

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

Ответ

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leq x \leq 28$, $4 \leq y \leq 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $(\frac{2}{3}; 2]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TU . Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos(2\beta) = -\frac{1}{17}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin(2\beta) = +\frac{\sqrt{272}}{17}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$1) \sin(2\beta) = \frac{\sqrt{272}}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{272}}{17} \cdot \cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2) \cos 2\alpha \neq 0$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{272}}{17} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\sqrt{272}}{17} \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{\sqrt{17}}{17} \sin 2\alpha$$

$$-\frac{\sqrt{17}}{17} \sin 2\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \leq -1 \Rightarrow \text{ед. возм. значение} = -1$$

$$\frac{\sqrt{272}}{17} \sqrt{0} = 0$$

подставляем \Rightarrow

$$\sin 2\alpha = -1$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$\delta) \cos 2\alpha \leq 0$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \rightarrow \frac{\sqrt{272}}{17} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\sqrt{272} \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{17} + \sqrt{17} \cdot \sin 2\alpha = \sqrt{17} (1 + \sin 2\alpha)$$

$$272 - 272 \sin^2 2\alpha = 17(1 + 2\sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha)$$

$$272 - 272 \sin^2 2\alpha = 17 + 34 \sin 2\alpha + 17 \sin^2 2\alpha$$

$$289 \sin^2 2\alpha + 34 \sin 2\alpha - 255 = 0$$

$$17^2 \sin^2 2\alpha + 17 \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha + 1 - 256 = 0$$

$$(17 \sin 2\alpha + 1)^2 = 256$$

$$17 \sin 2\alpha + 1 = \pm 16$$

$$1) 17 \sin 2\alpha + 1 = 16$$

$$2) 17 \sin 2\alpha + 1 = -16$$

$$17 \sin 2\alpha = 15$$

$$17 \sin 2\alpha = -17$$

$$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$$

$$\sin 2\alpha = -1$$

При подстановке $\sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{272}}{17}$ мы получим те же уравнения, только

$$a) \cos 2\alpha \geq 0 \quad \delta) \cos 2\alpha \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{вторая пара значений } \begin{matrix} \sin 2\alpha = -1 & \sin 2\alpha = \frac{15}{16} & \sin 2\alpha = \frac{15}{16} \\ \cos 2\alpha = 0 & \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{31}}{16} & \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{31}}{16} \end{matrix}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha) + 1} \quad 1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{0+1} = -1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{31}}{16} + 1} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{31} + 16}{16}} = \frac{15}{\sqrt{31} + 16}$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{15}{16}}{-\frac{\sqrt{31}}{16} + 1} = \frac{15}{16 - \sqrt{31}}$$

По условию они существуют.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2 - 26x| \log_5^{12} + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2) \quad \boxed{N3}$$

$$26x - x^2 > 0 \Rightarrow \text{раскроем модуль}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$(26x - x^2)^{\log_5^{12}} + (26x - x^2)^1 \geq (26x - x^2)^{\log_5^{13}}$$

$$26x - x^2 = t$$

$$t^{\log_5^{12}} + t^{\log_5^5} \geq t^{\log_5^{13}}$$

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t} \quad | : 13^{\log_5 t}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1$$

При $\log_5 t = 2$ выполняется равенство

в левой части возрастающая (как функция 2-х в степенях) функция, в правой части константа \Rightarrow
 $\Rightarrow \log_5 t \geq 2$

$$t \geq 25$$

$$26x - x^2 \geq 25$$

$$x^2 - 26x + 25 \geq 0$$

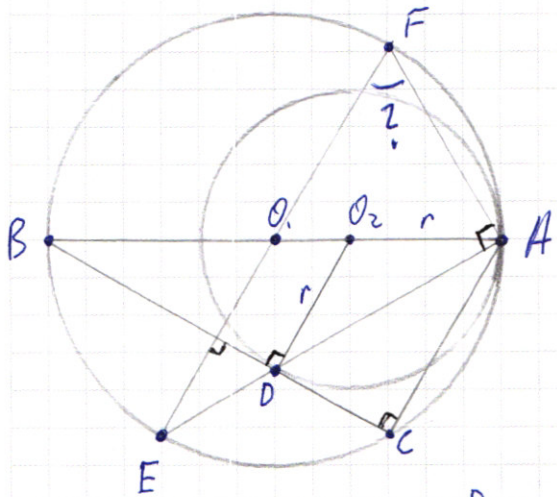
$$(x-1)(x-25) \geq 0 \quad x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$$

Ответ:

$$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$$

$$[25; +\infty)$$

№4



Поскольку окружности касаются \Rightarrow
 \Rightarrow их центры лежат на одной
 прямой с точкой касания.

