МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}, \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}; \end{cases}$

Т.к. $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x$:

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}, \\ \sin2\alpha\cos4\beta + \sin4\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}; \end{cases}$$

Так как $\cos2x = 2\cos^2x - 1$ и $\sin2x = 2\sin x\cos x$:

$$\sin2\alpha(\cos4\beta+1) + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5};$$

$$2\sin2\alpha\cos^22\beta + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\begin{cases} 2\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha) = -\frac{4}{5}; \\ \sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}; \end{cases} \Rightarrow 2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5};$$

$$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}.$$

Так как $\sin^2x+\cos^2x = 1$: $\sin2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$ или $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$.

Если $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$:

$$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5};$$

$$2\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1;$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1;$$

$$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\alpha = 0, \\ \sin\alpha = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\alpha = 0, \\ \sin\alpha = -1 \end{cases} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}, \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \infty, \\ \mathrm{tg}\,\alpha = -\infty. \end{array}$$

№1

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}; \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}. \end{cases}$

$\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5};$

$\sin2\alpha\cos4\beta + \sin4\beta\cos2\alpha \overset{+\sin2\alpha}{=} -\frac{4}{5};$

$\sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\sin4\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5};$

$2\sin2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5};$

$2\cos2\beta(\cancel{2}\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha) = -\frac{4}{5};$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{4}{5};$ $\quad \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}.$

$\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}.$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5};$

$2\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1.$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1;$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+1) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \sin\alpha = 1\end{cases} \\ \begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \sin\alpha = -1\end{cases} \\ \begin{cases}\sin\alpha = -\frac{1}{2}\\ \cos\alpha = \cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{\sqrt3}{2}\end{cases} \\ \begin{cases}\sin\alpha = -\frac{1}{2}\\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt3}{2}\end{cases} \end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha = \infty;$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\infty;$

$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt3$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt3$

№3

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$

ОДЗ: $xy-x-2y+2 \geq 0.$

$x-2y \geq 0$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2;$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y = 2.$

$(x-2y)^2+x+2y-xy = 2.$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2 = 0;$

$x^2+9y^2-4x-18y+9+4-13 = 12;$

$(x-\cancel{4}2)^2+(3y-3)^2 = 25 = 5^2.$

$D = \cancel{25y^2}(\cancel{2}1-5y)^2 - 4(4y^2+2y-2) = 25y^2-10y+1-16y^2-8y+8 =$

$= 9y^2-18y+9 = (3y-3)^2 \geq 0$

$x = \frac{5y \pm (3y-3)}{2}.$ $\quad x = \frac{2y+3}{2};$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$:

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$;

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha - 1 = -1$;

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0,\\ \sin\alpha = -2\cos\alpha;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0,\\ \operatorname{tg}\alpha = -2.\end{array}\right.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$ может быть равен 0, -2, $-\frac{1}{2}$, $+\infty$ и $-\infty$.

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$.

ОДЗ: $x^2+18x > 0$;

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$;

Пусть $x^2+18x = t$. Тогда:

$t^{\log_{12}13} \leq 5^{\log_{12}t} + t$;

$t^{\log_{12}13} \leq t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12}$; $| : t^{\log_{12}5}$. Знак не меняется так как $t>0$.

$t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \leq 1$.

Из-за того, что $t^{\log_{12}\frac{13}{5}} > t^{\log_{12}\frac{12}{5}}$, а 1 константа, получаем, что функция непрерывно возрастает.

Найдём крайнее значение t, при котором данное неравенство

$x = \frac{8y-3}{2}.$

~~$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2;$~~

~~1. ($~~

~~$x^2+9y^2-4x-18y-12=0$~~

~~$\frac{D}{4} = 4-9y^2-18y-12=$~~

$= -9y^2-18y-8$

~~$D=$~~

~~1. $\left(\frac{8y-3}{2}-2\right)^2+(3y-3)^2=5^2;$~~

~~$\frac{(8y-7)^2}{4}+(3y-3)^2=5^2;$~~

~~$64y^2-112y+49+36y^2-72+36=100;$~~

~~$100y^2-184y+85=100;$~~

~~$100y^2-184y-15=0;$~~

~~$D=$~~

$169-144=25.$

$a>144$ услов не вып.

