МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10:20.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36-3$

14:20. 13:00. $\frac{3}{4}$: 0,75.

при $x=\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2} \le \frac{a}{4}+b \le -2+9-3$

$\frac{1}{2} \le \frac{a}{4}+b \le 4$;

140 минут.

$\frac{1}{2} \le 3,75 \le 4$

12:00 $\Rightarrow$ 14:20 $\Rightarrow$ 2:20

при $x=1$: $0 \le a+b \le -3$ не имеет смысла $\Rightarrow$

„1"- не входит в промежуток $\boxed{\frac{1}{4};1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4};1)}$

$\Downarrow$

верный промежуток.

$\Downarrow$

№6

при $x=\frac{1}{4}$ и если $b=0$,

то $a \in [2;16]$

~~если же $b \neq 0$~~ $\Rightarrow$ ~~a и $b \in [2;4]$~~.

если же $a=0$, то $\Rightarrow a$ и $b \in [2;4)$

$b \in [\frac{1}{2};4]$.

$0,5+2=2,5$.

при $(\frac{1}{4})$: $\frac{1}{2} \le \frac{a}{4}+b \le 4$. a и b будут $\in [2;4)$.

$10x+(x^2-10x)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{-\log_3(10x-x^2)}$

$24 \cdot 2^5$

~~$10x+\{x^2-10x\}$~~

$10x+(x^2-10x)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{-\log_3(10x-x^2)}$

$10x+(-x^2+10x)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

1) $10x+(x^2-10x)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

2) $10x+(-x^2+10x)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{(10x-x^2)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}}$

1) $\cancel{10x+(x^2-10x)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}}$

2) $\cancel{10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}}$

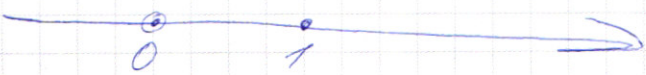
$\cancel{10x+}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t}+\left(\frac{21}{5}\right)^{\log_3 t} \ge 1$

$\log_3 t = 2$

$0<t\le 9 \Rightarrow \begin{cases}10x-x^2\le 9\\ 10x-x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-9)(x-1)\ge 0\\ x(x-10)<0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \quad \uparrow^2 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$x^2-12x+36y^2-36y=45$$

$$\cancel{x(x-12)+36y(y-1)=45}$$

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-26xy-x=-144y^2-12y+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-26xy-x=-144y^2-12y+6 \\ x^2-12x-45=-36y^2+36y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-26y-1)=-12\left(12y^2-y-\frac{1}{2}\right) \\ x^2-12x-45=-36y^2+36y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-26y-1)=-12\left(12y^2-y-\frac{1}{2}\right) \\ x^2-12x-45=-36y(y-1) \end{cases}$$

или $a+b=n=2$

48

$0\le z\le -3$ не удовлетвор.

$16\cdot\frac{8}{10}$

$16\cdot\frac{4}{5}=\frac{64}{5}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{12xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \quad \uparrow^2$$

$(x+y)^2$ или $(x-y)^2$

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2,7^2$

$+3$

$8,1$

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2-6=2xy-12y-x \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$8 : 3 = 2,66$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2-6=-12y-x \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

б) $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $\quad [\frac{1}{4}; 1]$

$\frac{4-6}{-4}=\frac{1}{2}$

$36 : 4 = 9$

при $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2} \le \frac{a}{4}+b \le -2+9-3$

$\frac{1}{2} \le \frac{a}{4}+b \le 4$ $\quad$ - если $a=0$, то $b \in [\frac{1}{2}; 4]$

если $b=0$, то $a \in [2; 16]$

при (1) $\quad 0 \le a+b \le -3$ - это невозможно.

$32 \times 0,81$

3200×81

3200

256

$2,59200$

$32,6.$

~~при (0)~~ ~~$\frac{-16}{-5}$ $b = -3$ не имеет смысла~~

при $(\frac{1}{2})$ $\quad \frac{8-16}{2-5} \le \frac{a}{2}+b \le$ ~~$-16+16$~~ $-9+18-3$

$\frac{-8}{-3} \le \frac{a}{2}+b \le 6$

$\approx 2,666$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зад №3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$;

$10x+|10x-x^2|^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$;

$(10x-x^2)+|10x-x^2|^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3(10x-x^2)}$;

$10x-x^2>0$ (т.к $5^{\log_3(10x-x^2)}$);

1) Допустим: $10x-x^2=t$; (следовательно, т.к

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$);

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t} \ge 5^{\log_3 t}$;

$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t}}_{f(t)} \ge 1$;

$f(t)$ - убывает.

2) Замечаем, что при $\log_3 t=2$ - достигается равенство,

$\Rightarrow$ Решение: $0<t\le 9$

$\begin{cases} 10x-x^2\le 9 \\ 10x-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)(x-1)\ge 0 \\ x(x-10)<0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x\in(0;1]\cup[9;10)}$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

с окружностью.