Поскольку диаметр проведён
 через центр $\Rightarrow O_1, O_2$ лежат на AB

D - точка касания $\Rightarrow \angle BDO_2 = 90^\circ$

$CB \perp CA$ отрезана на диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$

r - радиус малой окружности R - радиус большой.

$O_2D \parallel AC \Rightarrow \angle DAC = \angle O_2DA$

$\triangle DO_2A$ - р/д (2 стороны = r) $\Rightarrow \angle O_2DA = \angle O_2AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2AD = \angle DAC \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{EC} \Rightarrow EF$ пересек BC

середина $\Rightarrow EF$ проходит через $O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$

$$BO_2 = \sqrt{r^2 + 13^2}$$

По Th Паллеа

$$\frac{BO_2}{BD} = \frac{O_2A}{DC} \Rightarrow \frac{BO_2}{O_2A} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{\sqrt{r^2 + 13^2}}{r} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{r^2 + 13^2}{r^2} = \frac{13^2}{12^2}$$

$$1 + \frac{13^2}{r^2} = \frac{13^2}{12^2}$$

$$\frac{13^2}{r^2} = \frac{13^2 - 12^2}{12^2}$$

$$r^2 = \frac{13^2 \cdot 12^2}{13^2 - 12^2} = \frac{13^2 \cdot 12^2}{5^2}$$

$$r = \frac{13 \cdot 12}{5} = 21,2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2R = BO_2 = 2R - r$$

$$2R = BO_2 + r$$

$$R = \frac{BO_2 + r}{2} = \frac{\sqrt{r^2 + 13^2} + r}{2} = \frac{\sqrt{\frac{13^2 + 12^2}{5^2} + 15^2} + 21,2}{2}$$

$$= \frac{13 \sqrt{\frac{1+12^2}{5^2} + 1} + 21,2}{2} = \frac{13 \sqrt{\frac{34}{5}} + 21,2}{2}$$

Найдём DA

$$\frac{r}{AC} = \frac{13}{25} \quad AC = \frac{25r}{13}$$

$$DA = \sqrt{\frac{25^2 r^2}{13^2} + 12^2} = \sqrt{\frac{25^2 \cdot 13^2 \cdot 12^2}{13^2 \cdot 5^2} + 12^2} = 12 \sqrt{25+1} = 12 \sqrt{26}$$

Посчитаем степень (o) D 2-м способом.

$$BD \cdot DC = DE \cdot DA$$

~~$$DE = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{\frac{25^2 \cdot 13^2}{13^2} + 12^2}} = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{\frac{25^2 \cdot 13^2}{13^2} + 12^2}} = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{\frac{12^2 \cdot 13^2}{13^2 \cdot 5^2} + 12^2}} =$$~~

~~$$= 12 \sqrt{\frac{13^2}{5^2}}$$~~

$$= \frac{12 \cdot 13}{12 \sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{26}}$$

$$EA = DE + DA = \frac{13}{\sqrt{26}} + 12 \sqrt{26} = \frac{13 + 12 \cdot 26}{\sqrt{26}} = \frac{325}{\sqrt{26}}$$

$$\sin \angle AFE = \frac{EA}{EF} = \frac{EA}{2R} = \frac{325}{\sqrt{26} \cdot (13\sqrt{\frac{34}{5}} + 21,2)}$$

$$S_{\Delta AEF} = \frac{FA \cdot AE}{2} = \frac{\sqrt{FE^2 - AE^2} \cdot AE}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4R^2 - AE^2} \cdot AE}{2} = \frac{\sqrt{(13\sqrt{\frac{34}{5}} + 21,2)^2 \cdot 2 - \left(\frac{325}{\sqrt{26}}\right)^2} \cdot \frac{325}{\sqrt{26}}}{2}$$

