МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $\angle CDA = \alpha \Rightarrow \angle DO_2A = 2\alpha$ (угол между касательной и хордой), ~~Зн~~ $\angle DO_2B = 180^\circ - 2\alpha$;

$\angle O_2AD = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$.

из $\triangle BO_2D$

$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{BD}{BO_2} = \frac{13}{2R_1 - R_2} = \frac{13}{65 - 31{,}2} = \frac{13}{33{,}8} = \frac{130}{338} =$

$= \frac{65}{169}$;

~~$180^\circ - 2\alpha =$~~

$\sin 2\alpha = \frac{65}{169} = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\frac{65^2}{169^2} = 4\cdot\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha)$

$4\cdot\sin^2\alpha - 4\cdot\sin^4\alpha - \frac{65^2}{169^2} = 0$;

~~Замена:~~

$\sin^2\alpha = t,\ t\in[0;1]$

$4t - 4t^2 - \frac{65^2}{169^2} = 0$;

$4t - 4t^2 - \frac{5^2\cdot 13^2}{13^4} = 0$;

$4t - 4t^2 - \frac{5^2}{13^2} = 0$;

$\times\begin{array}{r}169\\4\\\hline 676\end{array}$

$676t - 676t^2 - 25 = 0$;

$-676t^2 + 676t - 25 = 0$;

$676t^2 - 676t + 25 = 0$;

$D = 676^2 - 4\cdot 25\cdot 676 = 676(676-100) =$

$= 676\cdot 576 = 26^2\cdot 24^2 = (26\cdot 24)^2$

$t_{1,2} = \frac{676 \pm 26\cdot 24}{1352} = \frac{676 \pm 624}{1352}$

Если $t_1 = \frac{676-624}{1352} =$

$= \frac{52}{1352} \Rightarrow \alpha$ - маленький

$t = \frac{1300}{1352} = \frac{650}{676} = \frac{325}{338}$;

угол, ~~т. есть~~ $\angle BAE > \angle EBA$ $\sin^2\alpha = \frac{325}{338}$;

(по условию не может такого быть)

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{325}{338}} = \frac{EA}{AB} = \frac{EA}{65}$

$EA = \sqrt{\frac{325\cdot 65^2}{338}} = \frac{65\sqrt{325}}{\sqrt{338}}$;

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{EA}{2\cdot\sin\angle AFE}=32{,}5$$

$$\frac{EA}{\sin\angle AFE}=65;$$

$$\sin\angle AFE=\frac{EA}{65}=\frac{\sqrt{325}}{\sqrt{338}};$$

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot EA\cdot\sin\angle FEA$$

EF – диаметр, т.к. $\angle EAF=90^0$ ($\angle EBA=\alpha=\angle EFA$) и $\angle FEA=\angle MED=90^0-\alpha\Rightarrow\angle EAF=90^0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF – диаметр).

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{325}}{\sqrt{338}};\Rightarrow\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{325}{338}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{338}};$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot65\cdot\frac{65\sqrt{325}}{\sqrt{338}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{338}}=\frac{65^2\cdot\sqrt{325}\cdot\sqrt{13}}{2\cdot338}=$$

$$=\frac{4225\sqrt{4225}}{676};$$

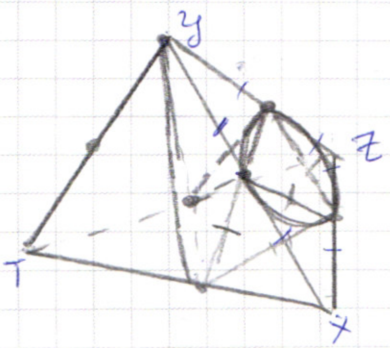
338

$$\begin{array}{r}\times\,65\\65\\\hline 325\\390\\\hline 4225\end{array}\qquad\begin{array}{r}\times\,325\\13\\\hline 975\\325\\\hline 4225\end{array}$$

