МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

1) Давайте запишем все простые числа p до 24 и $f(p)$:

$f(1)=0$ $f(5)=1$ $f(13)=3$ $f(23)=5$

$f(2)=0$ $f(7)=1$ $f(17)=4$

$f(3)=0$ $f(11)=2$ $f(19)=4$

2) Теперь поймем как найти $f(x)$, если x – сост. число.

Запишем x как произведение степеней его простых множителей (т.е. факторизуем), напр $12=2^2\cdot3^1$, или $x=a_1^{b_1}\cdot a_2^{b_2}\cdot\ldots$

3) Тогда $f(x)=f(a_1^{b_1})+f(a_2^{b_2})+\ldots=b_1\cdot f(a_1)+b_2\cdot f(a_2)+\ldots$;

т.к. $f(p^n)$ [p - простое] $=f(p)+f(p^{n-1})=2f(p)+f(p^{n-2})+\ldots=n\cdot f(p)$.

Например, $f(3^5)=f(81)=f(3)+f(3)+f(3)+f(3)+f(3)=0=$
$=5f(3)$; а $f(12)=2\cdot f(2)+1\cdot f(3)=0$.

4) Из п.3, найдем $f(a)$, где $a\in Z$; $a\in[1;24]$.

1	$f(1)=0$	13	$f(13)=3$
2	$f(2)=0$	14	$f(14)=1$
3	$f(3)=0$	15	$f(15)=1$
4	$f(4)=0$	16	$f(16)=0$
5	$f(5)=1$	17	$f(17)=4$
6	$f(6)=0$	18	$f(18)=0$
7	$f(7)=1$	19	$f(19)=4$
8	$f(8)=0$	20	$f(20)=1$
9	$f(9)=0$	21	$f(21)=1$
10	$f(10)=1$	22	$f(22)=2$
11	$f(11)=2$	23	$f(23)=5$
12	$f(12)=0$	24	$f(24)=0$

$f(a)=0$; $a\in\{1;2;3;4;6;8;9;12;16;18;24\}$

$f(a)=1$; $a\in\{5;7;10;14;15;20;21\}$

$f(a)=2$; $a\in\{11;22\}$

$f(a)=3$; $a\in\{13\}$

$f(a)=4$; $a\in\{17;19\}$

$f(a)=5$; $a\in\{23\}$

5) Заметим интересный факт: $f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})$, (здесь и далее $a\in N$)

отсюда $f(\frac{1}{a})=f(1)-f(a)=0-f(a)=-f(a)$.

Соотв; $f(\frac{b}{a})=f(b)-f(a)$.
[$b\in N$]

см. стр. 2

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$5^{\log_a b} = 5^{\frac{\log_5 b}{\log_5 a}} = b^{\frac{1}{\log_5 a}} = b^{\log_a 5}$

$x^2+18a=a$

$5^{\log_{12} a} + a \geq |a|^{\log_{12} 13}$

$288 \cdot 2^2 = 576$

$a^{\log_{12} 5} + a^1 \geq |a|^{\log_{12} 13}$

≈ 30

$\log_{12} 13 = \log_{12} 5 + \log_{12} \frac{13}{5}$

$361 + 576 = 937$

$\frac{-18+30}{2} = 12$

$a^{\log_{12} 5} + a^1 \geq |a|^{\log_{12} 5} \cdot |a|^{\log_{12} \frac{13}{5}}$

$144 + 12 \cdot 18^2 = 300^2$

$a^{\log_{12} 12 + \log_{12} \frac{5}{12}} \cdot a + a^1 \geq |a|^{\log_{12} 12} \cdot |a|^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$\cancel{a}\left(a^{\log_{12} \frac{5}{12}} + 1\right) \geq a \cdot a^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$x^2 + 18x + 70 > 0$

$a^{\log_{12} 13} = 13^{\log_{12} a}$

$5^{\log_{12} a} + a \geq 13^{\log_{12} a}$

$18^2 = 324$

$5^{\log_{12} a} + 12^{\log_{12} a} \geq 13^{\log_{12} a}$

$324 + 578 =$

$5^x + 12^x \geq 13^x$

$x = 1$: много

$x = 0$: много

$x = -1$: мало

$2 \geq 13^0$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{13}$

$\frac{12+5}{60} = \frac{17}{60} \geq \frac{1}{13}$

$330 - 242 =$

$= 130 - 42 =$

$= 90 - 12 =$

$= -18$

$\frac{-18-30}{2} =$

$5^2 + 12^2 \geq 13^2$

$\log_2 12$

$572 - 68 = 504$

$= -24$

$-18 - 68 = -\frac{86}{4}$

$\frac{-18+30}{2} = 12$

$(5^t)' = t' \cdot \ln(5) \cdot 5^t$

$20 + 28$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 < 0$

$-8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{330}{4} - 17 = \frac{-242 + 330 - 68}{4} = 572 - 68 = \frac{504}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

№5 (продолжение)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) Тогда, из п. 5, $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) < f(y)$ $\boxed{1}$ $[x, y \in \mathbb{N};\ 1 \le x, y \le 24]$

Давайте переберем значения $f(x)$ и подходящие для них $f(y)$.