Объем: $r = 21,2$

$$R = \frac{13\sqrt{\frac{34}{5}} + 21,2}{2}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{325}{\sqrt{26} \cdot (13\sqrt{\frac{34}{5}} + 21,2)} \right)$$

$$S = \frac{\sqrt{(13\sqrt{\frac{34}{5}} + 21,2)^2 \cdot 2 - \left(\frac{325}{\sqrt{26}}\right)^2} \cdot \frac{325}{\sqrt{26}}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$$

$$\frac{4}{3x-2} - 2 \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

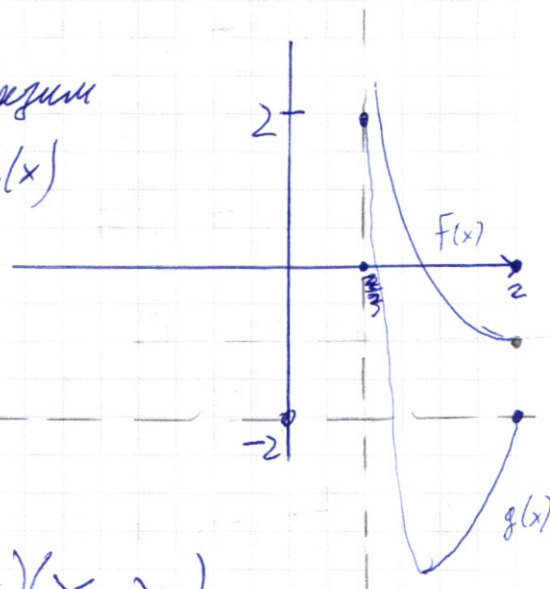
$\frac{4}{F(x)} \qquad \qquad \qquad \frac{4}{g(x)}$

$$F\left(\frac{2}{3}\right) = +\infty \quad F(2) = -1$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \quad g(2) = -2$$

Упростим
 $F(x)$ и $g(x)$

$$x_0 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$



$$F'(x) = -\frac{12}{(3x-2)^2}$$

уравнение касательной

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \quad y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

$$g(x) = 2$$

$$y = 2 - \frac{12}{(4)^2} (x - 2) =$$

$$= 2 - \frac{3}{4} (x - 2) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} + 2 = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$$

Найдём $x_0 \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$

$$-2 = \frac{4}{3x_0-2} - 2 - \frac{12}{(3x_0-2)^2} (2-x_0)$$

Найдём касательную
к точке $(2; -2)$ к $F(x)$

$$-2 = \frac{12x_0 - 8 - 24 + 12x_0}{(3x_0-2)^2} = 0$$

$$\frac{24x_0 - 32}{(3x_0 - 2)^2} = -2$$

$$\frac{12x_0 - 16}{(3x_0 - 2)^2} = -1$$

$$\frac{12x_0 - 16 + (3x_0 - 2)^2}{(3x_0 - 2)^2} = 0$$

$$\frac{12x_0 - 16 + 9x_0^2 - 12x_0 + 4}{(3x_0 - 2)^2} = 0$$

$$9x_0^2 - 12 = 0$$

$$x_0^2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

$$24x_0 - 32 = 0$$

$$x_0 = \frac{32}{24} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{4-2} - 2 + \frac{12}{(4-2)^2} \left(x - \frac{4}{3}\right)$$

$$y = 2 - 2 + \frac{12}{4} \left(x - \frac{4}{3}\right)$$

$y = -3x + 4$ — уравнение касательной

$$y = -\frac{9}{2} + 4 = -4,5 + 4 = -0,5$$

$$b(\cdot) \frac{2}{3}$$

$$y = -2 + 4 = 2 \Rightarrow$$

\Rightarrow Касательная проходит через $O_1(2; -2)$ и $\left(\frac{2}{3}; 2\right) \Rightarrow$

\Rightarrow Это единственная такая прямая \Rightarrow Ответ: $a = -3$
 $b = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} & \textcircled{1} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Раскроем $\textcircled{1}$, возведём в квадрат

$$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$$

$$y^2 + (1 - 13x)y + 36x^2 + 6x - 6 = 0$$

Раскроем, как квадратное отношение

y

$$D = 1 - 26x + 169x^2 - 4(36x^2 + 6x - 6) =$$

$$= 25x^2 - 50x + 25 = 25(x-1)^2 = (5(x-1))^2 =$$

$$= (5x - 5)^2$$

$$y = \frac{13x - 1 \pm (5x - 5)}{2}$$

$$y_1 = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = \frac{18x - 6}{2} = 9x - 3$$

$$y_2 = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = \frac{8x + 4}{2} = 4x + 2$$

