МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$$

сумма синусов:

$$2\sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad 2\beta = \pm\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\beta = \frac{\pm\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \pi\cdot k}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot n \\ 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\beta - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot n \\ 2\alpha = -2\beta + \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi\cdot n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\beta - \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{2} + \pi\cdot n \\ \alpha = -\beta + \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{2} + \pi\cdot n \end{array}\right.$$

I $\quad \beta = \frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2} + \pi\cdot k$:

$$\alpha = -\frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2} - \pi\cdot k - \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{2} + \pi\cdot n$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{2} - \pi\cdot(k+n)\right) = \quad \text{/ период.}$$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\overbrace{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}^{\in[0;\frac{\pi}{2}]>0} + \overbrace{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{\in[0;\frac{\pi}{2}]>0}}{2}\right)$$

т.к. выполняется основное тригонометрическое равенство: $\cos\left(\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)^2 + \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)^2 = 1$,

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

то $\sin^2(\arcsin(\frac{1}{\sqrt5}) = \sin^2(\arccos(\frac{2}{\sqrt5}))$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) = \varphi$$

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{2\cdot\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2}\right) = -\operatorname{tg}(\underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}_{\in[0;\frac{\pi}{2}]\Rightarrow}) = -\frac{\frac{1}{\sqrt5}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2}},$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad \operatorname{tg}(\varphi) > 0 = -\frac{\frac{1}{\sqrt5}}{\frac{2}{\sqrt5}} =$

$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$1 - \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$ $\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2\alpha}}$ $\qquad = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{|\sin\alpha|}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

$$\operatorname{tg}\left(\cancel{-\frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}{2}} + \pi\cdot k + \frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2}} + \pi n\right) =$$

$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\cdot k + \pi\cdot n\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — не определён

III $\quad \beta = -\frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}{2} + \pi\cdot n$;

$$\operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}{2} - \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2}}_{=0} + \pi\cdot n + \pi\cdot k\right) = \operatorname{tg}(\pi\cdot n) =$$

$= 0$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2} + \pi\cdot k\right) =$$

$= \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{\pi}{2} + \pi\cdot k\right) = \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= -\operatorname{ctg}(\underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}_{\in[0;\frac{\pi}{2}]}) = \frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)}}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)} = -\frac{\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}} =$$

$= -2$

Итак, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2};\ 0;\ -2.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$ может быть равен $-\frac{1}{2};\ 0;\ -2.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

Введём замену:

$u = x - 2$

$v = y - 1$

$u - 2v = x - 2 - 2y + 2 = x - 2y$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)} \\ x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u-2v)^2 = (\sqrt{u \cdot v})^2 \\ u^2 + 9v^2 = 25 \end{cases}$$

равн. преобразования:

$$\begin{cases} u \geq 2v \\ (u-2v)^2 = u \cdot v \\ u^2 + 9v^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \geq v \cdot 2 \\ u^2 - 4vu + 4v^2 = u \cdot v \\ u^2 + 9v^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \geq 2v \\ u^2 - 5u \cdot v + 4v^2 = 0 \\ u^2 + 9v^2 = 25 \end{cases}$$

$D = 25v^2 - 4 \cdot v^2 \cdot 4 = 9v^2$

$$\left[\begin{array}{l} u = \frac{5v + 3v}{2} \\ u = \frac{5v - 3v}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} u = 4v \\ u = \cancel{\ } v \end{array}\right.$$

$u = v$:

$v^2 + 9v^2 = 25$

$10v^2 = 25 \qquad v^2 = \frac{5}{2}$

$$\begin{cases} \begin{cases} v = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ u = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ u \geq v \cdot 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ u = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$u = 4v$:

$16v^2 + 9v^2 = 25 \qquad v = \pm 1$

$$\begin{cases} u \geq 2v \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = 1 \\ u = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} v = -1 \\ u = -4 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} v = 1 \\ u = 4 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} v = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ u = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ u = 4 \end{cases}\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} u = x - 2 \\ v = y - 1 \\ x = u + 2 \\ y = 1 + v \end{array} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(6;\ 2)$, $\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2};\ 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}(13)} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x - |x^2+18x|^{\log_{12}(13)} \geq 0$$

