МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5} \end{cases} \to \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (2): Подставим $\sin(2\alpha+2\beta)$ из (1)

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos2\beta=-\frac{2}{5} \to \cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$$

Решим, используя полученные результаты, уравнение (1):

$$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{1}{\sqrt5}\sin2\alpha\pm\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\pm2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha=0 \end{array}\right.$$

Поделим обе части уравнение на $\cos^2\alpha$ (по условию $tg\,\alpha$ определён $\to \cos^2\alpha\neq0$):

$$\left[\begin{array}{ll} -tg^2\alpha+2tg\,\alpha+3=0 & (3) \\ 3tg^2\alpha+2tg\,\alpha-1=0 & (4) \end{array}\right.$$

Решим каждое из уравнений:

(3): $D=4+12=16 \to tg\,\alpha=\frac{-2\pm4}{-2}=\left[\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right.$

(4): $D=4+12=16 \to tg\,\alpha=\frac{-2\pm4}{6}=\left[\begin{array}{l}\frac13\\-1\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=3 \\ tg\,\alpha=\frac13 \\ tg\,\alpha=-1 \end{array}\right.$$

Получаем 3 значение для $tg\,\alpha$. По условию их не менее трёх $\Rightarrow$ все найденные значение подходят.

Ответ: $3;\ \frac13;\ -1$.

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \to \begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x^2-12x+36)-36+(36y^2-36y+9)-9=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Обозначим: $(x-6)=a$; $(2y-1)=b$

Получаем: $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ ОДЗ: $ab\geq 0$

Т.к. $\sqrt{ab}\geq 0$, $(a-6b)\geq 0$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \quad (*) \\ a^2+9b^2=90 \quad (**) \end{cases}$$

Решим $(*)$ относительно a:

$$D=169b^2-144b^2=25b^2 \to a=\frac{13b\pm 5b}{2}=\left[\begin{array}{l} 9b \\ 4b \end{array}\right.$$

1) Если $a=9b$. Подставим в $(**)$:

$81b^2+9b^2=90 \to b=\pm 1 \to a=\pm 9$

Проверим решение:

1. $a=9$, $b=1$: $9\cdot 1\geq 0$ — верно, $\overset{9-6\cdot 1}{\cancel{a-6b}}\geq 0$ — верно
2. $a=-9$, $b=-1$: $(-9)\cdot(-1)\geq 0$ — верно, $-9-6\cdot(-1)\geq 0$ — неверно

$\Longrightarrow$ подходит только $a=9$, $b=1$

2) Если $a=4b$. Подставим в $(**)$:

$16b^2+9b^2=90 \to b^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5} \to \cancel{b=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}}, \cancel{\to a=\pm\frac{16}{\sqrt{5}}}$

$b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \to a=\pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

Проверим решение:

~~1. $a=\frac{16}{\sqrt{5}}$, $b=\frac{4}{\sqrt{5}}$: $\frac{16}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\geq 0$ — верно, $\frac{16}{\sqrt{5}}-6\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\geq 0$ — неверно~~

~~2. $a=-\frac{16}{\sqrt{5}}$, $b=-\frac{4}{\sqrt{5}}$: $\left(-\frac{16}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ — верно,~~

1. $a=12\sqrt{\frac{2}{5}}$, $b=3\sqrt{\frac{2}{5}}$: $\left(12\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot 3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\geq 0$ — верно, $12\sqrt{\frac{2}{5}}-6\cdot 3\sqrt{\frac{2}{5}}\geq 0$ — неверно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $a=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$, $b=-3\sqrt{\frac{2}{5}}$: $\left(-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\cdot\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\geq 0$ – верно,
$-12\sqrt{\frac{2}{5}}-6\cdot\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\geq 0$ – верно

Получаем: $\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 2y-1=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow (15;1)$ и $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$ – решение.

Ответ: $(15;1)$, $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$.