Раскроем $\textcircled{2}$

$$9x^2 + y^2 - 18x - 12y + 1 + 36 = 82$$

$$(3x-1)^2 + (y-6)^2 = 82$$

Подставим y_1

$$(3x-1)^2 + (4x-9)^2 = 82$$

$$3x = t$$

$$(t-1)^2 + (3t-9)^2 = 82$$

$$t^2 - 2t + 1 + 9t^2 - 54t + 81 = 82$$

$$10t^2 - 56t = 0$$

$$t = 0 \quad x = 0 \quad y = -3$$

$$10t - 56 = 0$$

$$t = 5,6$$

$$x = \frac{5,6}{3} = 1,87 \quad y = 14,8$$

Подставим y_2

Подставим $y_1 = 9x - 3$

$$9x^2 + (9x-3)^2 - 18x - 12(9x-3) = 45$$

$$9x^2 + 81x^2 - 54x + 9 - 18x - 108x + 36 = 45$$

$$90x^2 - 180x = 0$$

$$x = 0 \quad y = -3$$

$$90x^2 - 180 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2 \quad y = 18 - 3 = 15$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставим $y_2 = 4x + 2$

$$9x^2 + (4x + 2)^2 - 18x - 12(4x + 2) = 45$$

$$9x^2 + 16x^2 + 16x + 4 - 18x - 48x - 24 = 45$$

$$25x^2 - 50x = 65$$

$$25x^2 - 50x + 25 = 90$$

$$(5x - 5)^2 = 90$$

$$5x - 5 = \pm 3\sqrt{10}$$

$$1) 5x - 5 = 3\sqrt{10}$$

$$5x = 3\sqrt{10} + 5$$

$$x = 1 + \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad y = 4 + \frac{12\sqrt{10}}{5} + 2$$

$$2) 5x - 5 = -3\sqrt{10}$$

$$5x = 5 - 3\sqrt{10} \quad x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$y = 4 - \frac{12\sqrt{10}}{5} + 2$$