По логарифмам: $x^2 + 18x > 0$ Введём замену $t = (x^2 + 18x)$.

$$t^{\log_{12}(5)} + t - t^{\log_{12}(13)} \geq 0$$

$$\underset{>0}{t} \cdot \left(t^{\log_{12}(5) - 1} - t^{\log_{12}(13) - 1} + 1\right) \geq 0$$

$t > 0 \Rightarrow t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)} - t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} + 1 \geq 0$

Рассмотрим функцию: $f(t) = t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)} - t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} + 1$

$$f'(t) = \underbrace{\left(\log_{12}\left(\tfrac{5}{12}\right) - 1\right)}_{<0} \cdot \underbrace{t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right) - 1}}_{>0} \underbrace{- \log_{12}\left(\tfrac{13}{12}\right)}_{<0} \cdot \underbrace{t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right) - 1}}_{>0}$$

как положительное число в степени.

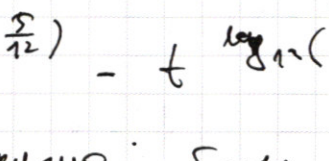
$\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right) - 1 < 0$

$\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right) < \log_{12} 12$ $\quad y = 12^x$ $\quad 12 > 1 \Rightarrow$ монотонно возрастает.

$\Downarrow$

$\frac{5}{12} < 12$ $\qquad f'(t) < 0 \Rightarrow f(t)$ - монотонно

убывает:



Для монотонно убывающей функции решение $f(t) \geq const$ будет при $t \leq t_1$, где t_1 - единственное пересечение с $y = const$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

подберём корень t:

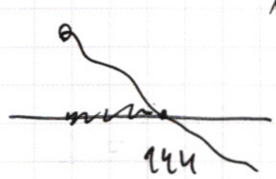
$$t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)} - t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} + 1 \cancel{\geq} 0$$

$t = 12^2$; $\quad 12^{2\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)} - 12^{2\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} + 1 \cancel{\geq} 0$

$t = 144$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{13}{12}\right)^2 + 1 \cancel{\geq} 0 \qquad \frac{25-169}{144} + 1 \cancel{\geq} 0$$

$-\frac{144}{144} + 1 = 0 \qquad 0 = 0 \Rightarrow t = 144$ - корень ур. уравнения.

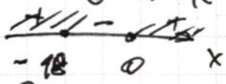


Учитывая область определения t:

$t \in (0; 144]$ - решение нер-ва.

$$0 < x^2 + 18x \leq 144$$

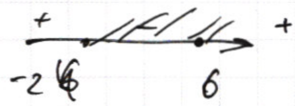
$\begin{cases} 0 < x(x+18) \\ x^2 + 18x - 144 \leq 0 \end{cases}$



$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$\frac{D}{2} = 9^2 + 144 = 81 + 144 = 225$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-9+15}{1} \\ x = \frac{-9-15}{1} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -24 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -24 \end{array}\right.$



$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases} \qquad x \in [-24; -18) \cup (0; 6].$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$. - решение нер-ва.

№5

$f(a\,b) = f(a) + f(b)$, при $a \in$ рац. $b \in$ рац. $a > 0$ $b > 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p - простое

$(x;y)$ - ? если $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{f(2x) + f\left(\frac{2}{y}\right)} = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$

$f(a) = f(a\cdot b) - f(b) \Rightarrow \cancel{a = \frac{2}{y}\ b = y}\ a = \frac{1}{y}\ b = 2y$

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right)}$ $f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y} \cdot 2y\right) - f(2y) =$

$= f(2) - f(2y) = f(2) - (f(2) + f(y)) =$

$= \cancel{f(2)} - \cancel{f(2)} - f(y)$ $\quad f(2y) = f(2) + f(y)$ - по св-ву функции.

$= -f(y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

рассчитаем $f(x)$ для $x \in [1; 24]$.

$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = -f(2) + f(2) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0.$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0.$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(12) = f(2) + f(2) + f(3) = 0$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(14) = f(7) + f(2) = 1$

$f(15) = f(5) + f(3) = 1$

$f(16) = f(2) + f(2) + f(2) + f(2) = 0.$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(18) = f(9) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(20) = f(5) + f(4) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(24) = f(6) + f(4) = 0.$

Составим таблицу $f(x)$:

x	~~0~~	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(x)$		0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \qquad f(x) < f(y)$ – найдём кол-во

таких пар.

