МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

(2): $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot \sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$

Случай 1: $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(1): $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$. по усл $tg\,\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$ поделим на $\cos^2\alpha$

$2\,tg\,\alpha + 3 - tg^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 3 = 0$

$(tg\,\alpha - 3)\cdot(tg\,\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 3 \\ tg\,\alpha = -1. \end{array}\right.$

Случай 2: $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

(1): $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$ $\underset{\|}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0$ $| : \cos^2\alpha$ аналогично случаю 1

$2\,tg\,\alpha - 1 + 3tg^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 1 = 0$

пусть $t = tg\,\alpha$, $t \in R$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$\frac{1}{4}D = 1 + 3 = 4$

$t_1 = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}$

$t_2 = -1$

Получим: $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{1}{3} \\ tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{1}{3};\ 3;\ -1}$

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Усл *: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = -(x^2 - 10x)$

Получим: $10x - (x^2 - 10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 5}$

пусть $t = 10x - x^2$, $t > 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

1) при $t = 1$: $1 + \log_3 4 \geq \log_3 5$

$\log_3(12) \geq \log_3 5$ верно $\Rightarrow \boxed{t = 1}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $t > 1$

$\log_t (t + t^{\log_3 4}) \geq \log_t t^{\log_3 5}$ (т.к. $y = \log_t A$ - возр. ф-ция при $t > 1$, $A>0$)

$1 + \log_3 4 \geq \log_3 5$ верно $\Rightarrow \boxed{t > 1}$

3) $t \in (0;1)$

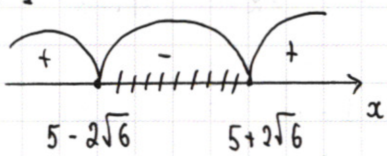
$\log_t (t + t^{\log_3 4}) \leq \log_t t^{\log_3 5}$ (т.к. $y = \log_t A$ -убывающая ф-ция при $t \in (0;1)$, $A>0$)

$1 + \log_3 4 \leq \log_3 5$ неверно

Обратная замена: $10x - x^2 \geq 1$

$x^2 - 10x + 1 \leq 0$

$\frac{1}{4}D = 25 - 1 = 24 = (2\sqrt{6})^2$

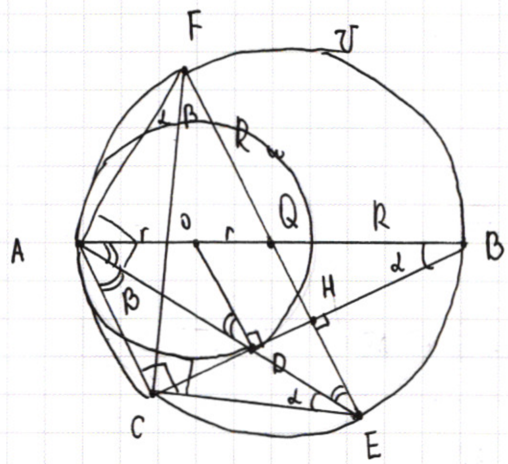


$x_1 = 5 + 2\sqrt{6}$

$x_2 = 5 - 2\sqrt{6}$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in [5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}]}$

№4



① 1. пусть O - центр ω. Тогда $OD \perp CB$ по св-ву касат

2. пусть $\angle AEC = \alpha$. $\angle ABC = \angle AEC = \alpha$ (вписанные, опир. на 1 дугу).

3. $\angle BOD = 90 - \alpha \Rightarrow \angle AOD = 180 - (90 - \alpha) = 90 + \alpha$

пусть $\angle OAD = \angle ADO = \beta$ ($AO = OD = r \Rightarrow$ р/б △)

$\beta = \frac{90 - \alpha}{2}$

4. AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow \angle CAD = 90 - \alpha - \beta = \frac{90-\alpha}{2} = \beta$

5. $\angle ADC = \angle HDE = 90 - \beta \Rightarrow \angle HED = \beta$; $\angle CFE = \angle CAE = \beta$ (впис.)

~~Значит, $\angle FCE = {}^{180-}\ 90 - \alpha - 2\beta = {}^{18}\ 90 - \alpha - 90 + \alpha$~~

Значит, $\angle FCE = 180 - \alpha - 2\beta = 180 - \cancel{\alpha} - 90 + \cancel{\alpha} = \underline{90^\circ}$. Тогда FE – диаметр $\Rightarrow FE \cap AB = Q$ – центр $\mho$

(2) AD – биссектриса $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{DB}{2R} \Rightarrow AC = \dfrac{2R \cdot 15 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 17} = \dfrac{30R}{17}$

$\angle ACH + \angle HCE + \angle CED + \angle DEH = 90 + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow AC \parallel FE$