Ответ: $R_1=32{,}5$; $R_2=32{,}2$;

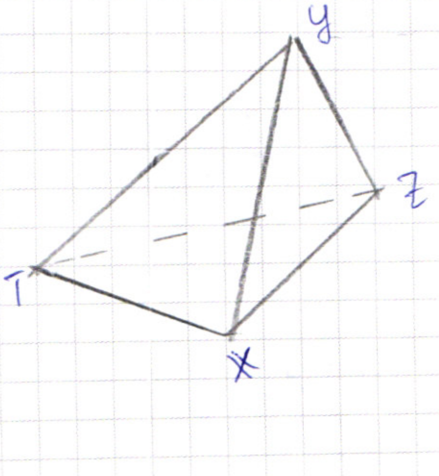
$\angle AFE=\alpha=\arcsin\left(\frac{\sqrt{325}}{\sqrt{338}}\right)$; $S_{\triangle AFE}=\frac{4225\sqrt{4225}}{676}$;

№7



Дано:
$TXYZ$ – пирамида;
Y лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме TY,
$XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$;

Найти:
XZ, $R_{шара}$.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{25y^2}{16} - \frac{228}{16}y + \frac{36}{16} - 36 = 0;$

$25y^2 - 228y + 36 - 36\cdot16 = 0;$

$25y^2 - 228y + 36(1-16) = 0;$

$25y^2 - 228y - 540 = 0;$

$\times\begin{array}{r}36\\15\\\hline 180\\36\\\hline 540\end{array}$ $\times\begin{array}{r}228\\228\\\hline 1824\\456\\456\\\hline 51984\end{array}$

$D = 228^2 - 4\cdot25\cdot(-540) = 228^2 + 54000 = 51984 + 54000 =$

$= 591984;$

$y_{1,2} = \frac{228 \pm \sqrt{591984}}{50}$

$y \leq 6 \Rightarrow y = \frac{228-\sqrt{591984}}{50} \Rightarrow$

$x = \frac{\frac{228-\sqrt{591984}}{50} - 2}{4} =$

$= \frac{128 - \sqrt{591984}}{4}$

Ответ: $(2; 15)$ $\left(\frac{128-\sqrt{591984}}{4}; \frac{228-\sqrt{591984}}{50}\right)$;

№3

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

Замена:

$x^2 - 26x = t$

$x_в = \frac{26}{2} = 13$ $13^2 - 26\cdot13 =$ $= 13(13-26) =$ $= -169$

$t \in [-169; +\infty)$

$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5(-t)}$

$-t > 0 \Rightarrow t < 0$

$-t^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5(-t)}$

$t + t^{\log_5 12} + 13^{\log_5(-t)} \leq 0;$ $-13^{\log_5(-t)} \geq 13^{\log_{13}(t + t^{\log_{12} 5})}$

$t + t^{\log_{12} 5} = 13^{\log_{13}(t + t^{\log_{12} 5})}$

Замена:

$\log_5(-t) = b \Rightarrow -t = 5^b$

$t = -5^b;$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

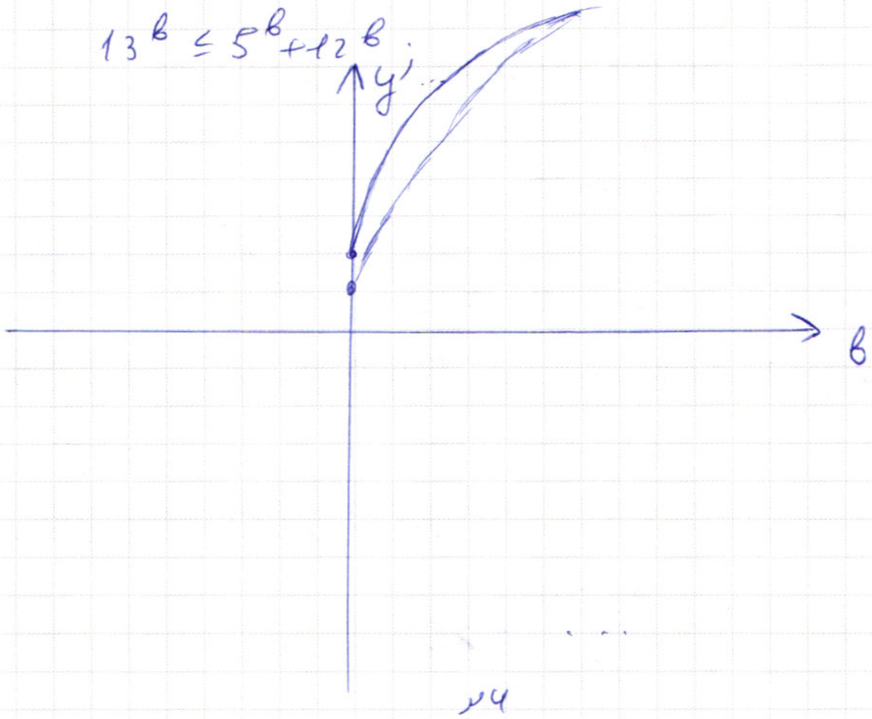
$t^{\log_5 12} = (-5^b)^{\log_5 12} = -12^b;$

$y_1 = 13^b$ $\quad y_2 = 5^b + 12^b;$

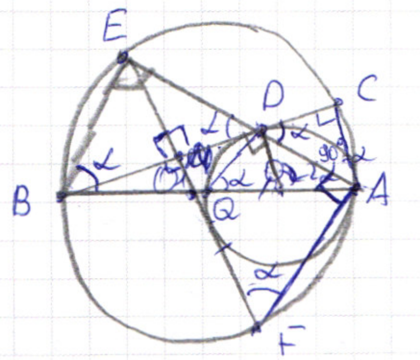
~~$y_2' = 5^b \cdot \ln 5 + 12^b \cdot \ln 12$~~

$-5^b - 12^b + 13^b \le 0$

$13^b \le 5^b + 12^b;$



№4



Дано: $CD = 12;$
$BD = 13;$
Найти: $R_1, R_2,$
$\angle AFE = ?$
$S_{\triangle AEF}$.

Решение:
$\angle BCA = 90^0$, т.к. опирается на диаметр. $\Rightarrow CA \perp BC,$

но $O_2D \perp BC$ (т.к. BC - касательная)

$\Rightarrow \triangle O_2BD \sim \triangle ABC$ (по УУ)

$\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{13+12} = \frac{13}{25};$

$\frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{13}{25};$

$1 - \frac{R_2}{2R_1} = \frac{13}{25}$

$\frac{R_2}{2R_1} = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$

$\frac{R_2}{R_1} = \frac{24}{25};$

$R_1 = \frac{25}{24} R_2;$

Из $\triangle BDO_2$:
по т. Пифагора:

$BO_2^2 = BD^2 + DO_2^2$

$(2R_1 - R_2)^2 = 13^2 + R_2^2;$

$\left(\frac{26}{25} R_1\right)^2 = 13^2 + R_2^2;$

$\left(\frac{26}{24} R_2\right)^2 = 13^2 + R_2^2$

$\left(\frac{13}{12} R_2\right)^2 = 13^2 + R_2^2$

$\frac{169}{144} R_2^2 = 13^2 + R_2^2$

$\frac{25}{144} R_2^2 = 13^2$

$$\begin{array}{r} \times\,12 \\ 13 \\ \hline 36 \\ 12 \\ \hline 156 \end{array}$$

$\left(\frac{5}{12} R_2\right)^2 = 13^2 \Leftrightarrow \frac{5}{12} R_2 = 13 \Rightarrow R_2 = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = 30\frac{6}{5} = 31\frac{1}{5} = 31{,}2;$