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$ ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13};$

$x^2+18x=a;$

$5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13};$

$2^{\log_2 4}=4$ $-144<x^2+18x-144\leq 0$

$4^{\log_2 4}=16$ $\frac{D}{4}=81+144=$

$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13};$

$=225.$

$a^{\log_{12}5}+a \geq a^{\log_{12}13}$

$0<x^2+18x\leq 144$

$\frac{-9\pm 15}{1}$

$\times\begin{array}{r}15\\15\\\hline 75\\15\\\hline 225\end{array}$

$a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12} \geq \log a^{\log_{12}13}.$ $a^{\log_{12}5}(1+a^{\log_{12}\frac{12}{5}}-a^{\log_{12}\frac{13}{5}})\geq 0.$

~~$a^{\log_{12}5}(1+a^{\log_{12}\frac{12}{5}}) \geq a^{\log_{12}13};$~~

Т.к. $a>0$: $1+a^{\log_{12}\frac{12}{5}}-a^{\log_{12}\frac{13}{5}}\geq 0;$

$x\in(-24;6)$

Так как степени const, возраст убывает равн. всегда.

$-a^{\log_{12}12-\log_{12}5}+a^{\log_{12}13-\log_{12}5}=1;$ ~~$5\cdot a^{\log_{12}\frac{12}{5}}$~~ $5^{\log_{12}5}$ $x\in[-24;-18)\cup(0;6].$

$-a^{\log_{12}12}+a^{\log_{12}13}=a^{\log_{12}5}.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

выполняется. Это так при: $t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}12} = t^{\log_{12}5}$.

$t = 12^2 = 144$; $(13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2)$

Значит, $t \le 144$; $x^2 + 18x \le 144$; $x^2 + 18x - 144 \le 0$;

$\frac{D}{4} = 81 + 144 = 225 = 15^2$;

$x = \frac{-9 \pm 15}{1}$; $x \in [-24; 6]$.

Получаем: $\begin{cases} x \in [-24; 6], \\ x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty). \end{cases} \Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

№5

Известно, что для всех положительных рациональных верно, что: $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Заметим, что при таком условии также верно:

$f(a) = f(\frac{a}{b} \cdot b) = f(\frac{a}{b}) + f(b)$;

$f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$.

По условию, нам нужны пары x и y, такие что:

$f(\frac{x}{y}) < 0$.

Другими словами: $f(x) - f(y) < 0$; $f(x) < f(y)$.

Для нахождения таких пар $(x; y)$, рассмотрим все значения функции для натуральных чисел от 1 до 24.

$f(2) = [2/4] = 0$; (2 - простое)

$f(1) = f(2) - f(1) = f(1) + f(1) = 2 \cdot f(1) = 0$.

$f(3) = [3/4] = 0$;

$[ab/4] = [a/4] + [b/4]$ $\qquad [x/4y] < 0$

~~Такая пара~~

$f(1) = 0;$ $\quad f(3) = 0;$ $\quad f(4) = 0;$ $\quad f(7) = 1$ $\quad f(9) = 0$

$f(2) = 0;$ $\quad f(6) = 0;$ $\quad f(5) = 1$ $\quad f(8) = 0$ $\quad f(10) = 1;$

$f(11) = 2;$ $\quad f(12) = 0;$ $\quad f(13) = 3;$ $\quad f(14) = 1;$ $\quad f(15) = 1;$ $\quad f(16) = 0;$

$f(17) = 4;$ $\quad f(18) = 0.$

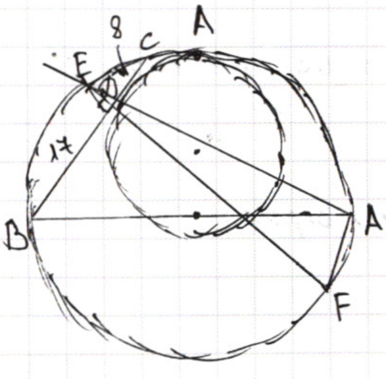
$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1) = f(0{,}5 \cdot 2) = 0 + 0;$ $\quad f(0{,}5) = 0.$

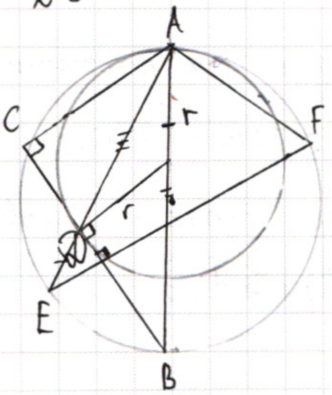
$f(3) = f(\frac{3}{5} \cdot 5) = -1 + 1 = 0.$ $\quad$ 3 и 5 $\quad \frac{3}{5}.$

$$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ +\,50 \\ \hline 625 \end{array}$$

$f(x) = f(\frac{x}{y} \cdot y);$ $\quad$ если $f(\frac{x}{y}) < 0; \Rightarrow$ $\quad f(x) < f(y).$