① $a^2+\frac{9a^2}{16}=90$

$a=\pm\sqrt{90\cdot\frac{16}{25}}=\pm\frac{12}{5}\cdot\sqrt{10}$

$b=\pm\frac{9}{5}\cdot\sqrt{10}$

Нам подходит решение $a, b=-\frac{12}{5}\sqrt{10}; -\frac{9}{5}\sqrt{10}$.

② $a^2+\frac{a^2}{9}=90$

$a=\pm\sqrt{90\cdot\frac{9}{10}}=\pm\sqrt{81}=\pm 9$

$b=\pm 3$

Подходит: $a, b = 9, 3$.

В конечном итоге можно провести обратную замену, и получить решение:

1) $x, y=\left(-\frac{12}{5}\sqrt{10}+6; -\frac{3}{10}\cdot\sqrt{10}+\frac{7}{2}\right)$; или $(15; 1)$.

Ответ: $x, y\left(-\frac{12}{5}\sqrt{10}+6; -\frac{3}{10}\cdot\sqrt{10}+\frac{7}{2}\right)$ или $(15; 1$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зад. №2

1) $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \quad \uparrow^2 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$ $\quad \sqrt{2xy-12y-x+6}\geq 0.$

$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x+36y=45 \end{cases}$

Дополнем второе равенство до полных квадратов:

$\begin{cases} (x-12y)^2=2xy-12y-x+6 \\ x-12y\geq 0 \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9. \end{cases}$

2) если рассмотреть первое равенство оно будет ~~20~~ эквивалентно: $x^2-26xy+x+144y^2+12y-6=0;$

Данное выражение можно разложить, как:

$(x-18y+3)(x-8y-2)=0;$

$\Downarrow$

(обновим систему)

$\begin{cases} (x-18y+3)\cdot(x-8y-2)=0; \\ x-12y\geq 0; \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$

3) Замена: $a = x-6$, $b = 6y-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a+6$; $y = \frac{b}{6} + \frac{1}{2}$;

$$\begin{cases} (a+6-3b-9+3)\cdot\left(a+6-\frac{8b}{6}-4-2\right)=0 \\ a+6-2b-6 \geq 0 \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-3b)\left(a-\frac{4b}{3}\right)=0 \\ a-2b \geq 0 \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

4) Если рассмотреть равенства на графике с осями a, b − то получим:

① $(a-3b)\cdot\left(a-\frac{4b}{3}\right)=0$ (две прямые, проходящие через точку „0" с коэф. $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$.);

② $a-2b \geq 0$ (полуплоскость под прямой, которая проходит через точку „0" с коэф. $\frac{1}{2}$.)

③ $a^2+b^2=90$ (окружность с центром в точке „0" и радиусом $3\sqrt{10}$);

Из второго неравенства прямая проходит между прямыми из первого неравенства − из этого следует, что из прямой с коэф. $\frac{3}{4}$, нужно брать решение с отрицательным a.
Из прямой с коэф. $\frac{1}{3}$, с положительным.
Находим пересечение прямых из первого ур.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зад №1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{2}{5};$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Рассматриваем первое уравнение: $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin(2\alpha) \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}};$

$$\sin(2\alpha)\pm 2\cos(2\alpha) = -1$$

Методом подстановки: допустим $t = tg\alpha$.

$$\frac{2t}{t^2} \pm \frac{2(1-t^2)}{t^2} = -1$$

$$2t \pm 2(1-t^2) = -1-t^2$$

$(t+1)^2 \pm 2(1-t)(1+t)=0$

$(t+1)(t+1\pm 2(1-t))=0$

Получаем корень $tg\alpha=-1$

① Если $\sin(2\beta)=\frac{+2}{\sqrt{5}}$; то

$t+1+2(1-t)=3-t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корень $tg\alpha=3$

② если $\sin(2\beta)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; то

$t+1-2(1-t)=3t-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корень $tg\alpha=\frac{1}{3}$ (других корней нет.)

Ответ: Всего знач. $tg\alpha$. $tg\alpha=-1, \frac{1}{3}, 3.$

Зад №5.

Рассмотрим знач. в простых числах.

$f(2), f(3) = 0;$ $\qquad f(23) = 5$

$f(5), f(7) = 1;$ $\qquad f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(11) = 2;$

$f(13) = 3;$ $\qquad f(p) = [\frac{p}{4}]$

$f(17); f(19) = 4;$

---

1) $f = 0$ в: 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24;

$f = 1$ в: 10, 14, 15, 20, 21;

$f = 2$ в: 22, 25;

2) $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y).$

Заметим это, разбиваем все пары на (x,y) и (y,x) – у этих пар либо для двух $f = 0$, либо исключительно для одной f - принимает отрицательное значение; чтобы найти кол-во пар, нужно у общего кол-ва пар (x,y), кол-во пар, для которых $f(x) = f(y)$, а

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

то кол-во, которое осталось разделим на два.
Посредством вычислений получим:

$$\frac{(24\cdot 23-10\cdot 9-7\cdot 6-3\cdot 2-2\cdot 1)}{2}=\frac{(552-90-42-8)}{2}=$$

$$=206.$$

Ответ: 206.