№3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

$x(x-10)<0 \to x\in(0;10)$

По ОДЗ $(10x-x^2)>0 \Rightarrow (10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$

Заменим: $(10x-x^2)=t$

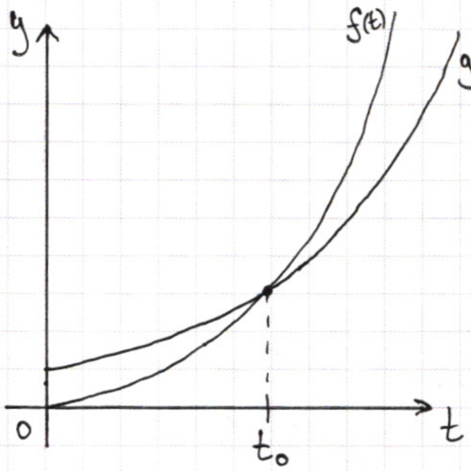
$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0$

$t\left(1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}\right)\geq 0$

$t>0$ по ОДЗ $\Rightarrow 1+t^{\log_3\frac{4}{3}}\geq t^{\log_3\frac{5}{3}}$ $(*)$

Обозначим: $g(t)=1+t^{\log_3\frac{4}{3}}$, $f(t)=t^{\log_3\frac{5}{3}}$

Построим графики функций $y=f(t)$ и $y=g(t)$. ~~в осях~~



Т.к. $\log_3\frac{5}{3} > \log_3\frac{4}{3}$, то графики имеют только одну точку пересечения. Найдём её:

$$1+t_0^{\log_3\frac{4}{3}} = t_0^{\log_3\frac{5}{3}}$$

~~Заметим, что:~~ $\cancel{1+3\cdot\frac{4}{3}=3\cdot\frac{5}{3}}$

~~Значит,~~ $\cancel{t_0=3^3=27}$

Заметим, что: $1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Longrightarrow t_0=3^2=9$

Имеем неравенство (*): $g(t)\geq f(t) \Longrightarrow t\in(0;9]$

Получаем: $-x^2+10x\leq 9$

$$x^2-10x+9\geq 0$$

Решим: $x^2-10x+9=0$

$$D=100-36=64 \to x=\frac{10\pm 8}{2}=\left[\begin{array}{l}9\\1\end{array}\right.$$

Значит, $x^2-10x+9\geq 0$ при $x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$

По ОДЗ: $x\in(0;10) \Longrightarrow x\in(0;1]\cup[9;10)$

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leq ax+b\leq -32x^2+36x-3$$

1) $\frac{16x-16}{4x-5}=\frac{4(4x-5)+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$

Обозначим: $f(x)=4+\frac{4}{4x-5}$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=3$, $f(1)=0$

~~Найдём f~~

2) $-32x^2+36x-3$ Обозначим: $g(x)=-32x^2+36x-3$

Вершина параболы: $x_в=\frac{-36}{-64}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$

$$y_в=-32\cdot\frac{9^2}{16^2}+36\cdot\frac{9}{16}-3=-\frac{9^2\cdot 2}{16}+\frac{9^2\cdot 4}{16}-\frac{48}{16}=$$
$$=\frac{9^2\cdot 2-48}{16}=\frac{81-24}{8}=\frac{57}{8}$$

$g\left(\frac{1}{4}\right)=4$, $g(1)=1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Построим графики $f(t)$ и $g(t)$: (при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$):

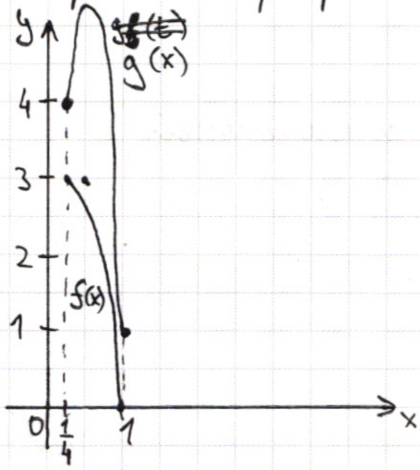


График $y = ax+b$ — прямая

Докажем, что прямая, ~~что~~ проходящая ~~через~~ через точки $(1; 1)$ и $(\frac{1}{4}; 4)$ — касательная к $f(x)$.