$R_1 = \frac{25}{24} R_2 = \frac{25}{24} \cdot \frac{156}{5} = \frac{5 \cdot 156}{24} = \frac{5 \cdot 78}{12} = \frac{5 \cdot 39}{6} = \frac{195}{6} = 32\frac{3}{6} = 32{,}5;$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=?$

$2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$;

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$;

$\cos 2\beta=\frac{\sqrt{17}}{17}$;

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{17}{17^2}}\pm\sqrt{\frac{17(17-1)}{17^2}}=$

$=\pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$;

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\pm\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $|\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1$; $/:\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\exists\ \varphi$:

$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin\varphi=\pm\frac{4}{\sqrt{17}};\end{cases}$ $\quad\varphi=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin(2\alpha\pm\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha\pm\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 2\alpha\pm\varphi=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

I. $2\alpha+\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

$2\alpha+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

$2\alpha=-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

$\underline{\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \Rightarrow tg\,\alpha = tg\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) =$

$= tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$

II. $2\alpha - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in Z;$

$2\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in Z;$

$2\alpha = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$

$tg\alpha = tg\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{4} + \pi k\right) = tg\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= ;$ Пусть $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \Theta$, $\Theta \in I$ ч.

$\cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin\Theta = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}}$; $tg\,\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{1} =$

$= 4;$

$tg\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{tg\Theta - tg\frac{\pi}{4}}{1 + tg\Theta \cdot tg\frac{\pi}{4}} = \frac{4-1}{1+4\cdot 1} = \frac{3}{5};$

III. $2\alpha + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi m, m \in Z;$

$2\alpha = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi m, m \in Z;$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi m, m \in Z;$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi m, m \in Z;$

$tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi m\right) = tg\left(\frac{3\pi}{4} - \Theta\right) =$

$= \frac{tg\frac{3\pi}{4} - tg\,\Theta}{1 + tg\,\Theta \cdot tg\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1-4}{1+4(-1)} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3};$

IV. $2\alpha - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi q, q \in Z;$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi q, q \in Z.$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi q, q \in Z \Rightarrow tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} + \pi q\right) = tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= -1;$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

$x_1 = \frac{y+3}{9}$;

$\frac{9(y+3)^2}{9^2} + y^2 - \frac{18(y+3)}{9} - 12y = 45$;

$\frac{(y+3)^2}{9} + y^2 - 2(y+3) - 12y = 45$;

$\frac{y^2+6y+9}{9} + y^2 - 2y - 6 - 12y = 45$;

$\frac{y^2}{9} + \frac{2y}{3} + 1 + y^2 - 2y - 6 - 12y - 45 = 0$;

$\frac{10y^2}{9} + \frac{2y}{3} - 2y - 12y + 1 - 6 - 45 = 0$;

$\frac{10y^2}{9} + \frac{2y}{3} - 14y - 50 = 0$;

$\frac{10y^2}{9} - \frac{40}{3}y - 50 = 0 \mid \cdot 9$

$10y^2 - 120y - 450 = 0$;

$y^2 - 12y - 45 = 0$

$D = 144 - 4\cdot(-45) = 144 + 180 = 120 + 180 + 24 =$
$= 324 = 18^2$

$y_{1,2} = \frac{12 \pm 18}{2} = \left[\begin{array}{l} y = 15 \\ y = -3 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y = 15 \\ y = -3 \end{array}\right. \\ y \geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underline{y_1 = 15}; \Rightarrow x_1 = \frac{y+3}{9} = \frac{18}{9} = 2$;

$\begin{array}{r} \times\, 12 \\ 16 \\ \hline 72 \\ 12 \\ \hline 192 \end{array} \quad \begin{array}{r} +\, 192 \\ 36 \\ \hline 228 \end{array}$

$x_2 = \frac{y-2}{4}$;