$f(x) = 0$: сущ-в 11 x

$f(x) = 1$: сущ-в 7 x

$f(x) = 2$: сущ-в 2 x

$f(x) = 3$: 1 x

$f(x) = 4$: 2

$f(x) = 5$: 1

Пусть $g(k)$ = кол-во таких (x, y) удв. условию $\boxed{1}$, что $f(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$g(0) = 11$ $\quad g(3) = 1$

$g(1) = 7$ $\quad g(4) = 2$

$g(2) = 2$ $\quad g(5) = 1$.

Итак, при $g(x) = 0$: $g(y) \ge 1 \Rightarrow$ имеем $(7 + 2 + 1 + 2 + 1) = 13$ вар-тов и $11 \cdot 13$ способов это выбрать (т.к. выбираем x (11 вар-тов) и независимо y (13 вар-тов))

при $g(x) = 1$ имеем $7 \cdot (2 + 1 + 2 + 1) =$

$= 7 \cdot 6$ способов

при $g(x) = 2$: $2 \cdot 4$

$g(x) = 3$: $1 \cdot 3$

$g(x) = 4$: 2

$g(x) = 5$: 0

Отсюда, суммарно есть $11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2$ способов,

т.е. $143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 198$ способов

Ответ: 198 способов (пар)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} xy-x-2y+2 \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-1)-2(y-1) \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(x-2) \geq 0 \\ y \leq \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \\ y \leq \frac{x}{2} \end{cases}$.

1) Распишем 2-е уравн:

$(x^2-4x+4-4)+(9y^2-18y+9-9)=12$

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$; $(x-2)^2+9(y-1)^2=25$. Это эллипс с центром $(2;1)$.

2) 1-е уравн:

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0$

$x^2+x(1-5y)+(4y^2+2y-2)=0$

$D=(1-5y)^2-4(4y^2+2y-2)=25y^2+1-10y-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$

$x_{1,2}=\frac{5y-1\pm 3(y-1)}{2}$; $x_1=\frac{8y-4}{2}=4y-2$; $x_2=\frac{2y+2}{2}=y+1$

3) Подставим эти корни в ур-е эллипса:

~~x_1: $(4y-3)^2+9(y-1)^2=25$; $16y^2-24y+9+9y^2-18y+9=25$;~~

~~$25y^2-42y-7=0$~~

~~$D=42^2+700=1600+4+84+700=2388=4\cdot 693=4\cdot 9\cdot 77=$~~

~~$=(\sqrt{77}\cdot 6)^2$~~

~~$y_{1,2}=\frac{42\pm 6\sqrt{77}}{50}$, $x_{1,2}=\frac{168\pm 24\sqrt{77}}{50}-50=\frac{118\pm 24\sqrt{77}}{50}$~~

x_1: $(4y-4)^2+9(y-1)^2=25$; $16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$; $y_1=2$, $y_2=-1$

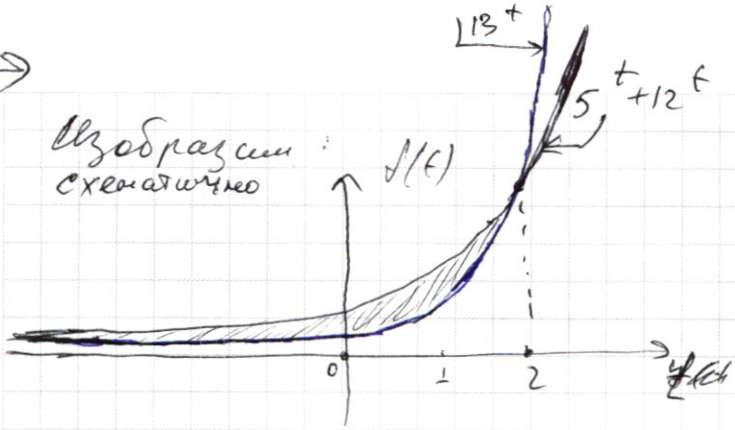
$x=4y-2$ $(y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2})$

(2 корня т.к. кв. ур-е, не более 2 корней)

см. стр. 6

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Изобразим схематично:



т.к. $5^t+12^t=13^t$ имеет 2 корня: $-\infty$; 2, то при t на промежутке $[-\infty; 2]$: $5^t+12^t \geq 13^t$ (что можно проверить, взяв $t=1$: $5+12 \geq 13$),

отсюда $t \leq 2$

$\log_{12} a \leq 2 \Rightarrow a \leq 144$

$x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{324+576}}{2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{900}}{2}$

$x \in \left[\dfrac{-18-\sqrt{900}}{2}; \dfrac{-18+\sqrt{900}}{2}\right] \Leftrightarrow x \in [-24; 12]$

Проверим ОДЗ: $x^2+18x>0$; $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$\begin{cases} x \in [-24; 12] \\ x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 12]$

Ответ: $x \in [-24; 18) \cup (0; 12]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

1) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$; $x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$; пусть $x^2+18x=a$, $a>0$,

Отсюда $a=|a|$ и $a>0$.

