МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$ $a=x-6$ $b=2y-1$

$a-6b=x-12y$. ОДЗ: $ab\geq 0$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+(3b)^2=90 \end{cases} \Big|^2 \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$(a-4b)(a-9b)=0$ 1) $a=4b$ 2) $a=9b$

1) $a=4b$ $16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90$

$b=\pm\sqrt{\frac{90}{25}}$

$b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

I $b=\sqrt{\frac{18}{5}}$ $a=4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$2y-1=\sqrt{\frac{18}{5}}$ $x-6=4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$y=\sqrt{\frac{9}{10}}+\frac{1}{2}$ $x=4\sqrt{\frac{18}{5}}+6$

II $b=-\sqrt{\frac{18}{5}}$ $a=-4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$y=-\sqrt{\frac{9}{10}}+\frac{1}{2}$ $x=-4\sqrt{\frac{18}{5}}+6$

2) $a=9b$ $81b^2+9b^2=90$

$b^2=1$ $b=\pm 1$

$b=1$ $a=9$

$2y-1=1$ $x-6=9$

$y=1$ $x=15$

$b=-1$ $a=-9$

$y=0$ $x=-3$

Ответ: ~~(1; 15)~~; ~~(-3;~~ $(15;1)$; $(-3;0)$, ~~$(4-\sqrt{\frac{9}{16}}$~~

$\left(4\sqrt{\frac{18}{5}}+6;\ \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{10}}\right)$; $\left(-4\sqrt{\frac{18}{5}}+6;\ \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)$

③ $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$ $\quad x\in(0;10)$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$.

$(10x-x^2) + (10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

$t = 10x - x^2 > 0$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$t(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}) \geq 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} = 0$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}$

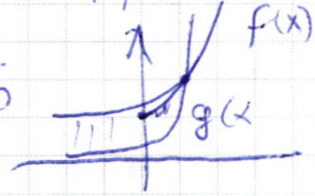
$\log_3 t = u$ $\qquad 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^u = \left(\frac{5}{3}\right)^u$

$f(x) = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^u$ $\qquad \cancel{f'(x)}$ $\quad f'(x) = \frac{4}{3}^u \ln\frac{4}{3}$

$g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^u$ $\qquad g'(x) = \frac{5}{3}^u \ln\frac{5}{3}$

$f'(x) < g'(x)$ для $\forall x \Rightarrow$ если корень есть то он единственный.

$g'(x) - f'(x) > 0$ при $\forall x$.



$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^u = \left(\frac{5}{3}\right)^u$

$u = 2$ $\quad \log_3 t = 2$ $\quad t = 9$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0 \Rightarrow t \leq 9$

$10x - x^2 \leq 9$ $\qquad x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x-9) \geq 0$ $\qquad x \in \cancel{[0;}\ (-\infty;1] \cup [9;+\infty)$

с ОДЗ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. 1) $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2\cdot2)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=f(2\cdot3)=0$;
$f(7)=1$; $f(8)=f(4\cdot2)=0$; $f(9)=f(3\cdot3)=0$; $f(10)=f(2\cdot5)=1$;
$f(11)=2$; $f(12)=f(4\cdot3)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=f(2\cdot7)=1$; $f(15)=f(3\cdot5)=1$;
$f(16)=f(4\cdot4)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=f(2\cdot9)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=f(4\cdot5)=0$;
$f(21)=f(3\cdot7)=1$; $f(22)=f(11\cdot2)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=f(4\cdot6)=0$;
$f(25)=f(5\cdot5)=2$.

2) $f(x)=f(x^2\cdot\frac{1}{x})=f(x^2)+f(\frac{1}{x})=2f(x)+f(\frac{1}{x})$

$-f(x)=f(\frac{1}{x})$

3) $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$;

Нужно найти кол-во пар $f(x)<f(y)$

функция $f(x)$ имеет значения 0 - 10 раз, 1 - 7 раз, 2 - 3, 3 - 1, 4 - 2, 5 - 1.

тогда кол-во пар это кол-во 0 умноженное на кол-во чисел больше нуля кол-во 1 на кол-во чисел больших 1 и т.д.

$10\cdot15+7\cdot7+3\cdot4+1\cdot3+2\cdot1=150+49+12+3+2=$
$=216$

Ответ: 216

6) $f(x)= \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$g(x) = -32x^2+36x-3$

$f(\frac{1}{4}) = 3$

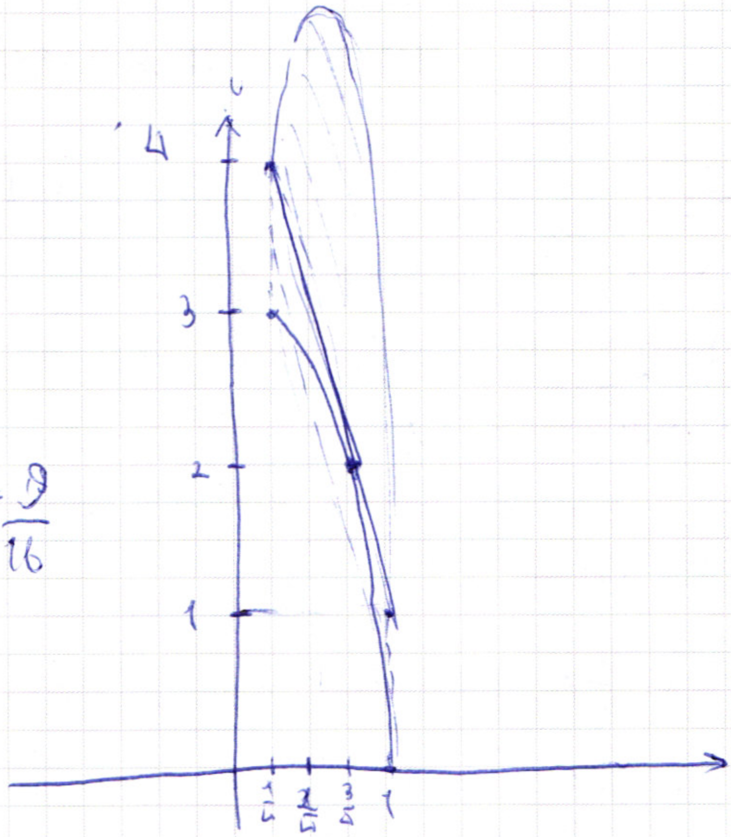
$f(\frac{3}{4}) = 2$

$f(1) = 0$

$g(\frac{1}{4}) = 4$

$g(1) = 1$

вершина g — $\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$



рассмотрим прямую проходящую через $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$ — это $y=-4x+5$.