$\frac{9\cdot(y-2)^2}{4^2} + y^2 - \frac{18(y-2)}{4} - 12y = 45$;

$\frac{9(y^2-4y+4)}{16} + y^2 - \frac{18y}{4} + \frac{36}{4} - 12y - 45 = 0$;

$\frac{9y^2}{16} - \frac{36y}{16} + \frac{36}{16} + y^2 - \frac{9y}{2} + 9 - 12y - 45 = 0$;

$\frac{25y^2}{16} - \left(\frac{36-72}{16}\right)y - 12y + \frac{36}{16} + 9 - 45 = 0$;

$\frac{25y^2}{16} - \frac{36}{16}y - 12y + \frac{36}{16} - 36 = 0$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (*) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45; \end{cases}$$

$(*)$ $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$$\begin{cases} (y-6x)^2= xy-6x-y+6 \\ y-6x\geq 0 \end{cases}$$

$(y-6x)^2=xy-6x-y+6.$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6;$

$y^2-13xy+6x+36x^2+y-6=0;$

$36x^2-(13y-6)x+y-6+y^2=0;$

$D=(13y-6)^2-4\cdot 36\cdot(y^2+y-6)=$

$=169y^2-26\cdot 6y+36-144y^2-144y+864=$

$=25y^2-26\cdot 6y-144y+900=25y^2-300y+900=$

$=(5y-30)^2\geq 0;$

$$x_{1,2}=\frac{(13y-6)\pm(5y-30)}{72}=\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{8y+24}{72}=\frac{y+3}{9} \\ x_2=\frac{18y-36}{72}=\frac{y-2}{4} \end{array}\right.$$

$y-6x\geq 0$

I. $x_1=\frac{y+3}{9}$

$y-\frac{6(y+3)}{9}\geq 0 \mid \cdot 9>0$

$9y-6(y+3)\geq 0$

$3y-18\geq 0$

$\underline{y\geq 6}$

II. $x_2=\frac{y-2}{4}$

$y-\frac{6(y-2)}{4}\geq 0 \mid \cdot 4>0$

$4y-6y+12\geq 0$

$-2y+12\geq 0$

$2y\leq 12$

$\underline{y\leq 6}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$2\alpha - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2\alpha = \pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\quad tg\,\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k\right) = -1;$

№2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \ (*) \end{cases}$$

$(*)$: $9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$

$(3x)^2 - 2\cdot 3x \cdot 3 + 9 + y^2 - 12y + 36 = 45 + 45;$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90;$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90;$

$x^2 + \frac{y^2}{9} - 2x - \frac{12}{9}y = 5;$

$x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{9} - \frac{12}{9}y + 4 = 8;$

$(x-1)^2 + \left(\frac{y}{3} + 2\right)^2 = 8;$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$ $\quad \boxed{y - 6x \geq 0}$

$(y-6x)^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6;$

$y^2 - 13xy + 6x + y + 36x^2 - 6 = 0;$

$36x^2 - (13y - 6)x + y - 6 + y^2 = 0;$

$x_{1,2} = \frac{(13y-6) \pm (5y-30)}{72}$ $\quad D = (13y-6)^2 - 4\cdot 36(y^2 + y - 6) =$

$= 169y^2 - 26\cdot 6y + 36 - 144y^2 - 144y + 864 =$

$= 25y^2 - 26\cdot 6y - 144y + 900 =$

$= 25y^2 - 156y - 144y + 900 =$

$= 25y^2 - 300y + 900 =$

$= (5y)^2 - 2\cdot 5y\cdot 30 + 30^2 =$

$= (5y - 30)^2 \geq 0$

$$= \left[\begin{array}{l} x = \frac{18y - 36}{72} = \frac{y-2}{4}; \\ x = \frac{8y + 24}{72} = \frac{y+3}{9}; \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha+\varphi = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in Z;$