если $f(x) = 0$, то подойдут любые ячейки с >0 для $f(y)$ их 11 ~~~~ шт.

$\underline{13}$. Всего пар: $11 \cdot 13 = 143$

если $f(x) = 1$, 7 ~~~~ шт. то $f(y) > 1$. их $\underline{6}$ $6 \cdot 7 = 42$

если $f(x) = 2$, 2 шт. то $f(y) > 2$. их $\underline{\underline{4}}$ $2 \cdot 4 = 8$

если $f(x) = 3$, 1 шт. то $f(y) > 3$ их $\underline{\underline{3}}$ $3 \cdot 1 = 3$

если $f(x) = 4$, 2 шт. то $f(y) > 4$ их $\underline{1}$ $1 \cdot 2 = 2$

$f(x) = 5$ не даст решений.

все варианты:

$$143 + \overset{50}{42} + 8 + \overset{55}{3} + \overset{5}{2} = 198$$

Ответ: 198 пар $(x; y)$ возможно.

№ 6 $\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

Введём функции:

$y = \frac{12x + 11}{4x + 3} = \frac{12x + 9 + 2}{4x + 3} = 3 + \frac{2}{4x + 3}$ – гипербола.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$y = -8x^2 - 30x - 17$ — парабола.

$y = ax + b$ — любая прямая на пл-ти ~~не || оси Oy~~ не и оси Oy. должна оказаться ниже, либо пересечь $y = -8x^2 - 30x - 17$, и должна выше $y = \frac{12x+11}{4x+3}$.

$y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ — гипербола $y = 3$ — гор. асимптота.

$x = -\frac{3}{4}$ — верт. асимптота,

$y = -8x^2 - 30x - 17$ монотонно убывает,

$x_0 = -\frac{30}{-8\cdot 2} = -\frac{15}{8}$ — положение вершины

$y(x_0) = -8\cdot\frac{225}{8^2} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{225\cdot 2}{8} - 17 =$

$= \frac{225}{8} - 17 = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$.

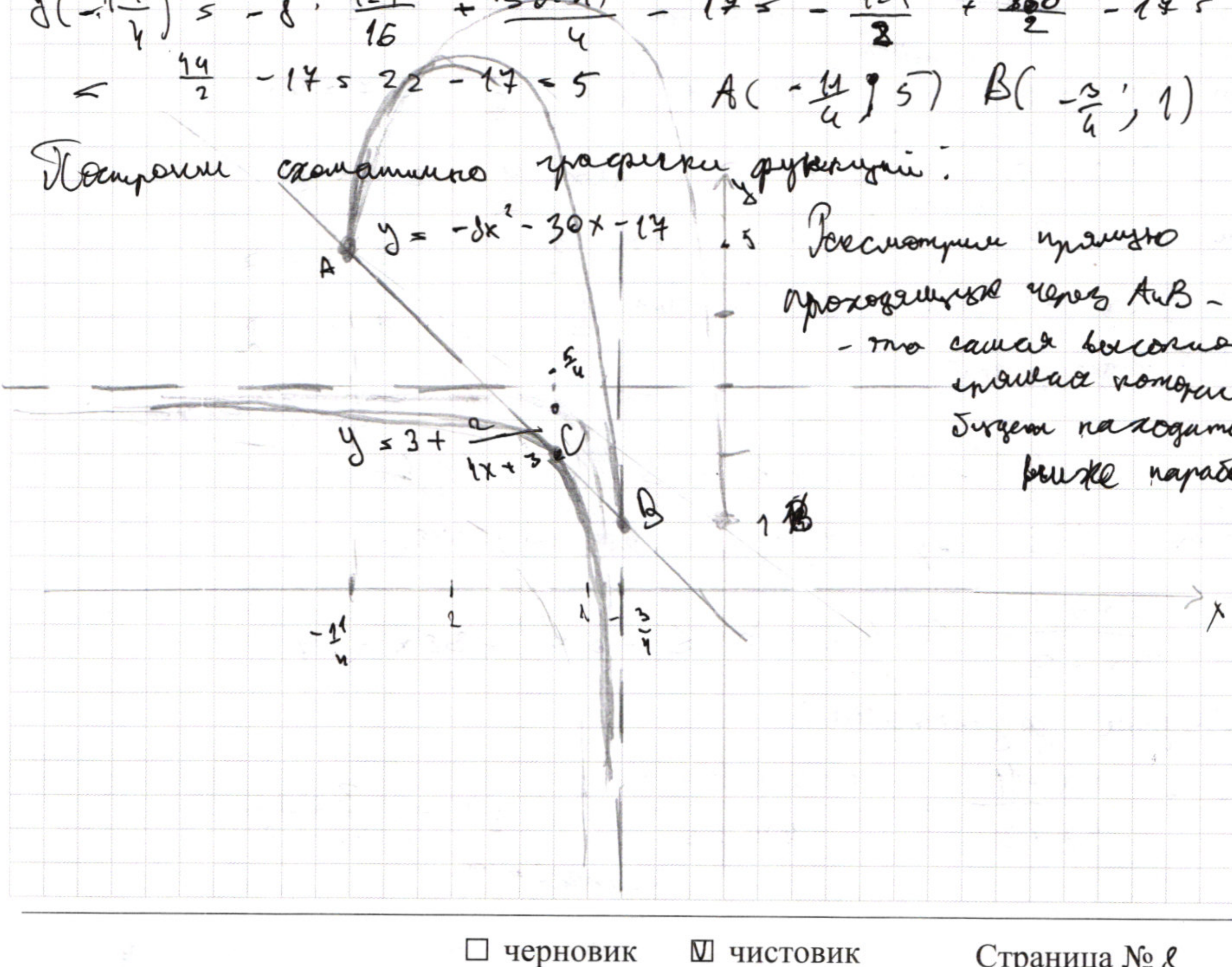
$y\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 30\cdot\frac{3}{4} - 17 = -\frac{8\cdot 9}{16} + \frac{15\cdot 3}{2} - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = +\frac{36}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$