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$

Заметим полезный факт: $a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$,

т.е. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Тогда неравенство можно переписать как:

$5^{\log_{12}a} + a \geq 13^{\log_{12}a}$

$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a}$; пусть $\log_{12}a = t$.

2) $5^t + 12^t \geq 13^t$.

Поймем, сколько корней у ур-я $5^t+12^t=13^t$:

5^t – монотонно возр ф-я (свойство экспоненты)

12^t – монотонно возр, Отсюда 5^t+12^t тоже монот. возр,

13^t тоже монот. возр.

~~а так как слева и справа экспоненты монотонно возр. ф-ии, то они имеют не более 1 корня. Подбором поймем, что этот корень $t=2$. 5^t+12^t [illegible]~~

5^t+12^t – вогнутая ф-я

13^t – тоже вогнутая ф-я.

Отсюда $5^t+12^t=13^t$ имеет не более 2 корней.

Поймем, что это за корни: $t_1=2$; $(25+144=169)$; $t_2\to-\infty$ $(0+0=0)$.

$5^t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t\to-\infty$.

см. п.4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_2: x = y + 1 \quad (y = x - 1)$

$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$10(y-1)^2 = 25$; $(y-1)^2 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$; $|y-1| = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow y_{12} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1$

$y_{22} = -\sqrt{\frac{5}{2}} - 1$

4) теперь найдем соотв. этим y x-ы.

$x_1 = 4y - 2$: $y_{11} = 2$; $y_{21} = -1 \Rightarrow x_{11} = 8 - 2 = 6$; $x_{21} = -6$

$x_2 = y + 1$: $y_{12} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \to x_{12} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 2$; $y_{22} = -\sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \to x_{22} = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

Проверим ОДЗ

рис 1

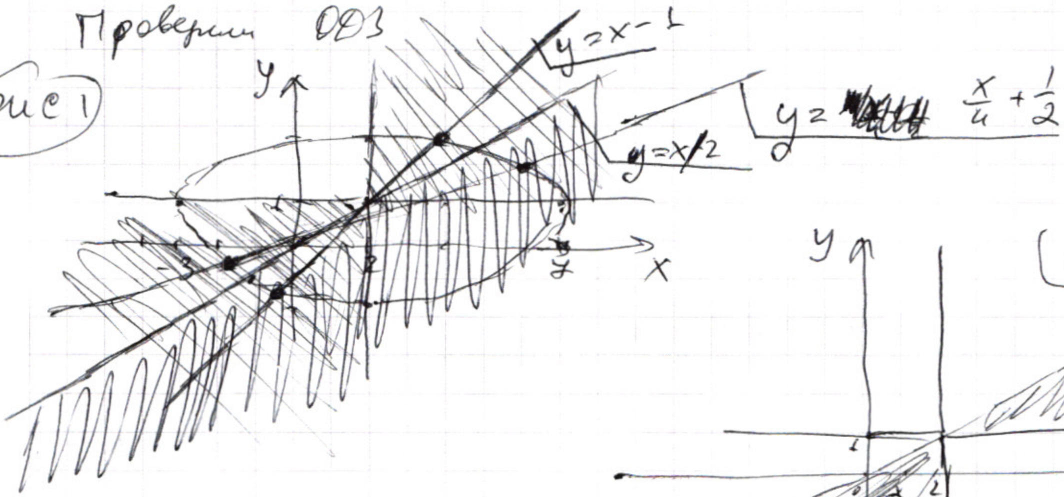
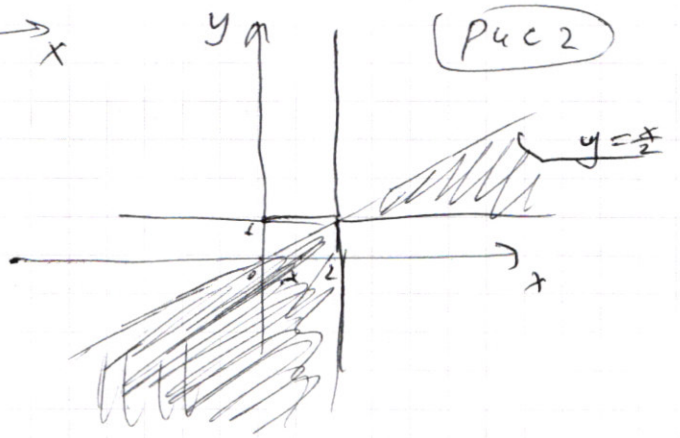


рис 2



Заштрих. обл-ть на рис 2 — это ОДЗ.