Обобщ. т. синусов: $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \cancel{2R}\ \dfrac{AC}{2R} = \dfrac{30R}{17 \cdot 2R} = \underline{\dfrac{15}{17}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\dfrac{15}{17}$

Тогда $\dfrac{BC}{\sin 2\beta} = 2R \Rightarrow \sin 2\beta = \dfrac{16}{\cancel{\sin 2\beta}\ 2R} = \dfrac{16}{2R}$

Получим: $\angle AFE = \alpha + \beta = \alpha + \dfrac{90 - \alpha}{2} = \dfrac{\alpha + 90}{2} = \boxed{\dfrac{\arcsin\frac{15}{17}}{2} + 45^\circ}$

$\beta = \dfrac{90 - \alpha}{2} = 45^\circ - \dfrac{\arcsin\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$

$\sin 2\beta = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha = \dfrac{8}{17} \Rightarrow 2R = \dfrac{16}{\sin 2\beta} = \dfrac{16 \cdot 17}{8} = \boxed{34} \Rightarrow \boxed{R = 17}$

$(\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha) \Rightarrow 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \dfrac{8}{17} = \dfrac{9}{17}$; $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{9}{34} \Rightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

Получим: $\angle AFE = \dfrac{\alpha + 90}{2} = \boxed{\arcsin\left(\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right) + 45^\circ}$

(3) $\triangle OBD$ – п/у: $\sin\alpha = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{r}{2R - r} = \dfrac{15}{17} \Rightarrow 17r = 30R - 15r$

$r = \dfrac{30R}{32} = \dfrac{\cancel{30}^{15} \cdot 17}{\cancel{32}_{16}} = \dfrac{15 \cdot 17}{16} = \boxed{\dfrac{155}{16}}$

(4) $\triangle AEF$ – п/у., $FE = 2R = 34$

$\sin 2\beta = \dfrac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \dfrac{15}{17}$

$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta \Rightarrow \sin^2\beta = \dfrac{2}{17 \cdot 2} = \dfrac{1}{17} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \dfrac{32}{17 \cdot 2} = \dfrac{16}{17} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$AF = 2R \cdot \sin\beta = \dfrac{34}{\sqrt{17}}$; $AE = 2R \cdot \cos\beta = \dfrac{34 \cdot 4}{\sqrt{17}} \Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2} AF \cdot AE = \dfrac{\cancel{34} \cdot 34 \cdot 4}{\cancel{17} \cdot \cancel{2}} = \boxed{136}$

$\boxed{\text{Ответ: } R = 17;\ r = \dfrac{155}{16};\ \angle AFE = \arcsin\left(\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right) + 45^\circ;\ S_{AEF} = 136}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

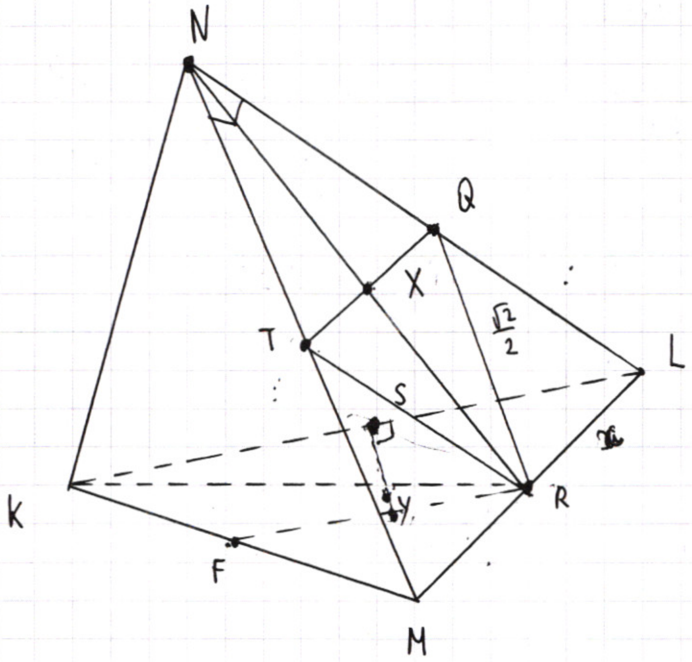
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$KL = 3$