$2\alpha+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in Z.$

$2\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in Z$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z. \Rightarrow tg\alpha=-1;$

$2\alpha-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k, k\in Z;$

$2\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k, k\in Z.$

$2\alpha = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$ $a-b=?$ $a+b=\frac{\pi}{2}$

$\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;$ $a-b=a-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2a-\frac{\pi}{2}=$

$tg\alpha = tg\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$ $=2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\frac{\pi}{2};$

$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\theta\in I ч$

$tg\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=?$ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$ $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}};$

$=\frac{tg\theta-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\theta\cdot tg\frac{\pi}{4}}=\frac{4-1}{1+4\cdot 1}=$ $tg\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}\sqrt{17}=4;$

$=\frac{3}{5};$

$5\,7\,7\,2$
$\times\ 7\,7\,2$
1544
5404
5404
595984

772^2-1000

$2\alpha+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k, k\in Z;$

$2\alpha=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k, k\in Z;$

$2\alpha=\frac{3\pi}{2}-2\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k, k\in Z$ $a-b=?$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\pi k, k\in Z$ $a+b=\frac{\pi}{2}$

$a=\frac{\pi}{2}-b$

$\frac{\pi}{2}-b-b=\frac{\pi}{2}-2b.$

$tg\alpha=tg\left(\frac{3\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=$

$=\frac{tg\frac{3\pi}{4}-tg\theta}{1+tg\frac{3\pi}{4}\cdot tg\theta}=\frac{-1-4}{1-1\cdot(4)}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3};$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$; $tg\alpha = ?$,

$$\begin{cases} 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{17};$$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17};$$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$tg 2\alpha = \frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg\alpha};$$

$$2\cos 2\beta = \frac{2}{17}\cdot\sqrt{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17};$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\sin 2\alpha = -1 \pm 4\cos 2\alpha$ $\quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{17}{17^2}} = \pm\sqrt{\frac{17^2-17}{17^2}} =$

$\frac{-1\pm 4\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \quad = \pm\sqrt{\frac{17(17-1)}{17^2}} = \pm\frac{4\sqrt{17}}{17};$

$= -\frac{1}{\cos 2\alpha} \pm 4;$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{17}}{17} \pm \frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \;\; |\cdot\sqrt{17}$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \;|: \sqrt{1^2+4^2} \;\; \sqrt{17};$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

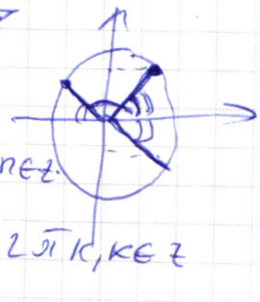
$\cos\varphi$

$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\arccos(a)+\arcsin(a) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\cos\varphi \pm \sin\varphi\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\arccos(a)-\arcsin(a)$ $\quad \sin(2\alpha\pm\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha\pm\varphi = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n, n\in Z \\ 2\alpha\pm\varphi = \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$9\left(\frac{y-2}{4}\right)^2+y^2-18\cdot\frac{(y-2)}{4}-12y-45=0;$$

$$9\left(\frac{y^2-4y+4}{16}\right)+y^2-\frac{9(y-2)}{2}-12y-45=0;$$

$$\frac{9y^2}{16}-\frac{36y}{16}+\frac{36}{16}+y^2-\frac{9y}{2}+\frac{18}{2}-12y-45=0;$$

$$\frac{25y^2}{16}-\frac{36y}{16}-\frac{9y}{2}-12y+\frac{36}{16}+\frac{18}{2}-45=0; \mid \cdot 16$$