$y\left(-1\frac{1}{4}\right) = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 =$

$= \frac{44}{2} - 17 = 22 - 17 = 5$ $\quad A\left(-1\frac{1}{4}; 5\right)$ $B\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$

Построим схематично графики функций:



Рассмотрим прямую проходящую через A и B — это самая высокая прямая которая будет находится ниже параболы.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $y = kx + b$ - искомая прямая;

$A(-\frac{11}{4}; 3)$: $3 = -\frac{11}{4}\cdot k + b$ $\quad 4 = (-\frac{11}{4} + \frac{3}{4})\cdot k$

$1 = -\frac{3}{4}\cdot k + b$ $\quad 4 = -2\cdot k$

$1 = +\frac{3}{2} + b$ $\quad b = -\frac{1}{2}$ $\quad k = -2$

$y = -2x - \frac{1}{2}$ - искомая прямая. Найдём пересечение с

$y = \frac{12x+11}{4x+3}$ $\quad \frac{12x+11}{4x+3} = (-2x - \frac{1}{2})\cdot 2$

$\frac{24x+22}{4x+3} = -4x - 1$

$24x + 22 = -(4x+1)(4x+3)$ $\quad 24x + 22 = -(16x^2 + 16x + 3)$

$24x + 22 = -16x^2 - 16x - 3$ $\quad 16x^2 + 40x + 25 = 0$

$\frac{D}{4} = 20^2 - 25\cdot 16 = 400 - 400 = 0.$

$x = -\frac{20}{16} = -\frac{5}{4}$ - точка пересечения.

$(-\frac{5}{4}; 2)$ C - проверим на положение касания, найдём касательную к $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ в этой точке.

$y'(x) = \frac{-8}{(4x+3)^2}$ $\quad y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

$(-\frac{5}{4}; 2)$

$y = -\frac{8}{(-\frac{5}{4}\cdot 4 + 3)^2}\cdot(x + \frac{5}{4}) + 2 =$

$= -2(x + \frac{5}{4}) + 2 = -2x - \frac{5}{2} + 2 = -2x - \frac{1}{2}$ - совпадает с прямой через AB $\Rightarrow$ $y = -2x - \frac{1}{2}$ - касательная к $y = \frac{2}{4x+3} + 3$ в точке C.