Найдём т. пересечения $f(x)$ и $-4x+5$.

$-4x+5 = 4 + \frac{4}{4x-5} \Big| \cdot 4x-5 \Rightarrow -(16x^2-40x+25) = 16x-20+4 \Rightarrow$

$16x^2-24x+9=0 \qquad (4x-3)^2=0 \qquad x=\frac{3}{4}$ — $-4x+5$ касается $f(x)$, а значит

все прямые лежащие ниже $-4x+5$ будут иметь, хотя бы 2 точки пересечения, но среди всех прямых подходящих под условие, $-4x+5$ лежит выше всех, а значит ни одна другая прямая не подойдёт

Ответ: $a=-4$, $b=5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

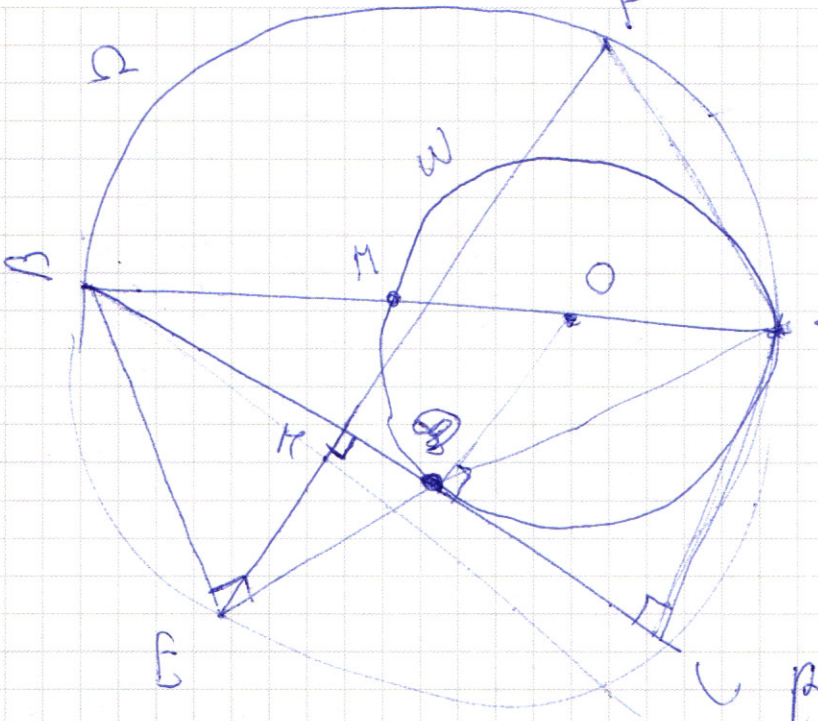
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Дано: AB-диаметр

Ω и ω кас. в т. A

BC-кас. к ω

$BD = \frac{17}{2}$

$CD = \frac{15}{2}$

Найти: r и R, ∠EFA, S_{AEF}

Решение.

$BD^2 = BM \cdot BA$ − BD-кас.

$BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$OD \perp BC$, т.к. BC-кас. (O-центр ω)

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. BA-диаметр

$\Rightarrow OD \parallel CA \Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BO}{BA} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32}$

$$\begin{cases} (1)\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R-2r)2R \\ (2)\ \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32} \end{cases}$$

$64R - 32r = 34R$

$R = \frac{16}{15} r$

(1) $\frac{17^2}{2^2} = \left(\frac{32}{15} - \frac{30}{15}\right)\cdot\frac{2\cdot 16}{15} r^2$

$\frac{17^2}{2^2} = \frac{2\cdot 2\cdot 16}{15\cdot 15} r^2$ $\quad r^2 = \frac{17^2\cdot 15^2}{16^2}$ $\quad r = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$ $\quad R = \frac{17\cdot 15}{16}\cdot\frac{16}{15} = 17$

$\angle EBA = \angle EFA$ − опираются на одну дугу.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle BEA = 90$ опер. на диаметр

$CA = \sqrt{BA^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$

$\sin \angle CBA = \frac{15}{17}$ $\cos \angle CBA = \frac{8}{17}$

$DA^2 = BD^2 + BA^2 - 2\cos \angle CBA \cdot BD \cdot BA = 34^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{34 \cdot 17}{2} =$

$= 34^2 + \frac{17^2}{4} - 8 \cdot 34 = 17\left(17 \cdot 4 + \frac{17}{4} - 16\right) = \frac{225}{4} \cdot 17$

$DA = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{17}$

Т. синусов $\frac{DA}{\sin \angle B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$ $\sin \angle BAD = \frac{BD}{DA} \sin \angle B = \frac{17 \cdot 2}{2 \cdot 15\sqrt{17}} \cdot \frac{15}{17} =$

$= \frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin \angle BAD = \cos \angle EBA = \cos \angle EFA$.

$\angle EFA = \arccos \frac{\sqrt{17}}{17}$.