Проверим ОДЗ аналитически.

Имеем точки (см. п. 4)

$A(6; 2)$; $B(-6; -1)$; $C\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + 2; \sqrt{\frac{5}{2}} + 1\right)$; $D\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)$.

$y \le \frac{x}{2}$: не уд: B, C.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 1 \\ x \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 1 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right.$: не уд: $\varnothing$ (т.к. $\sqrt{\frac{5}{2}} > 1$).

Тогда Ответ: $(x_1, y_1) = (6; 2)$; $(x_2; y_2) = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)$.

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta \overset{(1)}{=} 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$;

$\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = \frac45$; $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

1) $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt5}$: $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$; $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$;

$\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

1) $\sin 2\alpha = -\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} \to -2\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}+\cos 2\alpha = -1$; $-2\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-\cos 2\alpha$;

$\cos 2\alpha = t \to -2\sqrt{1-t^2} = -1-t$; $-1-t \le 0 \to -1 \le t$; $t \ge -1$

$t\in[-1;1]$ $\quad 4(1-t^2) = 1+t^2+2t$

$4-4t^2-t^2-1-2t=0$; $-5t^2-2t-3=0$

$t_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{-10} = \frac{2\pm8}{-10} = -1; \frac35$

2) $\sin 2\alpha = +\sqrt{1-t^2}$

$2\sqrt{1-t^2} = -1-t$; $-1-t \ge 0 \Rightarrow -1 \ge t \Rightarrow t \ge -1$

$4(1-t)^2 = 1+t^2+2t$; $t_{1,2} = -1; \frac35 \to t = -1$.

$\cos 2\alpha \in \{-1; \frac35\} \to \sin 2\alpha \in \{1; \frac45; -\frac45\}$

2) $\sin 2\beta = -\sqrt{\frac15}$, $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$, $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha = -1+\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = t$; $\pm 2\sqrt{1-t^2} = -1+t$; 1) $-1+t\le 0$; $t\le 1$
2) $-1+t \ge 0$; $t \ge 1$; $t \le 1$

расс. (1) $-2\sqrt{1-t^2} = -1+t$; $+4(1-t^2) = t^2+1-2t$

$-4t^2+4 = t^2+1-2t$

$-5t^2+2t+3=0$

$t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{-10} = \frac{-2\pm8}{-10} = 1; -\frac35$

(2) не расс. т.к $t=1$ уже есть такой корень.

Получаем, что $\cos 2\alpha_{1,2,3,4} = \pm 1; \pm\frac35$

$\sin 2\alpha_{1,2,3,4} = 0; 0; \pm\frac45$.

см стр 8

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1 (прод.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассм $\cos 2\alpha = 1$; $\sin 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $|\cos^2\alpha| = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$$tg^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1 - \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \frac{2 - \cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$$

$$|tg\,\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}} \Rightarrow \cos 2\alpha \neq -1$$

$\cos 2\alpha \in \left\{\pm 1; \pm \frac{3}{5}\right\}$

$\cos 2\alpha = 1 \Rightarrow |tg\,\alpha| = \sqrt{0} \Rightarrow tg\,\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow |tg\,\alpha| = \sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow tg\,\alpha = \pm\frac{1}{2}$

$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow |tg\,\alpha| = \sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}} = 2 \Rightarrow tg\,\alpha = \pm 2$

Ответ: $tg\,\alpha \in \left\{-2; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

$38^2 = (40-2)^2 = 1600+4-160 = 1444$

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{(4x+3)\cdot 3+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} \Rightarrow$$ гипербола; асимпт: $x = -\frac{3}{4}$