Из ~~граф~~ графика видно, что существует только одна прямая $y = ax + b$, удовлетворяющая условию

☐ черновик ☑ чистовик

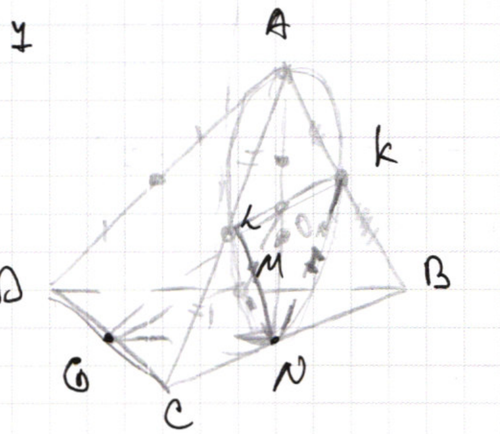
(Поставьте галочку в нужном поле)

которая проходит через точки A, B, она получается зажата между $y=-8x^2-30x-17$ и $y=\frac{12x+11}{4x+3}$.
Любая другая прямая не удовлетворяет условию, т.к. если возьмём прямую ниже, то она обязательно пересечёт гиперболу, т.к. окажется ниже касательной, а выше взять не можем, т.к. ограничивает парабола. Поэтому $y=-2x-\frac{1}{2}$ - единственная прямая уд. условию $\Rightarrow$

$\begin{cases} a=-2 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ - искомая пара. Ответ: $\begin{cases} a=-2 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$(-2; -\frac{1}{2})$.

№7



Дано: ABCD - пир.
$AB=1$, $BD=2$, $CD=3$
M, N, G, A, L, K - на одной сфере.
Найти: BC - ?
V_{min} - ?
Решение:

1) Геом. место точек равноуд. от трёх - это прямая $\perp$ пл-ти в которой они лежат, проходящая через центр описан. Δ

2) A, L, N, K - лежат в одной пл-ти, и на одной сфере, значит их пл-ть проходит через центр сферы.
NG, MN, MG - средняя линия,

3) $MN=DG=\frac{DC}{2}=\frac{3}{2}$ аналогично: $AL=NK$ $\Rightarrow$

$GN=\frac{BD}{2}=\frac{2}{2}=1$ $AK=NL$ и т.м.

$MG=\frac{BC}{2}=1$ AKNL - ~~ромб~~ вписан. в окр, значит это квадрат

$LK=\sqrt{2}AK=\frac{AB}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$BC=LK\cdot 2=\sqrt{2}$ Ответ: $BC=\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{12}(5)\cdot 5^{\log_{12}(t)}\cdot\frac{1}{t} - \frac{13^{\log_{12}(t)}}{t}\cdot\log_{12}(13) + 1$

$\frac{1}{t}\left(\log_{12}(5)\cdot 5^{\log_{12}(t)} - 13^{\log_{12}(t)}\cdot\log_{12}(13) + t\right)$

$t > 0$

$(x^2+18x)^{\log_{12}(5)} - (x^2+18x)^{\log_{12}(13)} + t \geq 0$

$t^{\log_{12}(5)} - t^{\log_{12}(13)} + t \geq 0$

$\log_{12}(5)\cdot t^{\log_{12}(5)-1} - \log_{12}(13)\cdot t^{\log_{12}(13)-1} + 1$

≥ 0

$\left(t^{\log_{12}(13)-1} - t^{\log_{12}(5)-1} + 1\right) \geq 0$

>1 <0 <1 >1

$t<1$ <1

$\frac{2x+a+2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+3 \leq -8x^2-30x-17$