Найдём уравнение такой прямой:

$$\begin{cases} 1 = a+b \rightarrow b = 1-a \\ 4 = \frac{a}{4} + b \rightarrow 4 = \frac{a}{4} + 1 - a \rightarrow 3 = -\frac{3}{4}a \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 5 \end{cases}$$

Получаем: $y = -4x+5$

Найдём точки пересечение с $f(x)$:

$$4 + \frac{4}{4x-5} = -4x+5$$

$$\frac{(4x-5)^2 + 4(4x-5) + 4}{4x-5} = 0$$

$$\frac{((4x-5)+2)^2}{4x-5} = 0$$ — данное уравнение имеет только одно решение ($x = \frac{3}{4}$)

$\Rightarrow y = -4x+5$ — касательная к $f(x)$

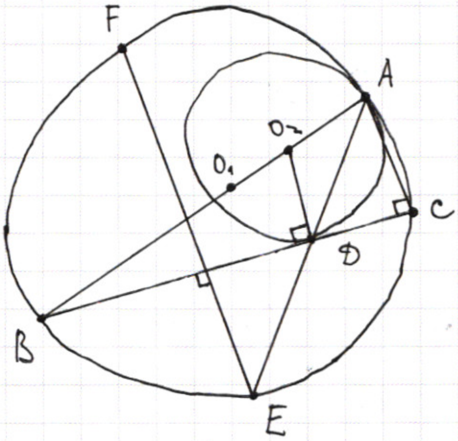
~~1. Если ~~уве~~ уменьшать a или увеличивать b перестанет выполняться условие $ax+b \le g(x)$~~

~~2. Если увеличивать a~~

Если изменять a или b прямая начнёт пересекать либо $f(x)$, либо $g(x)$ $\Rightarrow$ $a = -4$, $b = 5$ — единственное решение.

Ответ: $(-4; 5)$.

N5.



Пусть O_1 – центр Ω (R – радиус), O_2 – центр ω (r – радиус).

1. Т.к. Ω и ω касаются, то их центры лежат на одной прямой (радиусы перпендикулярны одной и той же касательной) $\Rightarrow$ O_1 и O_2 лежат на AB.

2. $\angle BDO_2 = 90^\circ$ (радиус перпендикулярен касательной)

$\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

$\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_2D}{AC}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}} = \frac{r}{AC} \rightarrow 1 - \frac{r}{2R} = \frac{r}{AC} = \frac{17}{32}$

$\frac{r}{2R} = 1 - \frac{17}{32} = \frac{15}{32}$

3. $\triangle BDO_2$: $\cancel{BO_2^2 + BD^2} = BD^2 + O_2D^2 = BO_2^2$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$\frac{17^2}{4} + r^2 = \left(\frac{32}{15}r - r\right)^2$

$\frac{17^2}{4} + r^2 = \frac{17^2}{15^2}r^2 \rightarrow \frac{17^2}{4} = r^2\,\frac{(17-15)(17+15)}{15^2}$

$\frac{17^2}{4} = r^2\,\frac{64}{15^2} \rightarrow r^2 = \frac{17^2 \cdot 15^2}{2^2 \cdot 8^2} \rightarrow r = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$

$R = \frac{32}{2 \cdot 15}r = \frac{32}{30} \cdot \frac{255}{16} = \frac{255}{15} = \frac{51}{3}$

4. $\angle AFE = \angle ABE$

Обозначим: $\angle ABC = \alpha$, $\angle DBE = \beta \Rightarrow \angle ABE = \alpha + \beta$

$tg\alpha = \frac{O_2D}{BD} = \frac{r}{\frac{17}{2}} = \frac{2 \cdot 255}{17 \cdot 16} = \frac{15}{8}$

$tg\angle ADC = tg(90^\circ - \beta)$ (т.к. $\angle AEB = 90^\circ$ (опирается на диаметр))

$tg(90^\circ - \beta) = \frac{AC}{CD} = \frac{\frac{32}{17}r}{\frac{15}{2}} = \frac{32 \cdot 2}{17 \cdot 15} \cdot \frac{255}{16} = 4 \rightarrow tg\beta = \frac{1}{4}$

$\cancel{\rightarrow tg}$ $tg\angle ABE = tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \frac{\frac{15}{8} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{17}{8}}{\frac{17}{32}} = 4$

$\rightarrow \angle AFE = arctg\, 4$

Ответ: радиус $\Omega = \frac{51}{3}$; радиус $\omega = \frac{255}{16}$; $\angle AFE = arctg\, 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (1)\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ (2)\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$+\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\ \ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(2): $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \to \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \to \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

(1): $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \to \sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

~~$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$~~

~~$2\cos\alpha(\pm 2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$~~

~~$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \to \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\sin\alpha+\cos\alpha = 0 \\ -2\sin\alpha+\cos\alpha = 0 \end{array}\right.$~~

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0 \\ 3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$D = 4+12 = 16 \to tg\alpha = \frac{2\pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$