$KM = 1$

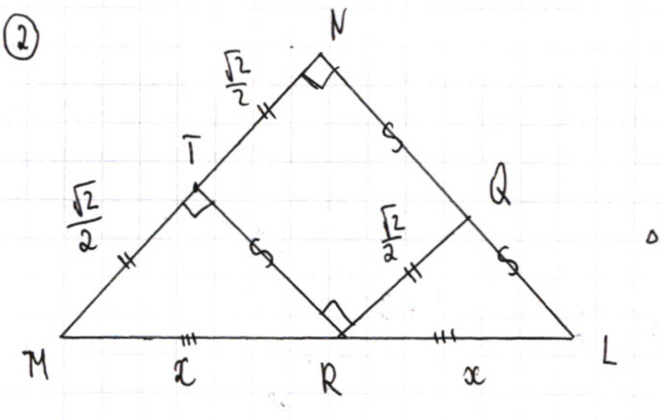
$MN = \sqrt{2}$



~~① 1. пусть O – центр сферы. Тогда OT = OR = r~~

① пусть т. O – центр сферы. Тогда $OT = ON = OQ = OR$. Пусть т. $X \in (MNL)$, $OX \perp (MNN)$. Тогда $\triangle OXN = \triangle OXQ = \triangle OXR = \triangle OXT$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow$ т. X – центр. окружности, описанной около $NQRT$ (т.к. $XN = XQ = XT = XR$). TR и QR – ср. линии $\triangle MLN$ и $\triangle MNL$ соотв. $\Rightarrow TR \parallel NQ$; $QR \parallel NT \Rightarrow NQRT$ – параллелограмм по опр. $\Rightarrow$ т.к. $NQRT$ вписан в окр, $NQRT$ – прямоугольник, $X = TQ \cap NR$

②



пусть $MR = RL = x$

~~Аналогично пусть т. Y – точка описанной окр. △FSR. Тогда O ∈ XY. Тогда Y – центр вписанной окр. в KML.~~

$\triangle KML$: $S_{KML} = p \cdot r = \frac{3+1+2x}{2} \cdot r = (2+x) \cdot r$

$S_{FSR} = \frac{1}{4} S_{KML} = \frac{(2+x) \cdot r}{4}$

$S_{FSR} = \frac{FS \cdot SR \cdot FR}{4r} = \frac{x \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{4} \cdot r} = \frac{(2+x) \cdot r}{\cancel{4}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-6+6-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+36y^2-36y-36=45 \end{cases}$$

пусть $a=x-6$; $b=2y-1$

Получим: $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9\left((b)^2-10\right)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \quad (1) \\ a^2+9b^2-90=0 \quad (2) \\ a-6b\geq 0 \quad (3) \end{cases}$

(1): $a^2-13ab+36b^2=0$ при $a=0$: $b=0$ не уд. (2) $\Rightarrow$ поделим на b^2: $t=\frac{a}{b}$

$t^2-13t+36=0$

$D=169-144=25$

$t_1=\frac{13+5}{2}=9$

$t_2=\frac{13-5}{2}=4$

Получим: $\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=9 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=9b \quad (3) \\ a=4b \quad (4) \end{array}\right.$, $b\geq 0$ из усл. (3) (усл *)

Подставим (3) в (2):

$81b^2+9b^2=90$

$90b^2=90 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \quad \Rightarrow a=9 \\ b=-1 \text{ — не уд. усл. *} \end{array}\right.$

Подставим (4) в (2):

$16b^2+9b^2=90$; $25b^2=90$; $b^2=\frac{18}{5} \Rightarrow b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Обратная замена: 1) $x=9+6=15$; $y=1$

2) $x=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+6$; $2y=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1 \Rightarrow y=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2}$

Ответ: $x=15$ $y=1$ или $x=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+6$ $y=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

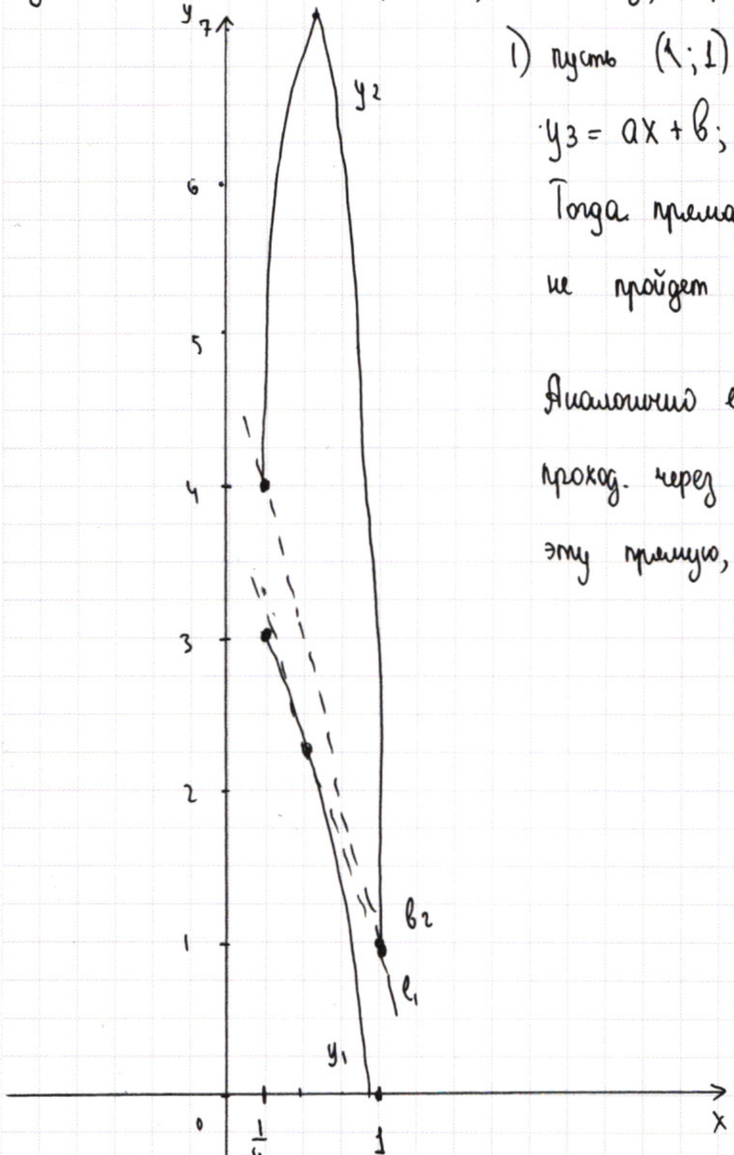
№6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$y_3 = ax+b$ - прямая