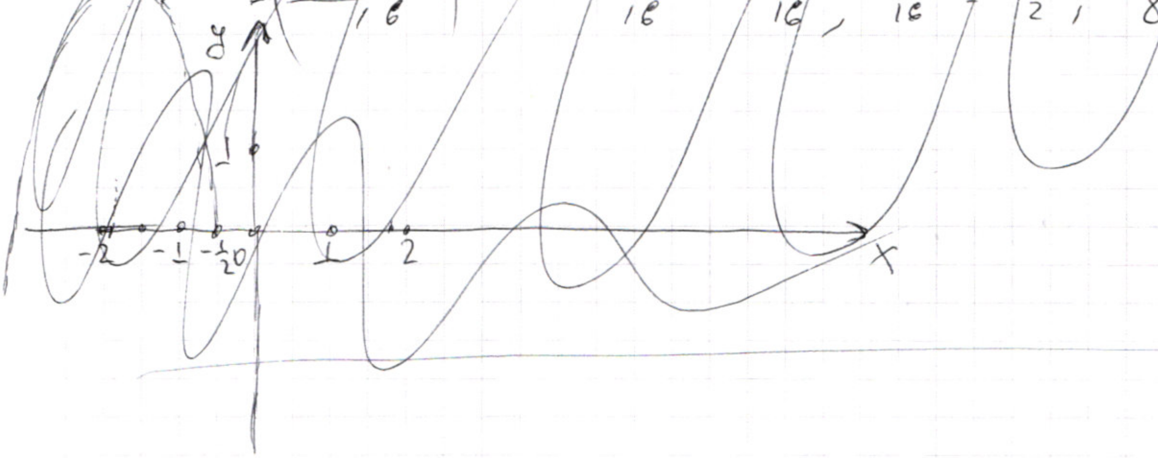
$-8x^2-30x-17 = f(x)$; парабола

$$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$$

$$y_в = -8\cdot\frac{15^2}{8^2} + \frac{30\cdot 15}{8} + 17 = -\frac{15^2}{8} + \frac{450}{8} + \frac{136}{8} = \frac{225+136}{8} = \frac{461}{8}$$

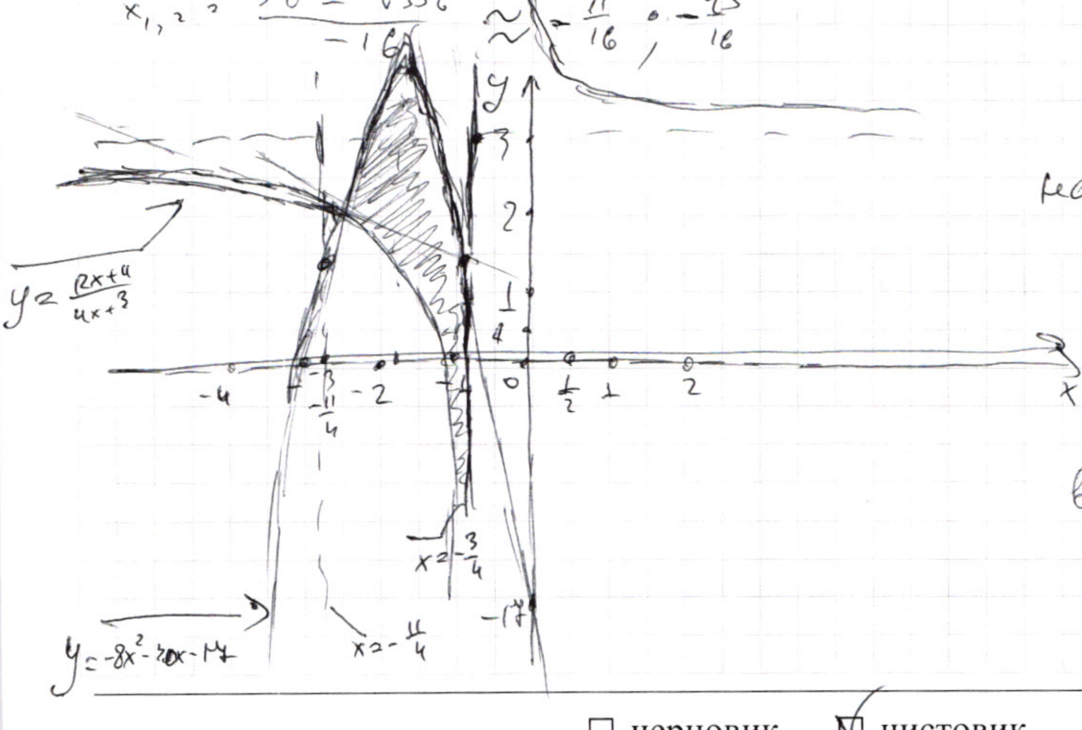
$-8x^2-30x-17=0$, $D = 900+32\cdot 17 = 900+320+224 = 1220+224 = 1444 = 38^2$

$$x_{1,2} = -\frac{30\pm 38}{16} = -\frac{38\pm 30}{16} = -\frac{8}{16};\ \frac{68}{16} = -\frac{1}{2};\ -\frac{38}{8}.$$



$D = 900 - 32\cdot 17 = 900 - 320 - 224 = 580 - 224 = 340 - 4 = 356 \approx 19^2$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{356}}{-16} \approx -\frac{11}{16};\ -\frac{49}{16}$$



$$\frac{12x+4}{4x+3} \le f(x) \le -8x^2-30x-17$$

нам подходит заштрих обл-ть и все прямые, которые на промеж-ке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ в ней лежат.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (прод)