$D = 4+12 = 16 \to tg\alpha = \frac{-2\pm 4}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ -1 \end{array}\right.$

$\boxed{3; \frac{1}{3}; -1}$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$x \geq 12y;\ 2xy - 12y - x + 6 > 0$

$\to (x^2-12x+36) + (36y^2-36y+9) = 90$ ~~$\to (x-6)^2+(y-3)^2$~~

~~$\to \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ Проверим: $6 - 12\cdot 3$~~

$\to (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$x^2 - 24y + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 = 2y(x-6) - (x-6) = (x-6)(2y-1)$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$x - 6 = a \quad 2y - 1 = b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2 \to a = \frac{13b\pm 5b}{2} = \left[\begin{array}{l} 9b \\ 4b \end{array}\right.$

$81b^2 + 9b^2 = 90 \to b = \pm 1 \to a = \pm 9$

$16b^2 + 9b^2 = 90 \to b^2 = \frac{90}{25} = \frac{16}{5} \to b = \pm\frac{4}{\sqrt{5}} \to a = \pm\frac{16}{\sqrt{5}}$

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$10x-x^2>0$ $\quad a^{\log_b c}=a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}}=c^{\frac{1}{\log_a b}}=c^{\log_b a}$

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$$

$$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0 \qquad t(1+t^{\log_3 \frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}})\geq 0$$

$$t^{\log_3\frac{5}{3}}-t^{\log_3\frac{4}{3}}\leq 1$$

$\begin{cases} a-6b\geq 0\\ ab\geq 0\end{cases}$

1. $a=9;b=1$: $9-6\geq 0$ ✓ $9\geq 0$ ✓
2. $a=-9;b=-1$: $-9+6\geq 0$ ✗ $9\geq 0$ ✓
3. $a=\frac{16}{\sqrt5};b=\frac{4}{\sqrt5}$: $\frac{16}{\sqrt5}-\frac{24}{\sqrt5}\geq 0$ ✗ ✓
4. $a=-\frac{16}{\sqrt5};b=-\frac{4}{\sqrt5}$: $-\frac{16}{\sqrt5}+\frac{24}{\sqrt5}\geq 0$ ✓ ✓

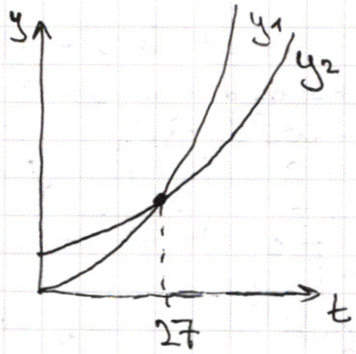
$(9;1)$
$(-\frac{16}{\sqrt5};-\frac{4}{\sqrt5})$

$\to\begin{cases}x-6=9\\2y-1=1\end{cases}\to\begin{cases}x=15\\y=1\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x-6=-\frac{16}{\sqrt5}\\2y-1=-\frac{4}{\sqrt5}\end{cases}\to\begin{cases}x=6-\frac{16}{\sqrt5}\\y=\frac12-\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$

$$3^{\log_3 t^{\log_3\frac{5}{3}}}-3^{\log_3 t^{\log_3\frac43}}\leq 1$$

$$\left(\frac53\right)^{\log_3 t}-\left(\frac43\right)^{\log_3 t}\leq 1$$

$t^{\log_3(3-\frac{4}{3})}-t^{\log_3\frac43}$ $\cancel{=t^{\frac{\log_3 3}{\log_3\frac53}}-t^{\log_3\frac43}}=\cancel{t^{\frac{1}{\log_3\frac53}}-t^{\log_3\frac43}}=\cancel{t^{\log_{\frac53}3}-t^{\log_{\frac43}3}}$



$y_1(t)=t^{\log_3\frac53}$

$y_2(t)=t^{\log_3\frac43}+1$

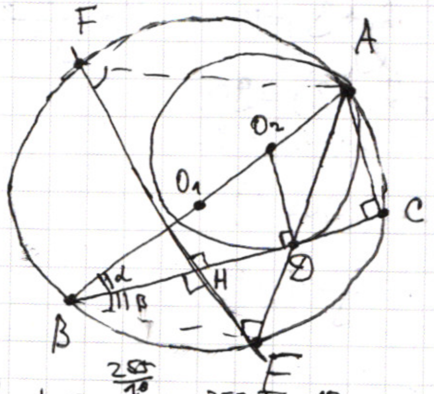
$\to t\in[0;27]$

$t^{\log_3\frac53}=t^{\log_3\frac43}+1$

$t=3^3\to\frac53\cdot3=\frac43\cdot3+1$

$10x-x^2\leq 27$
$x^2-10x+27\geq 0$
$D=100-4\cdot27=100-108<0$

$10x-x^2>0$
$x(x-10)<0$
$\to x\in(0;10)$



$CD=\frac{15}{2}$

$BD=\frac{17}{2}$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{BD}{BD+CD}=\frac{r}{AC}=\frac{17}{32}$