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$ $ED = \frac{BD \cdot DC}{DA} = \frac{17 \cdot 15 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 15\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$EA = 8\sqrt{17}$

$HD = \frac{ED^2}{BD} = \frac{17}{4} \cdot \frac{2}{17} = \frac{1}{2}$

$BH = 8$ $HC = 8$ $\left| \begin{array}{l} BH = HC \\ BC \perp EF \end{array} \right| \Rightarrow EF$ - диаметр $\Rightarrow$

$\angle EAF = 90°$

~~$BH \cdot HF =$~~

$FA = EF \cos \angle EFA = \frac{34 \cdot \sqrt{17}}{17} = 2\sqrt{17}$

~~$FA = EF \cdot \cos \angle EFA = \frac{34 \cdot \sqrt{17}}{17} = 2\sqrt{17}$~~

$S_{EFA} =$ $S_{EFA} = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{8\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17}}{2} = 8 \cdot 17 = 136$

Ответ: $r = \frac{255}{4}$; $R = 17$; $\angle EFA = \arccos \frac{\sqrt{17}}{17}$; $S_{EFA} = 136$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

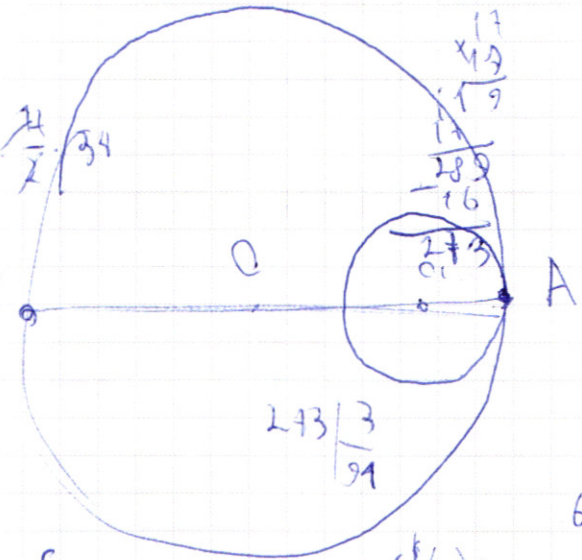
Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

37

$34^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{17}{2}\cdot 34$

34^2

$17^2\cdot 4^2 + \frac{17^2}{4^2} - 15\cdot 17\cdot 2$



4
17
$\times 17$
119
17
289
-16
273

$273 \mid 3$
91

$\sqrt{273}\cdot 8$

$\frac{32}{2\cdot 68} = \frac{32\cdot 8}{8\cdot 17}$

$68^2\cdot 2$

$68^2(68\cdot 2-32)(68\cdot 2+32)$

$\frac{BD}{CB} = \frac{CB}{BA}$

17
$\times 8$
136

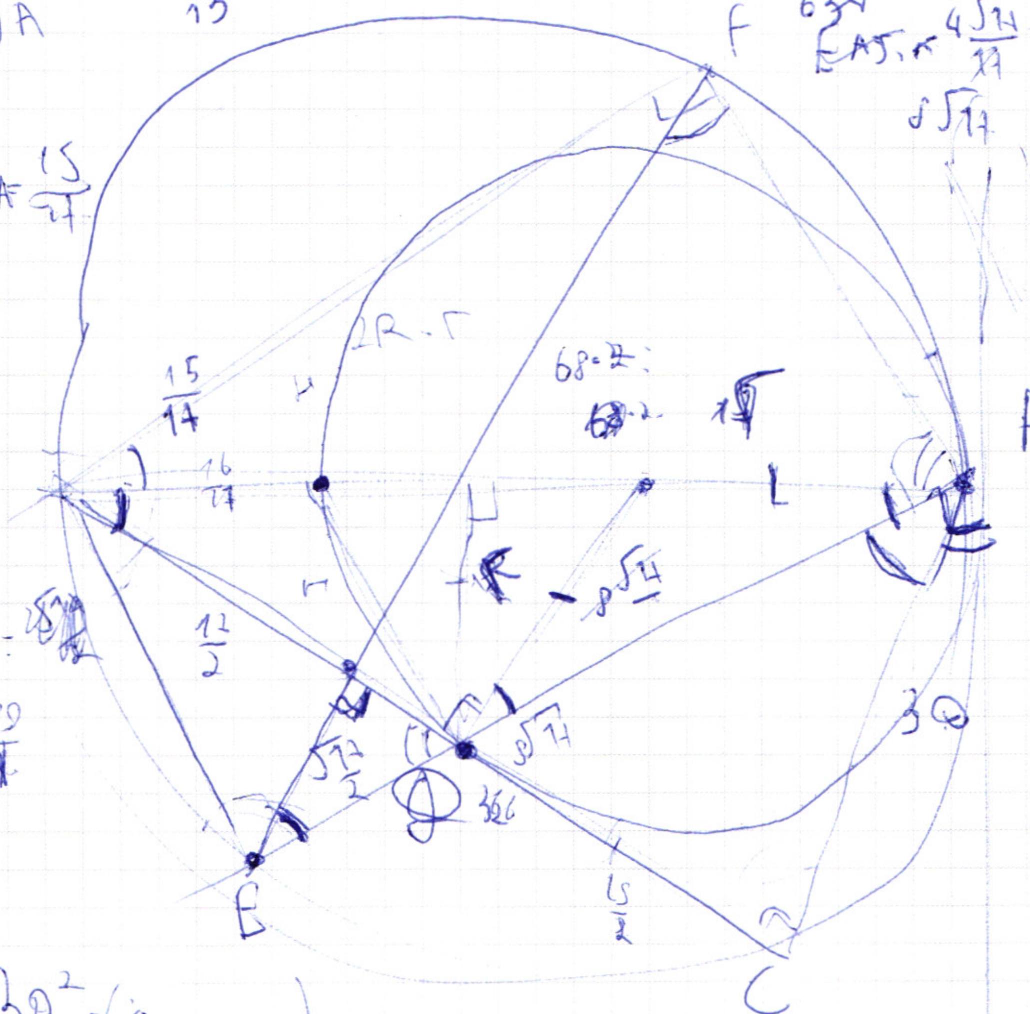
$f'(x)$

$\sin\angle CBA = \frac{32}{68\cdot 2}$

$EA\sin = \frac{4\sqrt{17}}{17} =$

$8\sqrt{17}$

$\cos\angle CBA = \frac{15}{17}$



$DA^2 =$
$= 34^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 -$
$- 2\cdot\frac{15}{17}\cdot 34\cdot\frac{17}{2} =$
$= 34\cdot 19 + \frac{289}{4}$

$$\begin{cases} BD^2 = (2R-2r)\cdot 2r \\ \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32} \end{cases}$$