$x=-\frac{3}{4}$

$-8x^2-30x-14=3$

$y=3+\frac{2}{4x+3}$

$-8x^2-30x-20=0$

$y=-8x^2-30x-17$

$4x^2+15x+10=0$

$y=-8\left(\frac{15}{8}\right)^2+\frac{30\cdot 15}{8}-17$

$D=15^2-8\cdot 17=225-136=89$

$=-\frac{225}{8}+\frac{225\cdot 2}{8}$

$\frac{225}{136}$, 89

$x_0=\frac{-30}{-8\cdot 2}=-\frac{15}{8}$

$-17=$ $=\frac{8}{98}$

$225-4\cdot 10\cdot 4=65$

$y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$=\frac{225}{8}-17=$

$=\frac{225-148}{8}=\frac{89}{8}$

$\frac{1}{4x+3}$ $=-4x^2-15x-10<0$

$4x^2+15x+10>0$

$D=225-160=65$

$x=\frac{-15\pm\sqrt{65}}{8}$

$-\frac{15+\sqrt{65}}{2}$

$\left(-\frac{3}{4};1\right)$, $\frac{1}{12}x+\frac{11}{4x+3}=-8x^2-30x-17$

$\left(-\frac{11}{4};5\right)$

$y=-\frac{11}{4}k+b$

$f\left(\frac{27}{8}\right)=f\left(\frac{27}{8}\right)$

$f(x)=f(2)+f(2)\cdot f(x)$

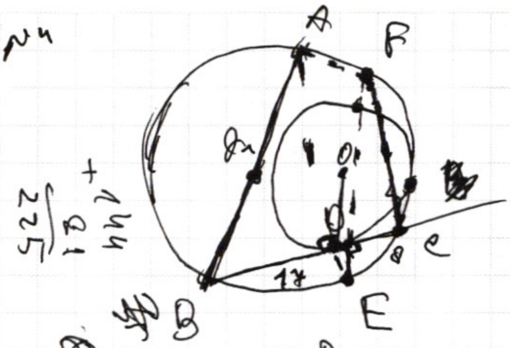
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N4



r — ?

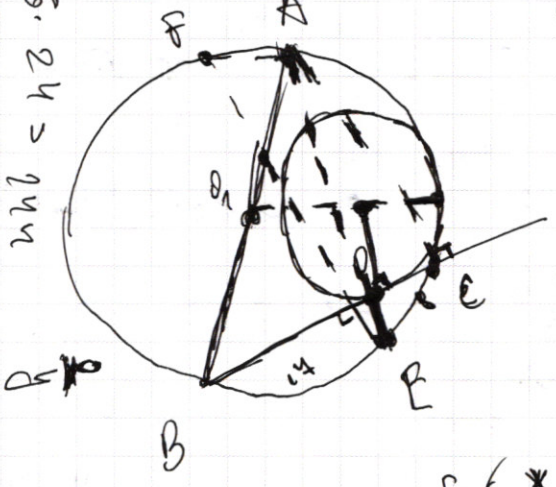
$\angle AFE$ — ?

S_{AEF} — ?

$CD = 8$

$BD = 14$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} \geq -2$



$f(2y) + f(\frac{1}{y}) = f(\frac{1}{y} \cdot 2y)$

$f(2y) + f(\frac{1}{y}) = f(2)$

$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(1) = f(1) + f(2)$

$1 \leq x \leq 24$

$1 \leq y \leq 24$

$x < y$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f(a) = f(ab) - f(b)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) - f(2) = f(1) - f(2) =$

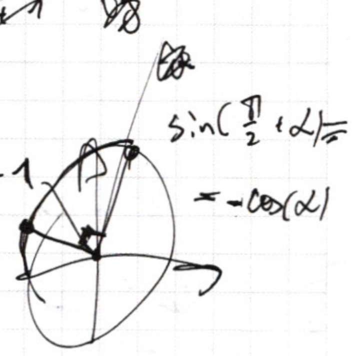
$f\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right)}\ f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) - f(y) =$

$= f(x) - f(y) + f(1) < 0$

$f(x) - f(y) + \underbrace{f(1)}_{=1} < 0$

$f(x) - f(y) + 1 < 0$

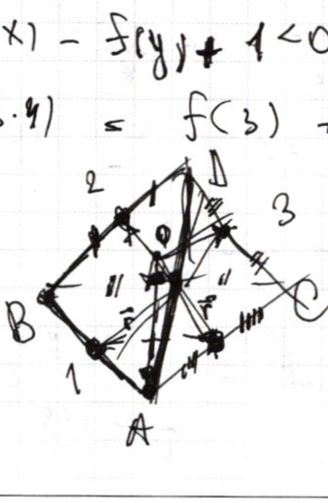
$f(x) < f(y) - 1$



$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$

$f(3 \cdot 4) = f(3) + f(4) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{4}{4}\right]$