пусть $\frac{12x+11}{4x+3} = f(x)$

$-8x^2 - 30x - 17 = g(x)$

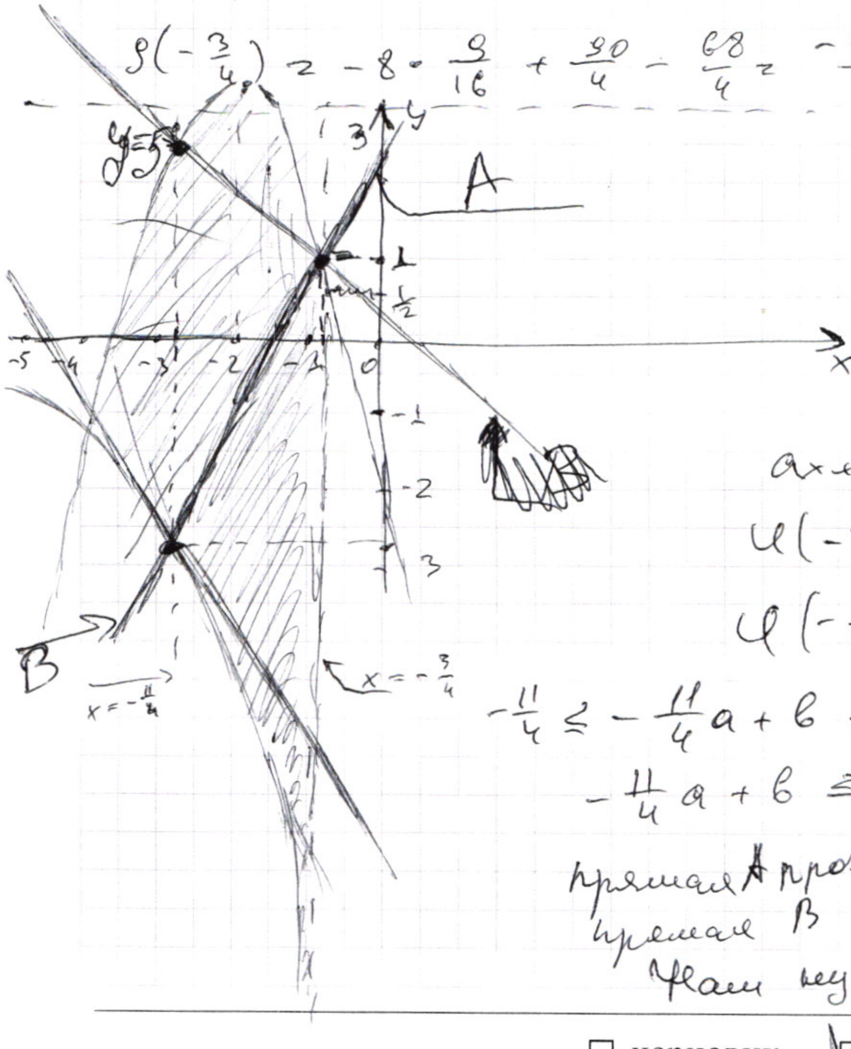
$f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-33+11}{-8} = \frac{22}{-8} = -\frac{11}{4}$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{330}{4} - \frac{68}{4} = \frac{-242+330-68}{4} = \frac{88-68}{4} =$

$= \frac{20}{4} = 5.$

$f\left(-\frac{3}{4}\right)$ ~~ничто~~ не опред.

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{90}{4} - \frac{68}{4} = \frac{-18+90-68}{4} = \frac{72-68}{4} = 1.$



На промежутке $\left[-\frac{11}{4}; \frac{3}{4}\right)$ прямая $ax+b$ проходит только в заштрих. обл-ти

$ax+b = \varphi(x)$

$\varphi\left(-\frac{11}{4}\right) \in \left[-\frac{11}{4}; 5\right]$

$\varphi\left(-\frac{3}{4}\right) \in (-\infty; 1]$

$-\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le 5$

$-\frac{11}{4}a + b \le 1$

прямая A прох. через точки $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ и $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{11}{4}\right)$

прямая B через точки $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$.

