МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\begin{cases} x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$$

$$-5y^2-5xy+5x+20y+10=0$$

$$-y^2-xy+x+4y+2=0$$

$$y^2+xy-x-4y-2=0$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

$t = x^2+18x$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t} \geq 1$$

$\log_{12}t=2 \Rightarrow t=144$

$x^2+18x-144 \leq 0$ $\qquad$ $x^2+18x>0$

По т. Виета $\qquad$ $x(x+18)>0$

$x_1=-24$ $\quad$ $x_2=6$

$(x+24)(x-6) \leq 0$

$+ \quad -24 \quad - \quad 6 \quad +$ $\qquad$ $+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

$x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{-33\cancel{a}+11}{-11+3} \leq \cancel{a} - \frac{11a}{4} + b \leq -\frac{121}{8} - \cancel{\ }$$

33

13

–

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5+5+3+4+5=22$

$12 = \frac{2}{3}\,12$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2-4xy+4y^2=} xy-x-2y+2 \\ x^2+4y^2=5xy-x-2y+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x=12-x^2-9y^2+18y \end{cases} \Rightarrow 4x=-12+x^2+9y^2-18y$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 4\beta\cos 2\alpha = (1-\cos^2 4\beta)\cos 2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 2\alpha\cos^2 4\beta =$

Формула понижения??? $\cos^2\alpha =$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}\right\} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} - \sin(2\alpha+4\beta)$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

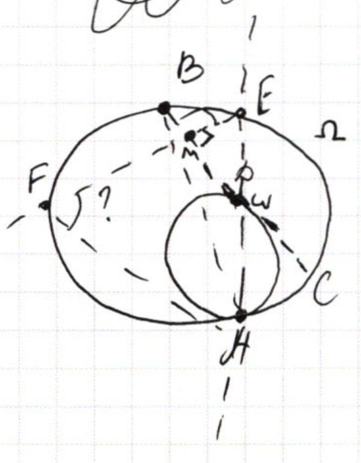
$\left(-\frac{4}{5}-\sin(2\alpha+4\beta)\right)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{121}{16} - \frac{121}{8}$

$- \frac{30 \cdot 11}{4}$

330 | 4
28 | 712
~~50~~
10



AB - диаметр Ω

BC - хорда Ω

Найти: r_Ω, r_ω

CD = 8

BD = 17 ∠EFA - ?

CB = 17+8 = 25

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

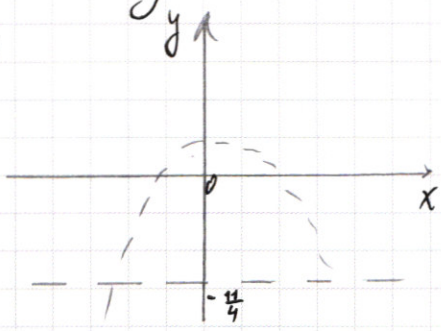
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

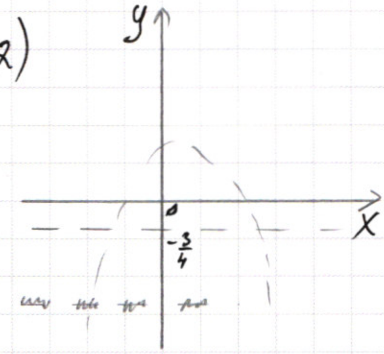
№ 6

Необходимо найти прямые, которые на данном полуинтервале находятся под параболой. Значит, полученный отрезок в силу выпуклости параболы должен находиться ниже отрезка, который соединяет точки, в которых прямые $x = -\frac{11}{4}$ и $x = -\frac{3}{4}$ пересекают параболу, подставляя в уравнение получаем точки $y = 1$

1)



2)



Найдем уравнение этой прямой, получим

$5 = -\frac{11}{4}\cdot k + b$

$1 = -\frac{3k}{4} + b$

Вычитая $k = -2$ подставим $b = -0,5$, значит все отрезки находятся под ним на уровне отрезка $y = -2x - \frac{1}{2}$, для x в полуинтервале $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, но заметим, что на данном отрезке гипербола всегда ниже прямой $y = -2x - \frac{1}{2}$.

Действительно, $\frac{12x+11}{4x+2} \le -2x - \frac{1}{2}$, умножим на знаменатель, т.к. он меньше 0

$12x+11 \geq (4x+3)(-2x-0,5)$

$(x+1,25)^2 \geq 0$

Значит нельзя взять отрезок ниже прямой $y=-2x-\frac{1}{2}$, поскольку тогда такой отрезок будет находиться ниже касательной к гиперболе и будет ее пересекать $\Rightarrow a=-2$, $b=-0,5$

Ответ: $a=-2$, $b=-0,5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Возведём в квадрат первое равенство, с учётом, что левая часть неотрицательна. Также дополним второе равенство до полных квадратов

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy-x-2y+2 \\ x-2y \geq 0 \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9 \end{cases}$$

Рассмотрим первое равенство, оно эквивалентно

$$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$$

Оно раскладывается произведением $(x-y-1)(x-4y+2)=0$

Таким образом, получается система:

$$\begin{cases} (x-y-1)(x-4y+2)=0 \\ (x-2y)\geq 0 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

Сделаем замену $a=x-2$, $b=3y-3$, то есть $x=a+2$, $y=\frac{b}{3}+1$

$$\begin{cases} \left(a+2-\frac{b}{3}-1-1\right)\left(a+2-\frac{4b}{3}-4+2\right)=0 \\ a+2-\frac{2b}{3}-2\geq 0 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$$