$\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{DA}$

$ED\cdot DA = \frac{255}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (1)\ ED\cdot DA = \frac{255}{4} \\ (2)\ BE^2 + (ED+DA)^2 = 68^2 \\ (3)\ BE^2 + ED^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ED\cdot DA + DA^2 = 68^2 - \frac{17^2}{4} \end{cases}$$

$17^2\left(16-\frac{1}{4}\right)$

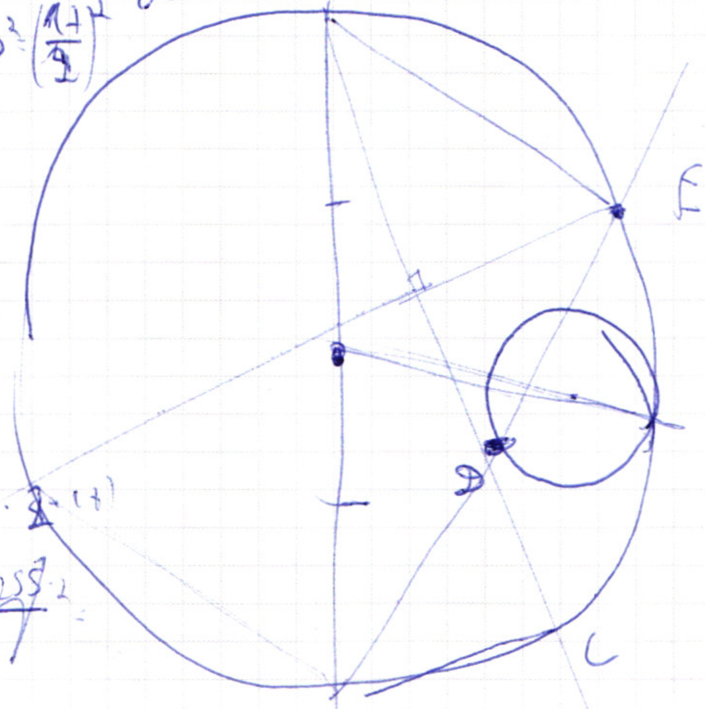
$DA^2 = 68^2 - \frac{17^2}{4} - \frac{510}{4} = \frac{68^2\cdot 4 - 17^2 - 510}{4}$

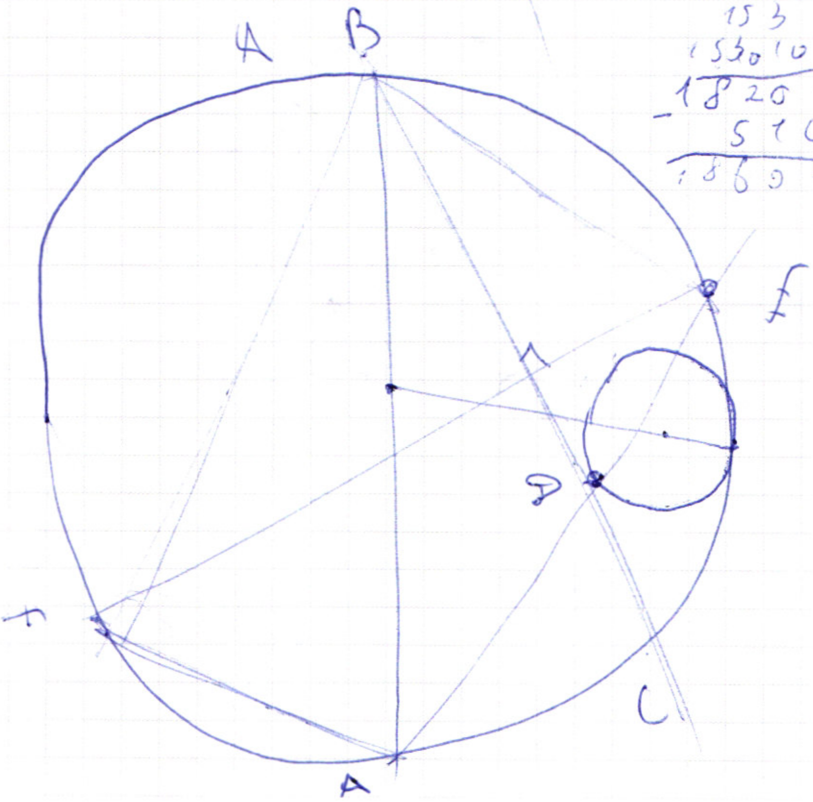
$(68\cdot 2-17)(68\cdot 2+17)$

$\frac{255\cdot 289 - 255\cdot 2}{4}$

$= \frac{255\cdot 287}{4}$

$(136-17)(136+17)$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geqslant 0$

$f'(t) = 1 + \log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}} - \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}} =$

$= 1 + \log_3 4 \cdot \frac{4}{3}^{\log_3 t}$

$\log \cancel{\ldots} =$

(5) $f(2)=0$ $f(11)=2$

$f(3)=0$ $f(13)=3$

$f(5)=1$ $f(17)=4$ $f(19)=4$

$f(7)=1$ $f(23)=5$

$f'\left(\frac{1}{x}\right)=$

$f(x^2) = f(x^2) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) = 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$\cancel{f(4)=0 \quad f(5)=}$

$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=0$ $f(7)=1$

$f(8)=0$ $f(9)=0$ $f(10)=1$ $f(11)=2$ $f(12)=0$ $f(13)=3$

$f(14)=1$ $f(15)=1$ $f(16)=0$ $f(17)=4$ $f(18)=0$ $f(19)=4$

$f(20)=1$ $f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=5$ $f(24)=0$ $f(25)=2$

0 – 10 раз

1 – 7 раз

2 – 3 раза

3 – 1 раз

4 – 2 раза

5 – 1 раза.