$1-\frac{r}{2R}=\frac{17}{32}\to\frac{r}{2R}=\frac{15}{32}$

$AB^2=BC^2+AC^2\to 4R^2=16^2+\left(\frac{32}{17}r\right)^2$

$\left(\frac{32}{15}r\right)^2-\left(\frac{32}{17}r\right)^2=16^2$

$\frac{17^2\cdot32^2-15^2\cdot32^2}{15^2\cdot17^2}r^2=16^2\to\frac{32^2\cdot2\cdot32}{15^2\cdot17^2}r^2=16^2$

$\to r^2=\frac{15^2\cdot17^2\cdot16^2}{32^2\cdot8^2}\to r=\frac{15\cdot17\cdot16}{32\cdot8}=\frac{255}{16}\to R=\frac{32r}{30}=$

17
×15
85
17
255

$tg\alpha=\frac{\frac{255}{16}}{\frac{17}{2}}=\frac{255\cdot2}{16\cdot17}=\frac{15}{8}$

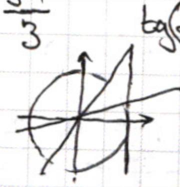
$tg(90^\circ-\beta)=\frac{\frac{32}{17}\cdot\frac{255}{16}}{\frac{15}{2}}=\frac{30\cdot2}{15}=4$

$=\frac{32^2\cdot255}{16\cdot30}=\frac{51}{3}$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}$

$tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$

$=\frac{ctg\beta-ctg\alpha}{ctg\alpha\, ctg\beta+1}$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

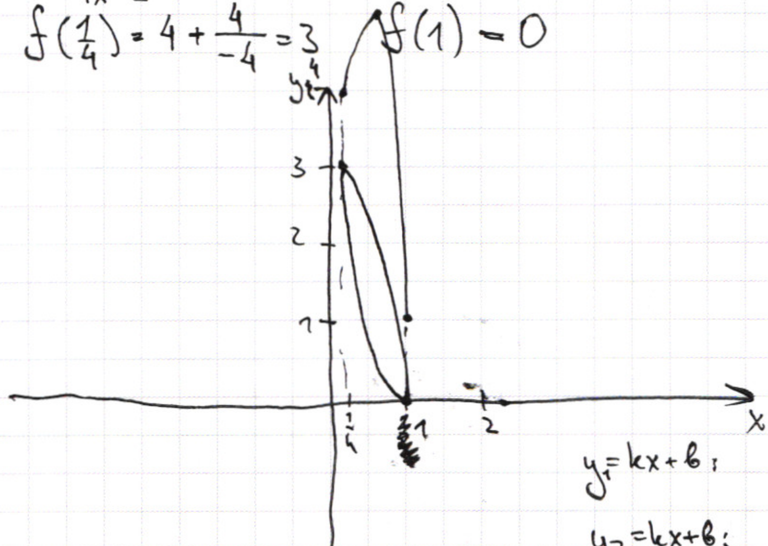
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 + \frac{4}{-4} = 3$ $\quad f(1) = 0$



$y_1 = kx+b:$ $\begin{cases} 3 = \frac{k}{4}+b \to 3 = -\frac{3}{4}k \to k=-4 \\ 0 = k+b \to b=-k \to y=-4x+4 \end{cases}$

$y_2 = kx+b:$ $\begin{cases} 4 = \frac{k}{4}+b \to 3 = -\frac{3}{4}k \to k=-4 \\ 1 = k+b \to b=1-k \to y=-4x+5 \end{cases}$

$D = 6^4 - 12\cdot 32 = 6^4 - 6\cdot 2\cdot 2^5 =$
$= 6(216-64) = 6\cdot 152 = 6\cdot 2\cdot 76 =$
$= 6\cdot 2\cdot 2\cdot 33 = 4\cdot 2\cdot 99 = 4\cdot 9\cdot 22$