Нам нужны все прямые между (не успел)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$; $x^2+18x = a$

$5^{la} + x^2 \geq |a|^{l13} - 18x$

$5^{la} + a \geq |a|^{l13}$

$5^{la} - |a|^{l13} \geq -a$

$f(ab) = f(a) + f(b)$, 578

$f(x \cdot y^{-1}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{x})$

$f(1) = 0$ $\quad f(5) = 1$ $\quad f(13) = 3$ $\quad f(23) = 5$

$f(2) = 0$ $\quad f(7) = 1$ $\quad f(17) = 4$

$f(3) = 0$ $\quad f(11) = 2$ $\quad f(19) = 4$

$f(6) = f(2) + f(3)$

$f(12) = f(4) + f(3) = f(2) + f(2) + f(3) = 2f(2) + f(3)$

$f(-1) = -1$

~~$f(6) = f(-2) + f(-3) = -1 - 1 = -2$~~

$f(\forall x < 0) \in \varnothing$

$f(0.1) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = \frac{2 \cdot 5}{100}$

$f(0,1) = f(10) + f(\frac{1}{100})$

$f(23) = f(23) + f(1)$

$f(\frac{1}{3}) = f(1) - f(3)$ (?) да

$f(\frac{1}{3}) = f(1) + f(\frac{1}{3}) = f(3) + f(\frac{1}{9}) = f(9) + f(\frac{1}{27}) = 2f(3) + f(\frac{1}{54}) =$

$= f(19) + f(\frac{1}{3 \cdot 19}) = 4 + f(\frac{1}{57})$

$f(1) = f(3) + f(\frac{1}{3}) = f(19) + f(\frac{1}{19}) = 4 + f(\frac{1}{19}) \Rightarrow f(\frac{1}{19}) = -4$

$f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ $\quad f(x) = 0 : x \in \{1;$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$\frac{12x+4}{4x+3} = -8x^2 - 30x + 7$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(6) = 0$

$f(14) = 2$

$f(15) = 1$

$f(21) = 3$

$f(22) = 4$

$32 \cdot 17 = 510 + 34 = 544$

$32 \cdot 17 = 30 \cdot 17 = 510 + 34 = 544$

$32 \cdot 17 = 320 + 32 \cdot 7 = 320 + 210 + 14 = 544$

$11 \cdot 13 = 130 + 13 = 143$

$18 - 5 = 13$

10 км

□ черновик □ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{x \geq 2y}$

$(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 + 4y^2 - 4xy = xy - x - 2y + 2$

$x^2 + 4y^2 - 5xy + x + 2y - 2 = 0 \rightarrow \left[x^2 + x(1-5y) + (4y^2 + 2y - 2) = 0 \right.$ ①

неир

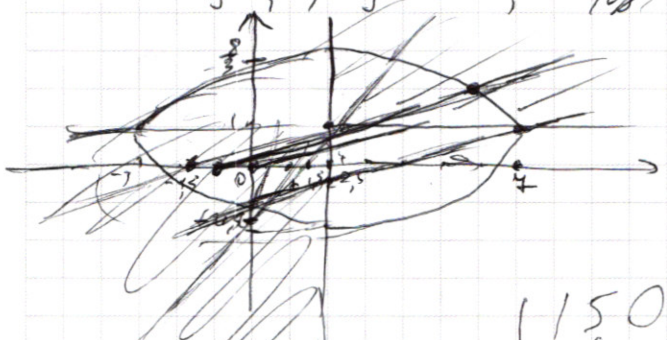
① $D = 25y^2 + 1 - 10y - 16y^2 - 8y + 8 = 9y^2 - 18y + 9 = (3y-3)^2$

$x_{1,2} = \frac{5y \pm (3y-3)}{2}$ | $x_1 = \frac{8y-3}{2} = 4y - 1,5$ ① ; $x_2 = \frac{2y+3}{2} = y + 1,5$ ②

$\sqrt{2388} \approx \sqrt{2500} \approx 48$

$x = 4y - 1,5;\ 4y = x + 1,5$

$x = 4 - 1,5 = 2,5$



① $(4y - 1,5 - 2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$(4y - 3,5)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$3,5^2 = 12,25$; $4 \cdot 3,5 = 14$

$16y^2 + 12,25 - 14y + 9y^2 + 9 - 18y = 25$

$25y^2 - 32y + 21,25 = 25$

1150
44

$25y^2 - 32y - 3,75 = 0$

$3,75 \cdot 2 = 7,5 \cdot 2 = 15$

$y_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 + 1500}}{50}$ 1525 $(?)^2$

$25 - 9 = 16$

$(y + 1,5 - 2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

1194
597
231

$15,75 \cdot 2 = 31,5 \cdot 2 = 62$

$y^2 + 0,25 - y + 9y^2 + 9 - 18y = 25$

$2388 \mid 2$

$860 + 21$

2524 | 2
1262 | 2
631

$10y^2 + 9,25 - 19y = 25$

$5y - 1 - 3 + 1$

$10y^2 - 19y - 15,75 = 0$

$(80+1)^2$

$D = 361 + 620 = 361 + 620 = 981 = 3^2 \cdot 109$?