$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) - f(x)$

~~15·10 + 17·3 + 19·6 + 15·10 +~~

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 206.$

$180 + 49 = 229$, $229 + 12 = 201$, $201 + 5 = 206$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$x=\frac{1}{4}$ $y=4+\frac{4}{1-5}=3$

$x=\frac{3}{4}$ $y=4+\frac{4}{3-5}=2$

$x=1$ $y=4+\frac{4}{4-5}=0$

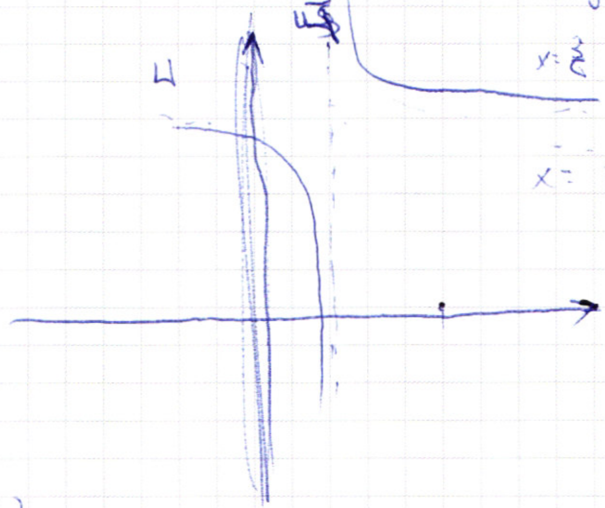
$36\cdot36$: 216, 108, 1296

$32\cdot12$: 64, 32, 384

$1296-384=912$

$81 - 24$

$\sqrt{912}$



$36\cdot36$: 216, 108, 1296

$32\cdot12$: 64, 32, 384

$1296-384=912$

$-x^2+9x-3$ $-32x^2+36x-3$

$32x^2-36x+3=0$

$(4x-3)(8x+1)$

$\frac{-36}{-64}=\frac{9}{16}$

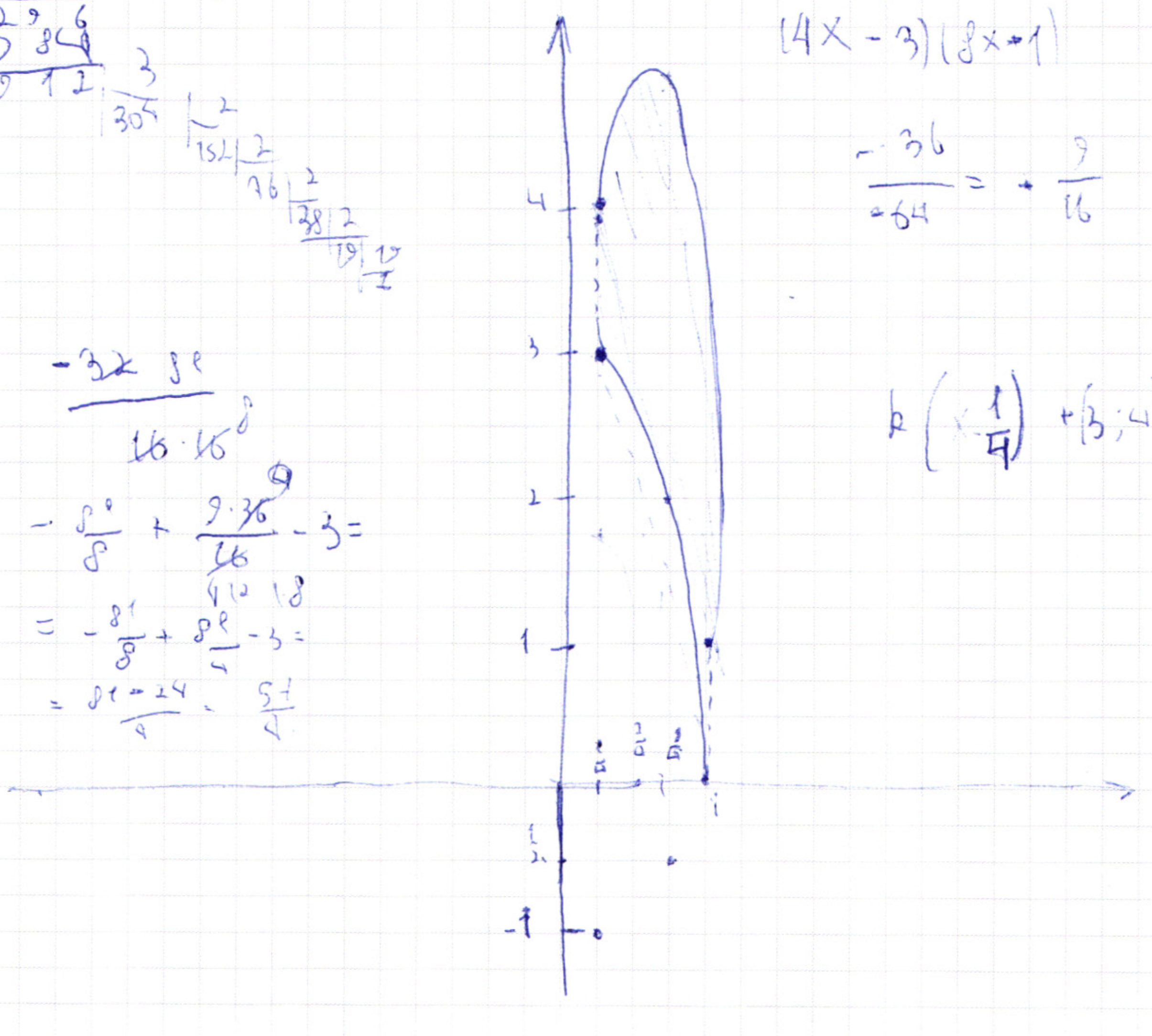
$k\left(x-\frac{1}{4}\right)+(3;4)$

$\frac{-32\cdot81}{16\cdot16}$

$-\frac{81}{8}+\frac{9\cdot36}{16}-3=$

$=-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3=$

$=\frac{81-24}{8}=\frac{57}{4}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-4x+5 = a + \frac{4}{\cancel{4x}-5}$ $a=-4$ $b=5.$

$-(16x^2 - 40x + 25) = 16x - 20 + 4$ $34^2 + \frac{11}{2}^2 - 15 \cdot 34$

$16x^2 - 40x + 25 + 16x - 20 + 4 = 0$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$ $17(17 \cdot 4 + \frac{11}{4} - 30) =$

$(4x-3)^2 = 0$ $= 68 + \frac{11}{4} - 30) = \frac{38 + 11}{4}$

$x = \frac{3}{4}$ $3 \geq t \geq 0$

3.