$$25y^2-36y-72y-192y+36+8\cdot18-45\cdot16=0;$$

$$25y^2-108y-192y+36+8\cdot18-45\cdot16=0;$$

$$25y^2-200y+36+8\cdot18-45\cdot16=0;$$

$$25y^2-200y+36+144-45\cdot16=0;$$

$$25y^2-200y+180-45\cdot16=0 \mid :5$$

$$5y^2-40y+36-9\cdot16=0;$$

$$5y^2-40y+36-144=0;$$

$$5y^2-40y-108=0;$$

$$D=40^2-4\cdot5\cdot(-108)=1600+20\cdot108=$$

$$=1600+2160=3760;$$

$$y_{1,2}=\frac{40\pm\sqrt{3760}}{10};$$

$$\begin{array}{r} 12\\ \times\ 16\\ \hline 72\\ 12\\ \hline 192 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45\\ \times\ 16\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16\\ \times\ 9\\ \hline 144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 108\\ \times\ 20\\ \hline 000\\ 216\\ \hline 2160 \end{array}$$

60,

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}.$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}.$$

Замена:

$x^2-26x=t,$

$|t|^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(-t)}$ $-t>0$, $t<0$

$-t^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(-t)}$

$t^{\log_5 12}+t+13^{\log_5(-t)} \leq 0;$

$\cancel{t^{\log_t}}$ $\cancel{t=}$

$\left(13^{\log_{13} t}\right)^{\log_5 12} = 13^{\log_{13} t \cdot \log_5 12};$

676 $\times \begin{array}{r}26\\24\end{array}$ 104, 52, 624

$t^{\log_5 12}=b$

$\cancel{\log_5 12 = t^b};$

676 ±624

$\log_t t^b = \log_5 12$ $13^{\log_5(-t)}=b=$

$\cancel{13^{\log}}$ $\log_5(-t)=b$ $= 13^{\log_{13} b}$

$-t=5^b$

$t=-5^b;$ $\log_5(-t)=\log_{13} b;$

$(-5^b)^{\log_5 12}=$

$=-(5^b)^{\log_5 12}=$ $-t=5^{\log_{13} b}$

$=-(5^{\log_5 12})^b=-12^b;$ $t=-5^{\log_{13} b}$

$-12^b-5^b+13^b \leq 0;$

$13^b \leq 12^b+5^b;$ $5=13^{\log_{13} 5};$

$\times\begin{array}{r}24\\24\end{array}$ 96, 48, 576 $\times\begin{array}{r}26\\26\end{array}$ 156, 52, 676

$\cancel{5^{\log}}$

$13^b \leq 13^{b\log_{13} 5}+13^{\log_{13} 5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Замена:

$x^2-26x=t, \; t<0$

$-t^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(-t)}$

$-t^{\log_5 12}-t \geq 13^{\log_5(-t)}$

$t^{\log_5 12}+t \leq -13\log_5(-t)$

$t^{\log_5 12}+t \leq \log_5(-t)^{13}$

$\log_5(t^{\log_5 12}+t) \leq \cancel{\log_5(-t)^{-13}}$

$= \log_5 t^{\log_5 12} = \log_5 12 \cdot \log_5 t$

$\cancel{\log_5 t = b}$

$\cancel{b^{\log_5 12} \leq}$

$t^{\log_5 12}+t \leq \log_5(-t)^{-13};$

$\cancel{t=5^{\log_5 t}};$

$5^{\log_5 t \cdot \log_5 12}$ $\cancel{t\,5^{\log}}$

$5^{\log_5 t \log_5 12}+5^{\log_5 t} \leq \log_5(-5^{\log_5 t})$

$-(t^{\log_5 12}+t) \geq 13\log_5(-t)^{13}$

$\log_5(t^{\log_5 12}+t)$

$t^{\log_5 12}+t+13^{\log_5(-t)} \leq 0;$

$13^{\log_5(-t)}=a=$

$=13^{\log_{13} a}$

$\log_5(-t)=\log_{13} a$

$t=-5^{\log_{13} a}$

$t^{\log_5 12}=5^{\log_{13} a}=$

$=12^{\log_{13} a}$

$12^{\log_{13} a}+5^{\log_{13} a}+a \leq 0$