$981 = 900 + 81 = 9 \cdot 109$

$15 \cdot 25 = \frac{1500}{4} = \frac{750}{2} = 375$, $1024 + 375 = 1399$

$16y^2 - 24y + 9 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$5y - 1 - 3y + 3 = \frac{2y+2}{2}$

$1600 = 40^2$

$25y^2 - 32y + 18 = 25$; $25y^2 - 32y - 7 = 0$

$D = 32^2 + 100 \cdot 7 = 1724$

1724 | 2
862 | 2
431

$\frac{5y - 1 + 3y - 1}{2} = \frac{8y - 2}{2} = 4y - 1$

$\frac{8}{11} - = \frac{91-}{88} - = \frac{23-}{9\,11} = \frac{23-}{44 + 231} - = \frac{8+11-}{11 + \frac{3}{231}}$

88

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$tg^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$

$\sin 2x =$

$tg 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\sin(2x+\frac{\pi}{2})}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{2\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{10}$

$tg 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$2\cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha$

$ctg 2x = \frac{\cos x}{\sin 2x} =$

$\sin x + \sin y$

(2) $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{10}$

(1, 2) $2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{10}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{10}$; $+1\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{10} = \cancel{\frac{2\sqrt5}{2\sqrt5\sqrt5}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt5}}$ $\sin$

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5} =$

$= -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$; $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$; $\cos 2\alpha = -1 - 2\sin 2\alpha$; $\sin 2\alpha = t$; ОДЗ

$\sqrt{1-t^2} = -1-2t$

$1 - t^2 = 1 + 4t^2 + 4t$

$5t^2 + 4t = 0$; $t = 0$?; $5t = -4$; $t = -\frac{4}{5}$

$t = -\frac{4}{5} = \sin 2\alpha \Rightarrow |\cos 2\alpha| = \sqrt{1-\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5}$

$ctg 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$; $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5}$;

$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$

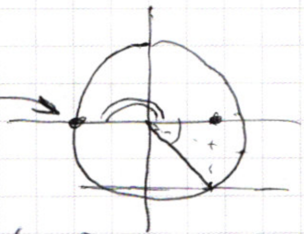
$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = \left[\begin{matrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \end{matrix}\right.$; $\cos 2\alpha = \left[\begin{matrix} -1 \\ \frac{3}{5} \end{matrix}\right.$ (TK!)

1) $|\cos\alpha|^2 = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5}$



$\sin^2\alpha = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{5-3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow |\sin\alpha| = \frac{1}{\sqrt5}$ (есть еще отр корни!)

$tg^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow |tg\,\alpha| = \frac{1}{2}$

2) $tg\,\alpha = 0$ зн $\sin\alpha = 0$; $\cos 2\alpha = -1$; $\cos^2\alpha = \frac{1-1}{2} = 0$ (?)

~~$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) =$~~

N2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$$

ОДЗ

$(x^2-4x+4)-4+(9y^2-18y+9)-9=12$

3.2. $(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$ (эллипс?)

$xy-x-2y+2 = x(y-1)-2(y-1) = (y-1)(x-2) \geq 0$

$x-2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$; $x^2+4y^2-4xy = (y-1)(x-2) = xy-x-2y+2$

$x^2+4y^2-5xy+(x+2y)-2=0$

$x^2+4y^2+4xy-9xy+(x+2y)-2=0$

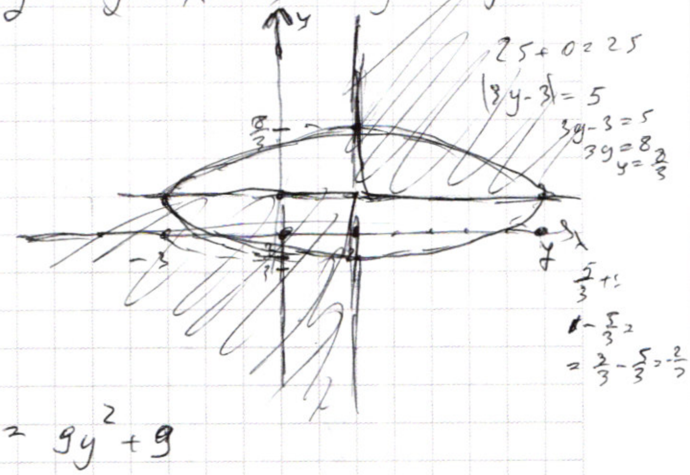
$(x+2y)^2+(x+2y)-9xy-2=0$

$x^2-5xy+x+4y^2-2y-2=0$

$x^2+x(1-5y)+(4y^2+2y-2)=0$

$D = 25y^2+1-10y-16y^2-8y+8 = 9y^2+9$

$x_{1,2} = \frac{5y-1 \pm 3\sqrt{y^2+1}}{2}$



черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)