сл. стр

$$\begin{cases} \left(a-\frac{b}{3}\right)\left(a-\frac{4b}{3}\right)=0 \\ a-\frac{2b}{3}\geq 0 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$$

Рассмотрим каждое равенство на графике с осями ab

1) $\left(a-\frac{b}{3}\right)\left(a-\frac{4b}{3}\right)=0$

Две прямые, проходящие через точку 0 с коэффицентами 3, $\frac{3}{4}$

2) $\left(a-\frac{2b}{3}\right)\geq 0$

Полуплоскость под прямой, проходящей через 0 с коэф. $\frac{3}{2}$

3) $a^2+b^2=25$

Окружность с центром 0 и радиусом 5. Прямая из второго уравнения проходит между прямыми из первого, таким образом, из прямой с коэф. 3 нужно взять решение с отрицательным a. Из прямой с коэф. $\frac{4}{3}$ - с положительным.

Найдем пересечение прямых первого уравнения окружностью: $\frac{b^2}{9}+b^2=25$

$b=\pm\sqrt{\frac{25\cdot 9}{10}}=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}$.

$a=\pm \cdot \frac{\sqrt{\frac{45}{2}}}{3}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Следовательно, нам подходит решение $a, b = -\sqrt{\frac{5}{2}}$, $-\sqrt{\frac{45}{2}}$

$\frac{16b^2}{9}+b^2=25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

Пусть $t = x^2+18x$, тогда

$$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

По свойству логарифма:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$ → модуль убрали т.к. из $5^{\log_{12}t} \Rightarrow t > 0$

Поделим всё на $13^{\log_{12}t} \neq 0$:

$$\underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t}} \geq 1$$

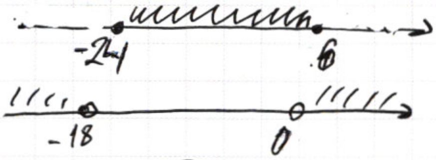
при возрастании t $\log_{12}t$ растёт,

а левая часть убывает т.к. равенство при

$\log_{12}t = 2 \Rightarrow t = 144$

Неравенство верно только для $0 < t \leq 144$.

$$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+24)(x-6) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№ 5

Посчитаем значение простых чисел $f(2), f(3) = 0$; $f(5), f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17), f(19) = 4$, $f(23) = 5$. Зная эти значения, их соотношение $f(ab) = f(a) + f(b)$, можем посчитать значения во всех натур. чисел

$f = 0$ в 1 (т.к. $f(11) = f(1) + f(1)$), 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18 и 24

$f = 1$ в 10, 14, 15, 20, 21

$f = 2$ в 22

Итого, на отрезке от 1 до 24 функция принимает значение 0 одиннадцать раз, значение 1 - 7 раз, значение 2 - 2 раза, значения 3 - 1 раз, значение 4 - 2 раза, значение 5 - 1 раз. Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$, то есть $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Разобьем тогда все пары на (x, y) и (y, x), из них либо для обеих $f = 0$, либо $f = 0$ для одной f принимает отриц. значение $\Rightarrow$ нам нужно вычесть из общего кол-ва пар (x, y) - кол-во пар, для которых $f(x) = f(y)$ и оставшееся кол-во поделить на 2, это и будет искомое кол-во пар. Получаем

$$\left(\frac{(24\cdot23 - 11\cdot10 - 7\cdot6 - 2\cdot1 - 2\cdot1)}{2}\right) = \frac{(552 - 110 - 42 - 4)}{2} = 198$$

Ответ: 198.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Преобразуем нижнее уравнение по формуле суммы синусов:

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

Подставляем сюда первое уравнение получим:

$$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

Тогда $\sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Рассмотрим 1 уравнение:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha) \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin(2\alpha) \pm \cos(2\alpha) = -1$$

Здесь знак $\pm$ зависит от знака $\sin(2\beta)$. Пусть $\sin(2\beta) = +\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда $2\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha) = -1$. Раскроем по формулам двойного угла, применим основное тригонометрическое тождество:

$$4\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) = -\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

$$4\sin(\alpha)\cos(\alpha)+2\cos^2(\alpha) = 0$$

$(2\sin(\alpha)+\cos(\alpha))\cos(\alpha)=0$

Так как $tg(\alpha)$ определён, то $\cos(\alpha)\neq 0$,

получаем $2\sin(\alpha)+\cos(\alpha)=0$

$$tg(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=-0,5$$

Пусть $\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда $2\sin(2\alpha)-\cos(2\alpha)=-1$.

Раскроем по формулам двойного угла, применим основное тригонометрическое тождество:

$$4\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=-\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

$4\sin(\alpha)\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)=0$

$(\sin(\alpha)+2\cos(\alpha))\sin(\alpha)=0$

если $\sin(\alpha)=0$, то $tg(\alpha)=0$, иначе $\sin(\alpha)+$
$+2\cos(\alpha)=0$

$$tg(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=-2$$

Итого, получается 3 возможных значения $tg(\alpha)$

Ответ: $tg(\alpha)=0$, $tg(\alpha)=-0,5$, $tg(\alpha)=-2$.

№ 2 (продолжение)

$b=\pm\sqrt{\frac{25\cdot 9}{25}}=\pm 3$

$a=\pm 4$

$\Rightarrow$ Нам подходит решение $a,b=4,3$

Сделаем обратную замену, получается, что решения $x,y=\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2,\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$ либо $(6,2)$

Ответ: $x,y=\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2,\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$ либо $(6,2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)