№5



$CD = 8$

$BD = 17$

$\frac{25}{8} = \frac{d}{d-r} = \frac{AC}{r};$

$AC = \frac{25}{8} r$

$AB^2 = AC^2 + BC^2;$

$d^2 = 625 + \frac{625}{64} r^2;$

$$\begin{array}{r|l} 119 & 15 \\ \hline -105 & 7{,}93 \\ 140 & \\ -135 & \\ 50 & \\ -45 & \\ 5 & \end{array}$$

$25(d-r) = 8d;$

$25d - 25r = 8d;$ $\quad 17d$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +\,17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 49 \\ \hline 225 \\ +\,100 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 64 \\ 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

$8^2 - 9^2 + 5^2 - 7^2$

1801

$1\cancel{8}$

$$\begin{array}{r} \times\, 121 \\ 40 \\ \hline 4840 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 0;$

$f(5) = [5/4] = 1;$

$f(6) = f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 0;$

$f(7) = [7/4] = 1;$

$f(8) = f(2\cdot 4) = 0;$

$f(9) = f(3\cdot 3) = 0;$

$f(10) = f(2\cdot 5) = 1;$

$f(11) = [11/4] = 2;$

$f(12) = f(2\cdot 6) = 0;$

$f(13) = [13/4] = 3;$

$f(14) = f(7\cdot 2) = 1;$

$f(15) = f(5\cdot 3) = 1;$

$f(16) = f(4\cdot 4) = 0;$

$f(17) = [17/4] = 4;$

$f(18) = f(2\cdot 9) = 0;$

$f(19) = [19/4] = 4;$

$f(20) = f(10\cdot 2) = \cancel{8}\, 1;$

$f(21) = f(3\cdot 7) = 1;$

$f(22) = f(11\cdot 2) = 2;$

$f(23) = [23/4] = 5;$

$f(24) = f(4\cdot 6) = 0.$

Теперь, имея нужные нам значения f, распределим их по таблице значений:

f(n)	0	1	2	3	4	5
n	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24;	5, 7, 10, 14, 15, 20, 21;	11, 22	13	17, 19	23
	всего 11;	всего 7;	всего 2;	всего 1;	всего 2;	всего 1.

Подходящих пар, где $f(x) = 0$:

$11\cdot(7+2+1+2+1) = 11\cdot 13 = 143;$

Подходящих пар, где $f(x) = 1$:

$7\cdot(2+1+2+1) = 7\cdot 6 = 42;$

Подходящих пар, где $f(x) = 2$:

$2\cdot 4 = 8;$

Подходящих пар, где $f(x) = 3$:

$1\cdot 3 = 3$

Подходящих пар, где $f(x) = 4$:

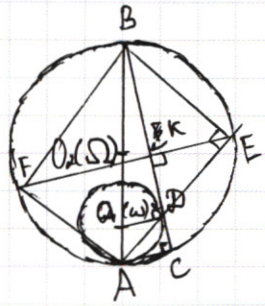
$2\cdot 1 = 2.$

Всего таких пар:

$143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 193 + 6 = 199.$

Ответ: таких $(x; y)$ всего 199.

№ 4



Дано: $CD=8$, $BD=17$.

Найти: $r=?$; $R=?$; $\angle AFE=?$; $S_{AEF}=?$

Решение:

Пусть радиус ~~окружности~~ ~~окружности~~ окружности ω будет r, радиус Ω – R, диаметр Ω – $d=2R$.

Рассмотрим $\triangle ABC$:

Так как AB – диаметр Ω, а C – точка, лежащая на окружности Ω, $\angle ACB = 90^\circ$.

Рассмотрим также $\triangle A\cancel{\omega}^{O_1}D$: Так как O_1D – радиус ω, а BD – касательная к ω, $\angle BDO_1 = 90^\circ$.

$\angle O_1BD$ – общий;
$\angle BDO_1 = \angle ACB = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle BO_1D \sim \triangle BAC$ и по отношению получаем, что: $\dfrac{BD}{BD+DC} = \dfrac{O_1D}{AC} = \dfrac{BO_1}{AB}$;

$\dfrac{17}{25} = \dfrac{r}{AC} = \dfrac{2R-r}{2R}$; $AC = \dfrac{25}{17}r$; $\cancel{34}^{50}R - \cancel{17}^{25}r = 34R$; $25r = 16R$; $R = \dfrac{25}{16}r$.