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

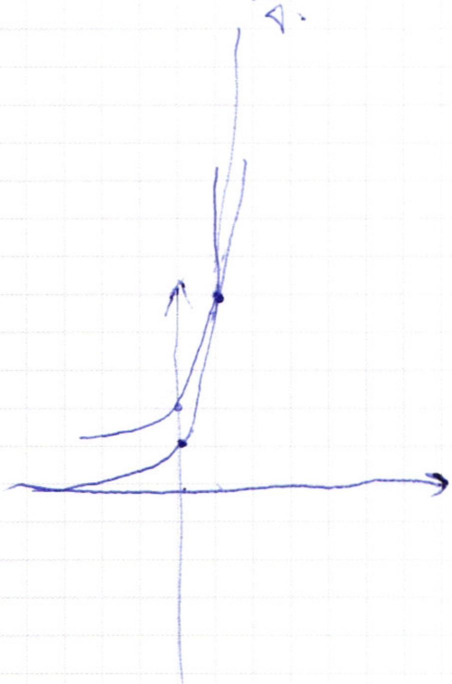
$1 + t^{\log_3 4} = t^{\log_3 5}.$

$1 + 4^{\log_3 t} = 5^{\log_3 t}$

$1 + 4^a \geq 5^a$

$a \leq 1$ $t = 3.$

$t \leq 3$



$3 \geq x^2 - 10x \geq 0$

$x \in (0;10)$

$x^2 - 10x - 3 = (x-5)(x-2)$

$1 + \frac{4}{3}^{\log_3}$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^a = \frac{5}{3}^a$

$a = 2$ $10x - x^2$

$D = 100 + 36$ $9 \geq x^2 - 10x \geq 0$

$D = 136$ $x^2 - 10x - 9 \geq 0$ $(x-9)(x+1) \geq 0$

$9 \geq 10x - x^2$ $x^2 - 10x + 9 \geq 0$ $x \in (0;1] \cup [9;10)$

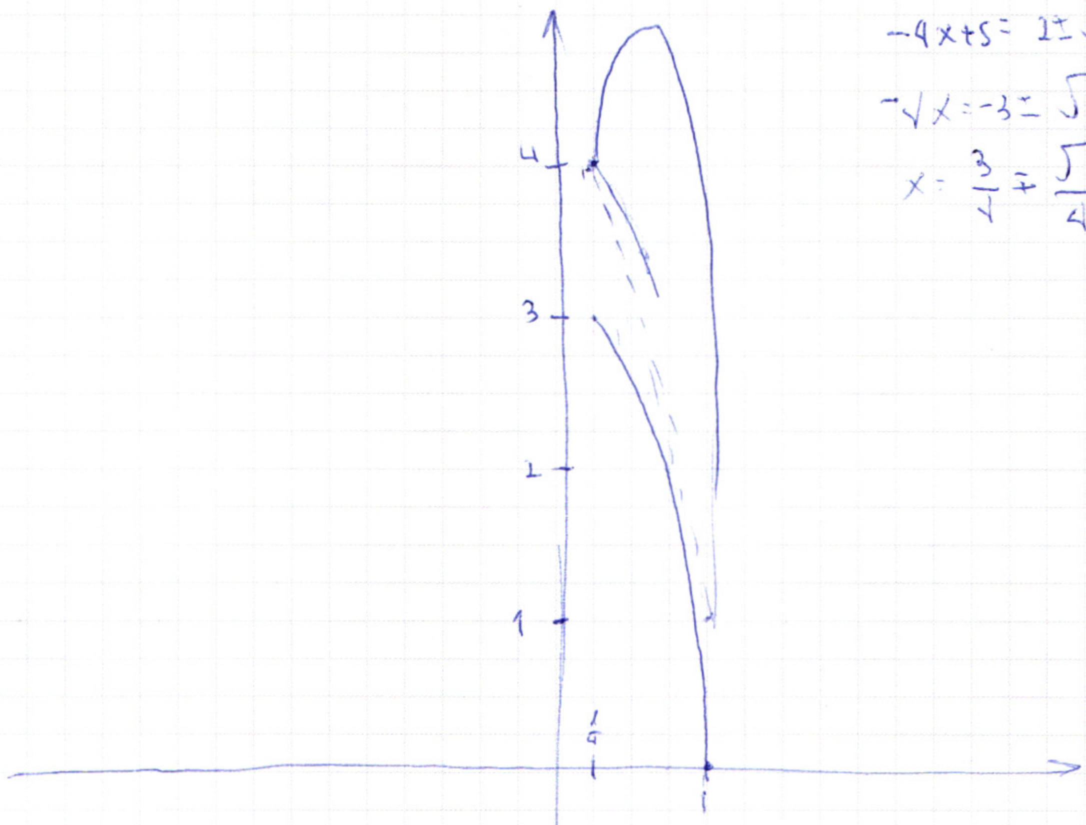
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-4x+5=2\pm\sqrt{2}$

$-4x=-3\pm\sqrt{2}$

$x=\frac{3}{4}\mp\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\left(\frac{1}{4};4\right)$ $(1;1)$

$\frac{x-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{y-4}{1-4}$

$\frac{4x-1}{3}=\frac{4y-16}{-12}$

$-48x+12=12y-48$

$y=-4x+5$

$-4x+5=4+\frac{4}{4x-5}$

$-t=4+\frac{4}{t}$

$-t^2=4t+4$

$t^2-4t-4=0$ $t=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2}=2\pm2\sqrt{2}$