N 7



$\vec{r} + \frac{\vec{AC}}{2} - \vec{r} = \vec{0}$

$\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$= 24 - \frac{h}{24} \cdot 30 + \left(\frac{h}{24}\right)^2 \cdot 8 -$

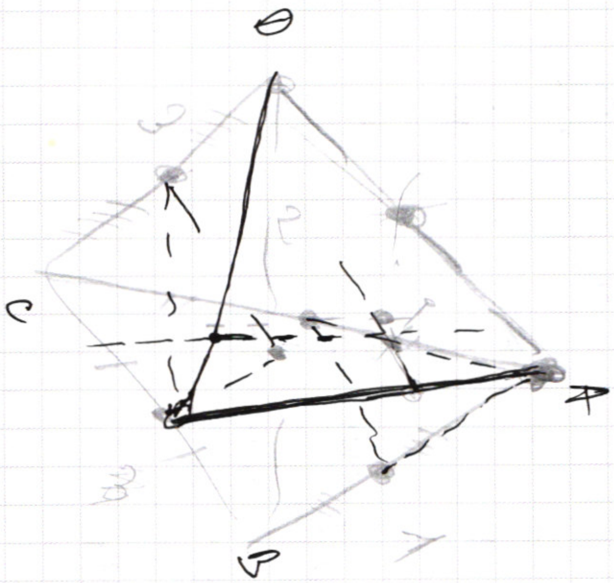
$h = -8x^2 - 30x - 24$

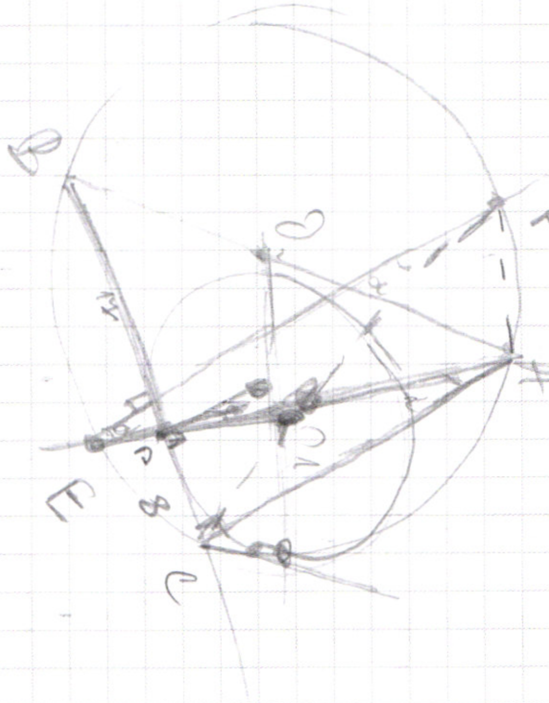
☐ черновик ☐ чистовик

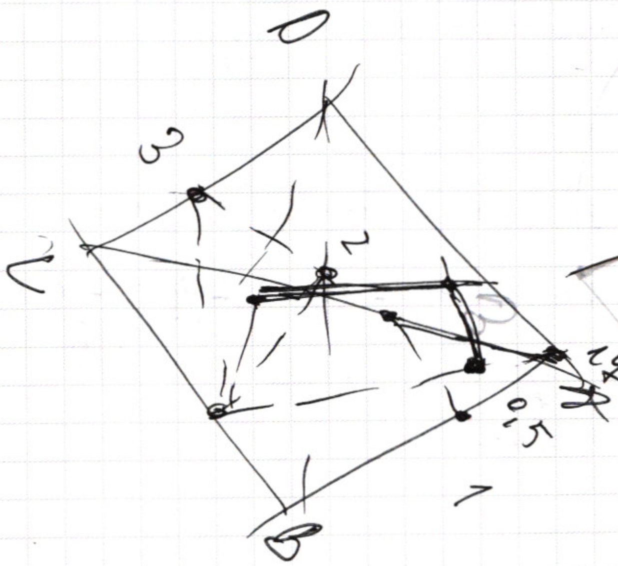
(Поставьте галочку в нужном поле)