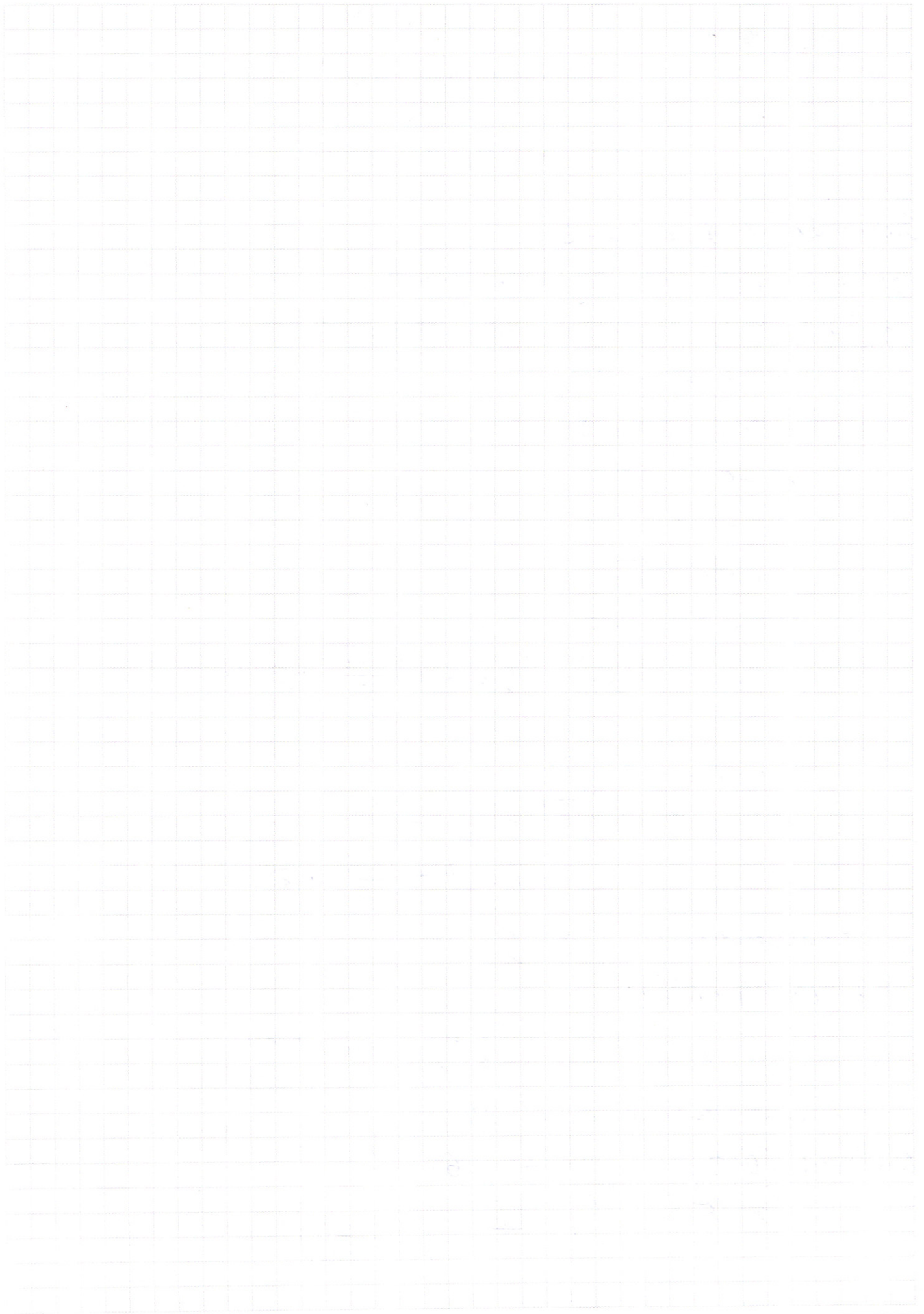
Рассмотрим ODZ

$$xy - 6x - y + 6 \geq 0$$

$$(x-1)(y-6) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x \geq 1 \\ y \geq 6 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x \leq 1 \\ y \leq 6 \end{matrix}$$

Все корни удовлетворяют ODZ

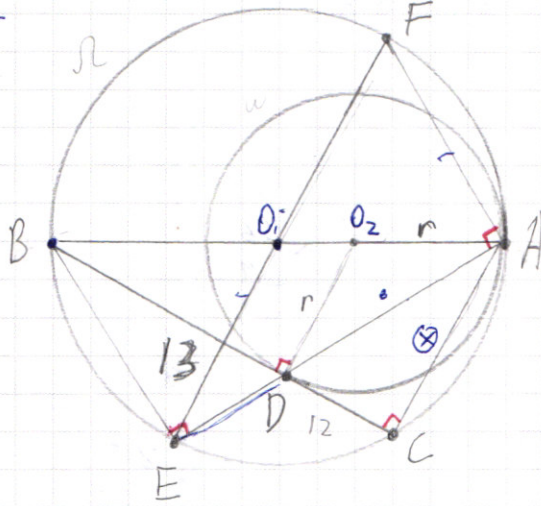
Ответ: $(0; 3)$ $(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}; 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5})$
 $(2; 15)$ $(1 + \frac{3\sqrt{10}}{5}; 6 + \frac{12\sqrt{10}}{5})$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 25^2 \\ \times 13 \\ \hline 325 \\ 625 \\ \hline 3250 \end{array}$$

$$BO_2 = \sqrt{13^2 + r^2}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{13}{25} \quad x = \frac{25r}{13}$$

$$BA = \sqrt{25^2 + \left(\frac{25r}{13}\right)^2}$$

$$BO_2 - BA = r \quad BA - BO_2 = r$$

$$\sqrt{25^2 + \left(\frac{25r}{13}\right)^2} - \sqrt{13^2 + r^2} = r$$

$$\frac{\sqrt{13^2 + r^2}}{\sqrt{13^2 + r^2} + r} = \frac{13}{25}$$

$$\frac{r}{\sqrt{13^2 + r^2}} + 1$$

$$x = \frac{25 \cdot 0,2}{13}$$

$$\frac{25^2 + 25^2 \cdot 0,2^2}{13^2} = 2$$

$$25^2 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2 + 13^2 + r^2 - \sqrt{\left(25^2 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2\right) \cdot (13^2 + r^2)} = r^2$$

