 28 - 102 =$

$= -2$

$\underbrace{|x^2-26x|}_{a}^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|a|^{\log_5 12} \geq a + 13^{\log_5 -a}$

$b^{\log_5 12} \geq -b + b^{\log_5 13}$

$a < 0$

$b^{\log_5 12} - b^{\log_5 13} + b \geq 0$

$b = -a$

$144 - 169 + 25 \geq 0$

$b^{\log_5 12} \geq -b + 13^{\log_5 b}$

$b = 25$

a^{b^c}

$\frac{1}{12}$

$b^{\log_5 12} + b \geq 13^{\log_5 b}$

$\frac{1}{25}$ $\quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\log_{13} b^{\log_5 12} + b \geq \log_5 b$

$\log_b c = \log_b a \cdot \log_a c$

$b^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 b} - b$

$\log_{13}(b^{\log_5 12} + b) \geq \log_5 b$

$\log_a c$

$\frac{1}{144} - \frac{1}{169} + \frac{1}{25}$

$\log_5 12 \geq \log_1$

$\log_{13} b^{\log_5 12} + \log$

25

$\log$

$5^{\log_5 b^{\log_5 12} + b} \geq 13^b$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{5} =$

$\log_5 12\, a^{\log_5 12 - 1} + 1 - \log_5 13\, a^{\log_5 13 - 1}$

$5^{b^{\log_5 12}} \cdot 5^b \geq 13^b$

$= 231$

$a \quad x^{k_1}$

$\frac{2}{3}k + b = 2 \qquad \frac{2}{3}k - 2 - 2k = 2$

$2k - 6k = 12$

$k = -3$

$2k + b = -2 \Rightarrow b = -2 - 2k \qquad b = 4$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{5}$

$\frac{1}{144} - \frac{1}{169}$

$\boxtimes$ черновик $\quad \square$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos^2 2\beta - 1 = 2\cos^2 2\beta - \sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta =$

$= \sin 2\alpha(-1 + 2\cos^2 2\beta) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta =$

$= -\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta$

$= \sin 2\alpha + 2\cos 2\beta \sin(2\alpha + 2\beta) =$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta +$

$= \sin 2\alpha + 2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\cancel{2\sin 2\alpha} + 2\cos 2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha + \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{17}$

$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} - \sin 2\alpha = \frac{1}{17}$

$\sqrt{17}\cos 2\beta - 17\sin 2\alpha = 1$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$9a^2 + b^2 = \cancel{90}\ \cancel{0}\ 90$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = \cancel{ab}\ 0$

$\cancel{a}\ c^2 - 13c + 36 = 0$

$$\begin{array}{r} -169 \\ 144 \\ \hline 25 \end{array}$$

$c = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}\ 5}{2}$

$c = \cancel{9}\ 4$ $\qquad$ $c = 9$

$\dfrac{a}{b} = 4$

$a = 4b$

$9 \cdot 16 \cdot b^2 + b^2 = 90$

$b^2 = \dfrac{\cancel{90}\ 18}{\cancel{145}\ 29}$

$b = \sqrt{\dfrac{18}{29}}$

$a = 9b$

$81 \cdot 9 = 7\cancel{3}90\ b^2 = 90$

$73b^2 = 9$

$b = \dfrac{3}{\sqrt{73}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

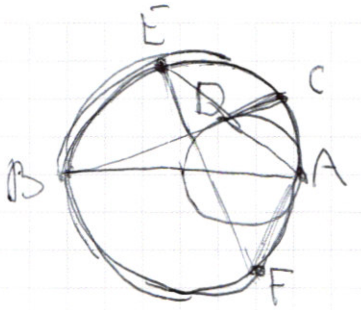
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

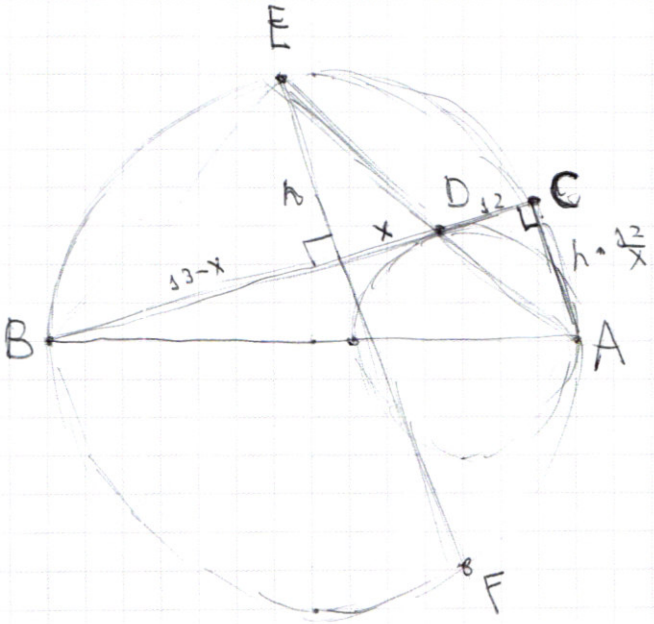
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