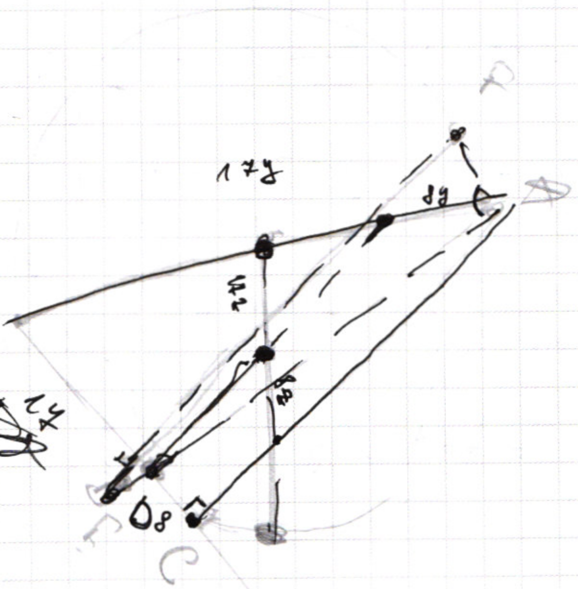
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)









☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 = -\frac{11}{4}\cdot k + b$ $\qquad 4 = \left(-\frac{11}{4} + \frac{3}{4}\right) k$

$1 = -\frac{3}{4}\cdot k + b$ $\qquad 4 = -\overset{-2}{\frac{8}{4}}\cdot k$

$k = -2$

$1 = -\frac{3}{4}\cdot -2 + b$ $\qquad y = -2x - \frac{1}{2}$

$1 = \frac{3}{2} + b$ $\qquad b = -\frac{1}{2}$ $\qquad y = +2\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1$

$y = +2\cdot\frac{11}{4} - \frac{1}{2} = 5$

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$y' = \left(3 + \frac{2}{4x+3}\right)' = -\frac{2\cdot 4}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{4x+3}$

$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2} \quad |\cdot 2$

$24x + 22 = (4x+3)(-4x-1)$

$\frac{24x+22}{4x+3} = -4x - 1$

$24x + 22 = -16x^2 - \underbrace{4x - 12x}_{-16} - 3$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$\frac{D}{2} = 20^2 - 16\cdot 25 = 400 - 400 = 0 \ldots$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = $

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\alpha + 2\beta = \arcsin -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 2\beta + 2\pi n$

$\alpha = \arcsin$

$-8\cdot\frac{9}{16} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17 =$

$-8\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2 + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{165}{2} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = 22 - 17 = 5$

$\log_{12}(5) - 1$

$\log_{12}(13)$

$t\cdot\frac{5}{12}$

$\frac{13}{12}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

00:27 00:28

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+9y^2-18y=12$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$ $\quad u=x-2$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$ $\quad v=y-1$

$x-2y=x-2-2(y-1)=x-2y$

$$\begin{cases} u-2v=\sqrt{u\cdot v} \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2-4\cdot u\cdot v+4v^2=u\cdot v \\ u^2+9v^2=25 \end{cases}$$

$D=25-4\cdot4=9$ $\quad u^2-5\cdot u\cdot v+4v^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} u=\frac{5v+3v}{2} \\ u=\frac{5v-3v}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} u=4v \\ u=v \end{array}\right.$$

$v^2+9v^2=25$ $\quad v^2=\frac{5}{2}$

№13.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log(x^2+18x)}+13^{\log_{12}(|x^2+18x|)}+x^2+18x\geq 0$$

$x^2+18x\geq 0$

$x(x+18)\geq 0$

$x\in(-\infty;-18]\cup[0;+\infty)$

$5^{\log_{12}(t)}-13^{\log_{12}(t)}+t\geq 0$

$f(t)=\left(5^{\log_{12}(t)}-13^{\log_{12}(t)}+t\right)'=\frac{\ln(5)}{\ln(12)}\cdot 5^{\log_{12}(t)}-\frac{\ln(13)}{\ln(12)}\cdot 13^{\log_{12}(t)}+1$

$5^x=e^{\ln(5)\cdot x}$

$(\log_{12}(t))'=\frac{\ln(t)'}{\ln(12)}=\frac{1}{\ln(12)\cdot t}$

$x=4$, $y=1$

$g'(x)=\left(\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)\cdot t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)-1}-\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)\cdot t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)-1}\right)$

$t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)}-t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}+1$

$t\in(0;1)$

$t\geq 0$, $x_1>1$

$x_1^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)}-x_1^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}$