$$r = 21,2$$

$$\frac{r + \sqrt{13^2 + r^2}}{\sqrt{13^2 + r^2}} = \frac{25}{13}$$

$$\frac{145}{25} + 1 =$$

$$\frac{r}{\sqrt{13^2 + r^2}} + 1 = \frac{25}{13}$$

$$\frac{25}{13} - \frac{13}{13} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 156 \\ \hline 212 \end{array}$$

$$\frac{r^2}{13^2 + r^2} = \frac{12^2}{13^2} = 13 \sqrt{\frac{34}{5}}$$

$$13 \sqrt{\frac{145 \cdot 20}{5} + 1} = \begin{array}{r} \times 13 \\ 12 \\ \hline 26 \\ 13 \\ \hline 156 \\ 5 \end{array}$$

$$21,2$$

$$1 + \frac{13^2}{r^2} = \frac{13^2}{12^2}$$

$$\frac{13^2}{r^2} = \frac{13^2 - 12^2}{12^2}$$

$$r^2 = \frac{13^2 \cdot 12^2}{13^2 - 12^2} = \frac{13^2 \cdot 12^2}{25} \quad r = \frac{13 \cdot 12}{5} =$$

$$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 45 \\ -37 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} +37 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$$

$$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 45 - 9 - 36 = 8$$

$$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 8$$

$$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 2 \\ \hline 26 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 2 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$y^2 + (1-13x)y + 36x^2 + 6x - 6 = 0$$

$$1 - 26x + 169x^2 - 144x^2 - 24x$$

$$(3x-1)^2 + (9x-9)^2 = 8$$

$$(3x-1)^2 + (3(3x-3))^2 = 8$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 16,8 \\ \hline 1512 \\ - 3 \\ \hline 148,2 \end{array}$$

$$xy - 6x - y + 6 \geq 0$$

$$(x-1)(y-6) \geq 0$$

$$xy - 6x - y + 6$$

$$1) x \geq 1, y \geq 6$$

$$2) x \leq 1, y \leq 6$$

$$9x^2 + (4x+2)^2 - 18(4x+2) - 12(4x+2) = 45$$

$$9x^2 + 16x^2 + 16x + 4 - 18x - 48x - 24 = 45$$

$$25x^2 - 50x - 20 = 45$$

$$25x^2 - 50x = 65 \quad x_1 =$$

$$5x^2 - 10x = 13$$

$$5(x^2 - 2x + 1) - 5 = 13$$

$$5(x-1)^2 = 18 \quad (x-1)^2 = \frac{18}{5} = \frac{9 \cdot 2}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a^{\log_b c} = (c^{\log_c a})^{\log_b c} = c^{\log_c a \cdot \log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$144 + 25 = 169$$

$$c^{\log_5 12} = ? \quad \frac{13}{39} \left(\frac{12}{13}\right)^n + \left(\frac{5}{13}\right)^n \geq 1$$

$$\frac{13}{169}$$

$$\frac{12^n + 5^n}{13^n} \geq 1$$

$$x^2 = 2x^{2-1}$$

$$12^n + 5^n - 13^n \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 48 \\ + 18 \\ \hline 66 \\ - 16 \\ \hline 50 \end{array}$$

\log_a

$$\log_5 12 + (\log_5 12 - 1) + 1 \sqrt{\quad}^n$$

$$t^{\log_5 12 - 1} + 1 \geq t^{\log_5 13 - 1}$$

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + 1$$

$$\begin{array}{r} -20 \\ 65 \end{array}$$

$$2 \sqrt{12^{\log_5 t} + 1}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 54 \\ \hline 172 \\ + 108 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1$$

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 12 \\ 9 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

$\tan \alpha = ?$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 283 \\ \hline 17 \\ \hline 272 \end{array} \quad \frac{-289}{17} = -17$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 1} = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha) + 1}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos(2\beta) = -\frac{1}{17}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \\ - 17 \\ \hline 255 \end{array}$$

$$\sin(2\beta) = \pm \sqrt{1 - (\cos 2\beta)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{17}{289}}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \frac{17}{289}} = \pm \sqrt{\frac{272}{289}} = \pm \frac{\sqrt{272}}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{272}}{17} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ 15 \\ \hline 175 \\ 15 \\ \hline 275 \end{array}$$