$x_{в.} = \frac{-36}{-2\cdot 32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$y_{в.} = -32\cdot\frac{9^2}{16^2} + 36\cdot\frac{9}{16} - 3 =$
$= -\frac{2\cdot 9^2}{16} + \frac{36\cdot 9}{16} - \frac{3\cdot 16}{16} =$
$= \frac{9\cdot 18 - 9\cdot 8}{16} = \frac{90}{16} = 5$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{16} + 9 - 3 = -2+6 = 4$

$f(1) = -32+36-3 = 1$

$y = ax+b \to \begin{cases} \frac{a}{4}+b \ge 3 \\ \frac{a}{4}+b \le 4 \\ a+b \ge 0 \\ a+b \le 1 \end{cases}$ $\to \begin{cases} a \ge -b \\ a \le 1-b \end{cases} \to a \in [-b; -1-b]$

$4 = \frac{a}{4} + b \to b = 4 - \frac{a}{4}$

$y = ax + 4 - \frac{a}{4}$

$y = -4x+5$

$\begin{cases} a+4b \ge 12 \\ a+4b \le 16 \\ a+b \ge 0 \\ a+b \le 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2a+5b \ge 12 \\ 2a+5b \le 17 \end{cases} \to a \in \left[\frac{12-5b}{2}; \frac{17-5b}{2}\right]$

$a = -4b+12$ (1)
$a = -4b+16$ (2)
$a = -b$ (3)
$a = -b+1$
1

$\begin{cases} \frac{12-5b}{2} + 4b \ge 12 \to \frac{12+3b}{2} \ge 12 \to 3b \ge 12 \to b \ge 4 \\ \frac{12-5b}{2} \ge 0 \to 12-3b \ge 0 \to b \le 4 \end{cases}$

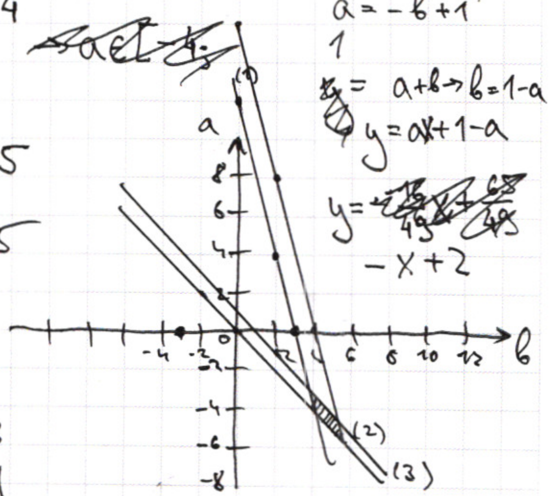
~~$a \in [-4;$~~

$y = a+b \to b = 1-a$

$y = ax + 1 - a$

$y = -x+2$

$\begin{cases} \frac{17-5b}{2} + 4b \le 16 \to \frac{17+3b}{2} \le 16 \to 3b \le 15 \to b \le 5 \\ \frac{17-5b}{2} + b \le 1 \to \frac{17-3b}{2} \le 1 \to 3b \ge 15 \to b \ge 5 \end{cases}$



$16\cdot 16 = 96$ $\quad 16\cdot 9 = 144$ $\quad 256+144 = 400$

$12^2\cdot\frac{2}{5} - 13 - 36\cdot\frac{2}{5} + 36\cdot 9\cdot\frac{2}{5} = 0$
$12 - 13\cdot 3 + 3\cdot 9 = 0$
$12 - 39 + 27 = 0$

$\frac{16}{256}$ $\quad 0 = a+b \to b=-a \to y = ax-a$

$y = -16x+16$

$f' = 4\left(-\frac{4}{(4x-5)^2}\right) = -\frac{16}{(4x-5)^2} = -16$

$y = -$ ~~$\frac{16}{25}$~~ 1

$27^{\log_3 \frac{4}{3}} = 3^{3\log_3 \frac{4}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

$1 = \dfrac{t_0^{\log_3 5} - \cancel{\log_3} t_0^{\log_3 4}}{t_0}$

$-4x+5 = 4 + \dfrac{4}{4x-5}$

$\dfrac{(4x-5)^2 + 4(4x-5)+4}{4x-5} = 0$

$\dfrac{((4x-5)+2)}{4x-5} = 0 \to 4x = 3 \to x = \frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)