$x=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

$-4x+5=2\mp\sqrt{2}$

$\frac{17^2}{4^2} = \left(\frac{32}{15}y - \frac{30}{15}y\right)\frac{2\cdot16}{15}y$

$\frac{17^2}{4^2} = \frac{2\cdot2\cdot16}{15\cdot15}y^2$

$y^2 = \frac{8^2}{15^2}$

$\begin{cases} \left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2x-2y)\cdot 2x \\ \frac{2x-y}{2x} = \frac{17}{32} \end{cases}$

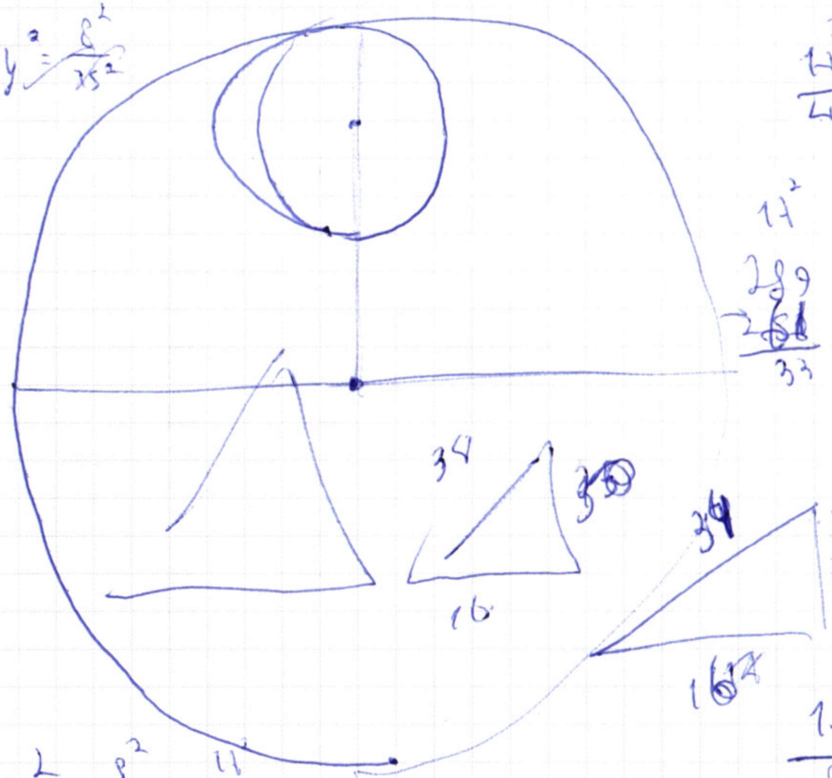
$x = \frac{15}{15}y$

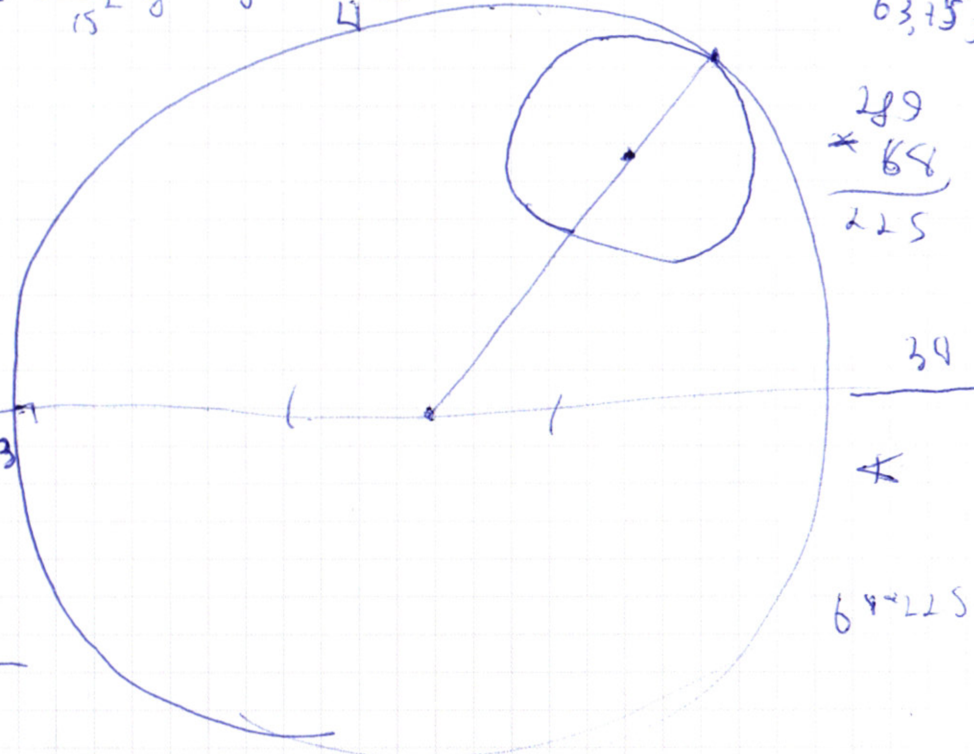
$\frac{2}{15}y \cdot \frac{32}{15}y = \frac{255}{63}$

$\frac{17^2}{4} = \frac{64}{15^2}y^2 \quad y = \frac{17\cdot15}{4}$

$x = 4\cdot17 = 68 \quad \frac{255}{4}$

63, 15, 68.