По теореме Пифагора для ABC: $AB^2 = B\cancel{C}^{C^2} + AC^2$;

$4R^2 = 25^2 + \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 r^2$; $4\left(\dfrac{25}{16}\right)^2 r^2 = 25^2 + \left(\dfrac{25}{17}\right)^2 r^2$; $| : 25^2$

$\dfrac{1}{64}r^2 = 1 + \dfrac{1}{289}r^2$; $r^2\left(\dfrac{1}{64} - \dfrac{1}{289}\right) = 1$; $r^2 = \dfrac{7^2 \cdot 17^2}{289-64} = \dfrac{7^2\cdot 17^2}{15^2}$;

$r = \dfrac{7\cdot 17}{15} = \dfrac{119}{15}$; $R = \dfrac{25}{16}r = \dfrac{119}{\cancel{15}_3}\cdot\dfrac{\cancel{25}^5}{16} = \dfrac{595}{48}$.

Рассмотрим $\triangle ACB$ и $\triangle EKD$ (K – точка пересечения BC и EA):

$\angle EKD = \angle ADC = 90^\circ$
$\angle ADC = \angle EDK$ (~~пересек. пр.~~ верт.)
$\Rightarrow \triangle EKD \sim \triangle ACD$ и $\angle DAC = \angle DEK = \angle AEF$

Также, как ~~двек~~ две точки в окружности, лежащие на одной хорде: $\angle AFE = \angle ABE$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle ABE = \angle ABC + \angle DBE = \angle ABC + \angle DEK = \angle ABC + \angle DAC.$

Значит: $\angle AFE = \angle ABC + \angle DAC$;

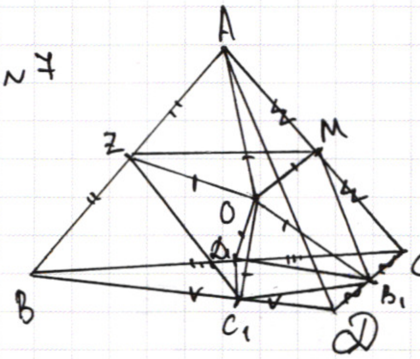
$$\sin(\angle A\cancel{E}FE) = \sin(\angle ABC + \angle DAC) = \sin\angle ABC \cdot \cos\angle DAC + \sin\angle DAC \cdot \cos\angle ABC =$$

$$= \frac{AC}{2R} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{BC}{2R} \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{AC^2 + BC \cdot DC}{2R \cdot AD} = \frac{\left(\frac{25}{17}r\right)^2 + 25 \cdot 8}{2 \cdot \frac{25}{16} r \cdot \sqrt{\left(\frac{25}{17}r\right)^2 + 8^2}} = \frac{\frac{25}{289} \cdot \frac{119}{15} \cdot \frac{119}{15} + 8}{\frac{1}{8} \cdot \frac{119}{15} \cdot \sqrt{\frac{625}{289} \cdot \frac{119^2}{15^2} + 64}} =$$

$$= \frac{\frac{49}{9} + 8}{\frac{1}{8} \cdot \frac{119}{15} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 49}{9} + 64}} = \frac{49 + 72}{\frac{9}{8} \cdot \frac{119}{5} \sqrt{\frac{1225 + 576}{9}}} = \frac{121 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{8} \cdot 119 \cdot \sqrt{1801}} = \frac{4840}{119\sqrt{1801}}$$

Ответ: $r = \frac{119}{15}$, $R = \frac{595}{48}$, $\sin\angle AFE = \frac{4840}{119\sqrt{1801}}$.

№7



Дано: $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$

$BC = ?$; $r_{min} = ?$

Решение:

Рассмотрим $\triangle B_1D_1C_1$:

~~D_1D_1~~ D_1C_1 - средняя линия в $\triangle BCD$;

$D_1C_1 = \frac{1}{2} DC = \frac{3}{2}$.

D_1B_1 - средняя линия в $\triangle BCD$, $D_1B_1 = \frac{1}{2} BD = 1$;

B_1C_1 также средняя линия в $\triangle BCD$, поэтому $B_1C_1 = \frac{1}{2} BC$.

Так как ZC_1 средняя линия $\triangle ABD$; MB_1 - $\triangle ACD$, ZM - $\triangle ABC$, C_1B_1 - $\triangle BCD$, плоскость ZMB_1C_1 параллельна прямой AD.

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$

ОДЗ: $x-2y\geq 0$, $x\geq 2y$.

$xy-x-2y+2\geq 0$.

1. $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$;

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$;

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$;

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$

$D=(1-5y)^2-4(4y^2+2y-2)=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$.

$x=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$; $x=4y-2$, или $x=y+1$.

2. Если $x=y+1$.

$(y+1)^2+9y^2-4y-4-18y=12$;

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$;

$10y^2-20y-15=0$; $2y^2-4y-3=0$; $\frac{D}{4}=4+6=10$;

$y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$.

По ОДЗ подходит лишь $y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$ и $x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$.

3. Если $x=4y-2$.

$(4y-2)^2+9y^2-16y+8-18y-12=0$;

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$.