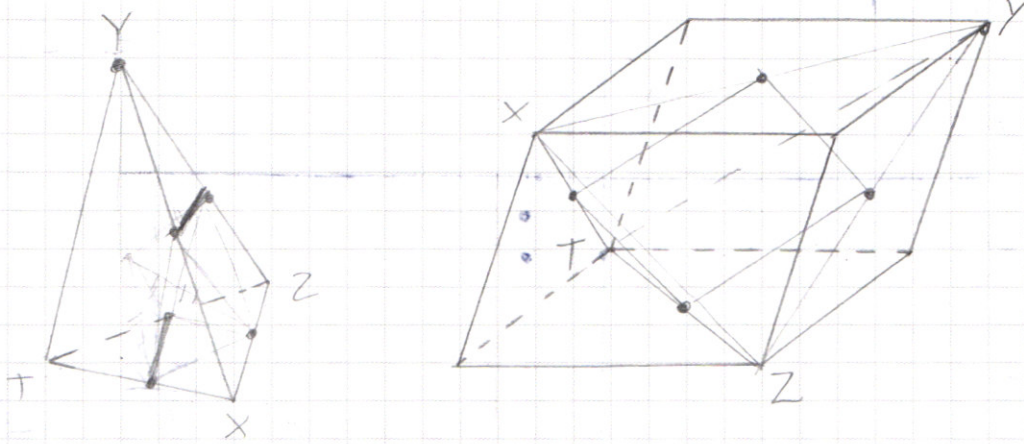
$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 225 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{272}}{17} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}} = \sqrt{1 - \frac{225}{256}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$$

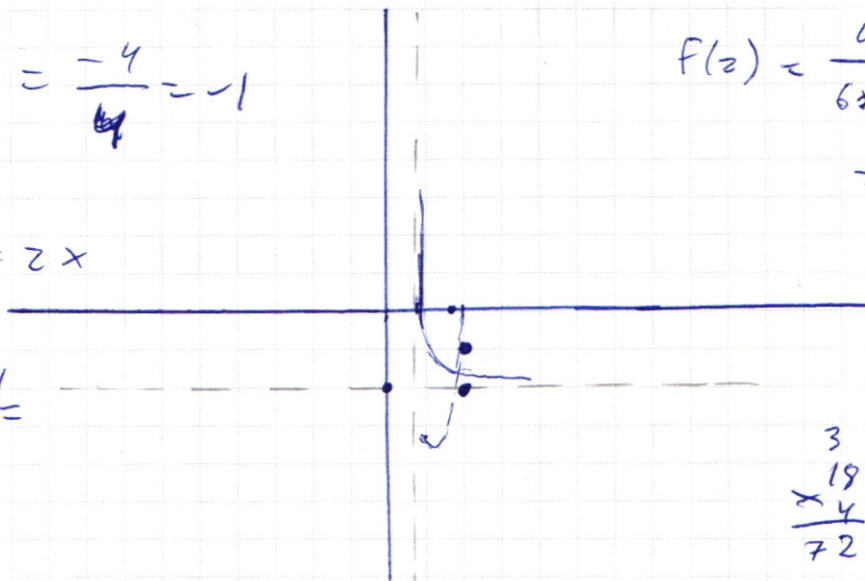
$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ \times 2 \\ \hline 36 \\ \times 6 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} \end{array}$$

$$\frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$F(2) = \frac{4}{6-2} + 2 = -1$$

$$x^2 = 2x$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} = -\frac{1}{x^2}$$



17

$$\begin{array}{r} 3 \\ 19 \\ \times 4 \\ \hline 72 \\ \frac{51}{\times 2} \\ \hline 102 \end{array}$$

$$g(2) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 =$$

$$72 - 102 + 28 = -2$$



$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 =$$

$$= 8 - 34 + 28 =$$

$$3 \cdot 6 - 34 = -2$$

$$F(x) = \frac{4}{3x-2} = 4 \left(\frac{1}{3x-2} \right) =$$

$$F'(x) = 4 \left(\frac{1}{(3x-2)^2} \cdot 3 \right) =$$

$$= \frac{12}{(3x-2)^2}$$

$$g = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow$$

\Rightarrow