CD = 12

BD = 13



$\cancel{(13-x)^2 = x^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ → для простого

$4 \leq x \leq 28$ $4 \leq y \leq 28$ $f(x/y) < 0$

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$
$f(7) =$

1 ; 1 $f(1)$

$f(\frac{1}{4}) = f(\cancel{4} \cdot \frac{1}{4}) =$
$= f(1) + f(1/4)$
$f(1) = 0$

$f(2)$
$f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4})$
$2f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4})$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{f(\frac{1}{4})}{2}$

$f(\frac{1}{2}) + f(2) =$
$= f(1)$
$f(\frac{1}{2}) + 0 = 0$
$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(1) = 0$
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = f(4) + f(2) = 0$
$f(9) = f(3) + f(3) = 0$
$f(10) = f(5) + f(2) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = f(6) + f(2) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = f(2) + f(7) = 1$
$f(15) = f(3) + f(5) = 1$
$f(16) = f(8) + f(2) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = f(9) + f(2) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$

$f(23) = 5$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$
$f(26) = 3$

$f(27) = 0$
$f(28) = 1$

4 ; 4 → $f(1)$
4 ; 5 → $f(\frac{4}{5})$
$f(\frac{4}{5}) =$
$f(\frac{1}{5}) + f(5) = 0$
$f(\frac{1}{5}) = -1$

24 · 24

0 → 16
1 →

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a - 18\sqrt{10-a^2} = \sqrt{3a\sqrt{10-a^2}}$

$a = \sqrt{3a\sqrt{10-a^2}} + 18\sqrt{10-a^2} =$

$= \sqrt{3} + 18$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}$

$-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax + b \geq$

$16 \times 14 = 64$

16

2 24

49

$17^2 - 16 \cdot 14$

$289 - 16 = 273$

$17 \times 17 = 119$, 17, 289

$13 \times 13 = 39$

$\frac{51 \pm \sqrt{9^2 \cdot 17^2 - 18 \cdot 3^2 \cdot 14}}{56}$

$\frac{51 \pm 3 \cdot 7}{56}$

$\frac{51+21}{56}$ $\quad$ $\frac{30}{56}$ $\frac{15}{28}$

$\frac{78}{56}$ $\frac{36}{28}$ $\frac{18}{14}$ $\frac{9}{7}$ $\quad$ $\frac{51}{56}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

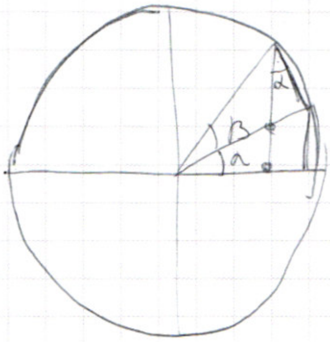
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\underbrace{2\alpha+2\beta}_{a}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta +$

$+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$\frac{1}{17} + \cos^2 a = 1$

$\cos^2 a = \frac{16}{17}$

$\cos a = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) =$

$= \sin -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta +$

$\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta +$

$\cancel{+\sin 2\alpha =}$

$\sin 2\alpha$

$-\cos 2\beta \pm 4\sin 2\beta + \sin 2\alpha =$

$= -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) =$

$= \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta$

$\sin 2\alpha + 3\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha - 5\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\underbrace{\cos 4\beta}_{1+\cos^2 2\beta} + \underbrace{\cos 2\alpha\sin 4\beta}_{\frac{1}{2}\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta}$

$2\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - \frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + \cos 2\beta(\cancel{\sin 2\alpha\cos 2}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y > 6x$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y-6$

$y^2-13xy+36x^2=xy$

$(x(y-6)-(y-6))=$

$=(x-1)(y-6)$ $\qquad y>6x$

$x>1$ $\quad$ $x<1$

$y>6$ $\quad$ $y<6$

$y-6x=y-6-$

$-6(x-1)=$

$=y-6x$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-12ab+b^2=ab$

$a^2-13ab+b^2=0$

$b=\pm\sqrt{90-9a^2}=$

$=\pm3\sqrt{10-a^2}$

$a-18\sqrt{10-a^2}$

$9a^2=90-b^2$

$a^2=10-\frac{b^2}{9}$

$a=\pm\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)