17^2

289

33

289×68

225

$64\cdot225 = 289$

$\frac{17}{8}$

$y^2 \cdot \frac{8^2}{15^2} = \frac{17^2}{4^2}$

$y = \frac{17\cdot15}{64}$

$\begin{cases} ED\cdot DA = \frac{255}{4} \\ BE^2 + (ED+DA)^2 = 68^2 \\ BE^2 + ED^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \end{cases}$

$\frac{17^2\cdot15^2}{8^2\cdot2^2} = y \quad y = \frac{17\cdot15}{16} \quad x = 17 \quad x = \frac{255}{16} \quad y = 17$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$\sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$17\left(17\cdot 4 + \frac{17}{4} - 16\right) =$

$\alpha = 2\alpha \quad \beta = 2\beta$

$\sin\alpha\cos\beta - \cos\beta\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha \sin 2\beta + \sin\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$

$68 \times 76 = 52$ $\quad 52 \times 4 = 208 \quad 208 - 17 = 1222$

34×26

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \cancel{2x}$

$34 \times 26 = 204$, 681, 884, 1040, -3536, -289, $3247 \,|\, 17$, -17, -154

$$\begin{cases} \left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2x - 2y)\cdot 2\cancel{y} \\ \frac{2x - y}{2x} = \frac{17}{32} \end{cases}$$

②

$64x - 32y = 34x$

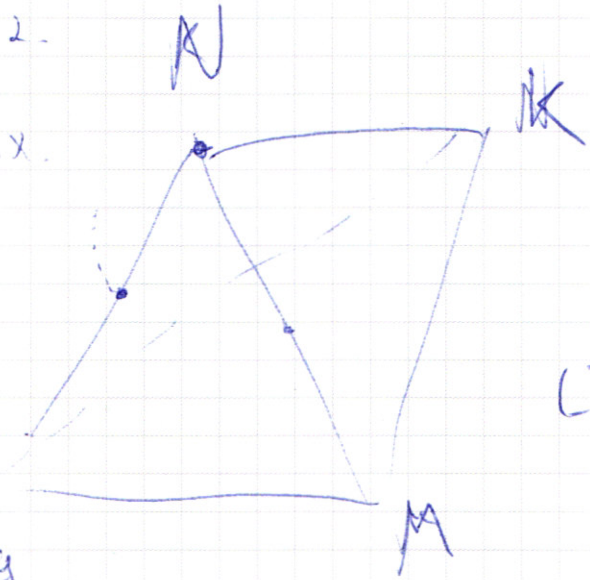
$30x = 32y$

$x = \frac{16}{15}y$

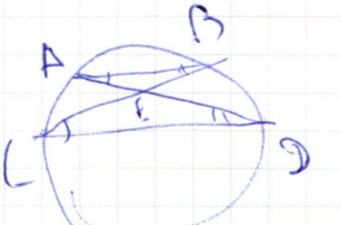
$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{32}{15} - 2\right)$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{15}y \cdot 2y\right)$

$\frac{17^2}{4} = \frac{4}{15}y^2 \quad y = \frac{17}{4}\sqrt{15} \quad x = \frac{16\cdot 17}{15\cdot 4}\sqrt{15} = \frac{68\sqrt{15}}{15}$



$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. +

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2-12y+36+36y^2-36y+9=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$x-6=a \quad 2y-1=b$

$x-12y=a-6b \qquad ab\geq 0$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$\times\begin{matrix}36b^2\\4\end{matrix}$

144

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \end{cases}$$

$a= \quad 169b^2-144b^2$

$a=\frac{13b\pm 5b}{2}$ $\quad a=9b$

$a=4b$

$90b^2=90$

$b=\pm1 \quad a=\pm9$

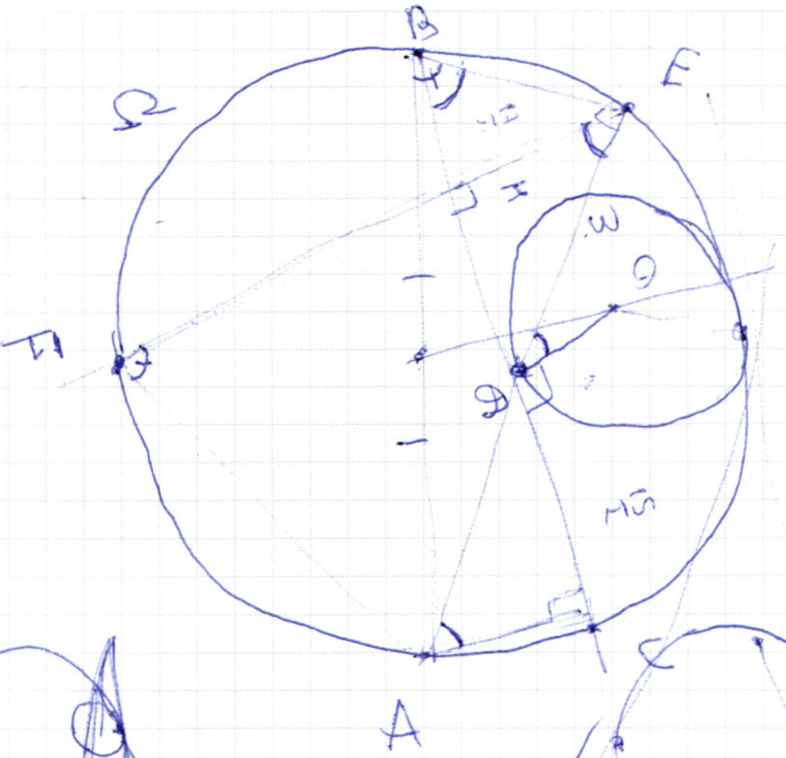
$25b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}$

$b^2=\frac{18}{5} \quad b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}} \quad a=\pm4\sqrt{\frac{18}{5}}$

90

4.



$\triangle EHD \sim \triangle ADC$

$\triangle BED \sim \triangle EHD$

$\frac{BD}{ED} = \frac{ED}{HD}$

$ED^2 = \sqrt{BD \cdot HD}$

$10^{\log_3 \frac{5}{3}}$

3.

$10x - x^2 \geq 0$

$x \in (0;10)$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\cancel{\log}} (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0 \quad t \geq 0$

$\cancel{f(t) = 1 + \log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}} - \log \quad 2t}$

$t\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$

$\cancel{9 + 16 - 25 \geq 0} \quad t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t$

$t + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$t \geq 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \qquad f(t) =$