$y_1 = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ - гипербола

$y_2 = -32x^2+36x-3$ - парабола, ветви вниз, вершина в т. $\left(\frac{9}{16}; \frac{57}{8}\right)$



1) пусть $(1;1) \in l_1 = ax+b$, l_1 - касательная к y_1.

$y_3 = ax+b$; $y_2 = 4 + \frac{4}{4x-5}$

Тогда прямая l_1 уд. задачи, до тех пор, пока она не пройдет через точку $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

Аналогично если провести l_3 - касательную к y_2, проход. через т. $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$, то мы можем крутить эту прямую, пока прямая не пройдет через т. $(1;1)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos^2\alpha$ $1 - \frac{1}{5} = \pm\frac{4}{5}$ $tg\,\alpha - ?$ $\cos\alpha \neq 0$

$\cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

sin, cos

$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1): $\cos(2\alpha+2\beta) + \frac{2}{\sqrt{5}}$ $tg^2\alpha \neq 1$

$tg\,\alpha \neq \frac{\pi}{4}$

~~$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

~~$2\sin 2\beta - \cos 2\beta + \sqrt{5}\sin 2\alpha = -1$~~

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$\frac{5}{18} = \frac{25}{90} = \frac{7}{\theta}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$(x-3)(x+1)$

$a = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{4\alpha + 4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = 0$

$\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha = 1$

$= 2\cdot\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $= x$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = \frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha + 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 3 = 0$

$\cos 2\beta = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

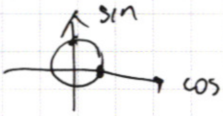
$3 + 2tg\,\alpha - tg^2\alpha = 0$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

$0 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{1}{3}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin 2\beta^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$



если: $\sin 2\alpha = 0$:

$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

$\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} \sin 2\alpha + \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

если $\cos 2\alpha = 0$:

$\alpha = \frac{\pi}{4}$!

$\cancel{2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 1 \mid \cdot \sqrt{5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\cos 2\alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$

$R = \frac{abc}{4R}$

$2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 1$

$\cos\alpha \neq 0$:

$2 \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ $\mid : \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 3 \cdot \sin^2\alpha = 0$

$FS = a$

$SF =$

$1 + 2\,tg\,\alpha - 3\,tg^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 1 = 0$

$x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - x + 6}$

$x^2 + 36y = 12x - 36y = 45$

$\cancel{x(x-6) + 36(y-1)}$

$x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

17

$\frac{90}{25} =$

$\cancel{x^2 - 12x + 36 + 36(y^2 - y)} = 9$ $\frac{16}{5}$

$(x-6)^2 + \cancel{36} + 36y^2 - 36y - 36 = 45$

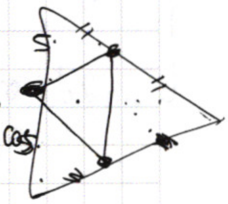
$\frac{90}{5} = 18$ $\frac{16}{5}$

если $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$:

$\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \sin 2\alpha - \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = 1$

$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cancel{2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} - 2(\cos$



$x - 12y > 0$

$D = 1 + 4 = 5$

$45 - 36 = 9$

$x^2 - 12x + 36 \quad -36$

36

$y($

$(y^2 - y - 1)$

$(x-12y)^2 = x^2 - 24xy + 144y^2$

$\cancel{x^2 - 12xy}$

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$25b^2 = 90$

$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

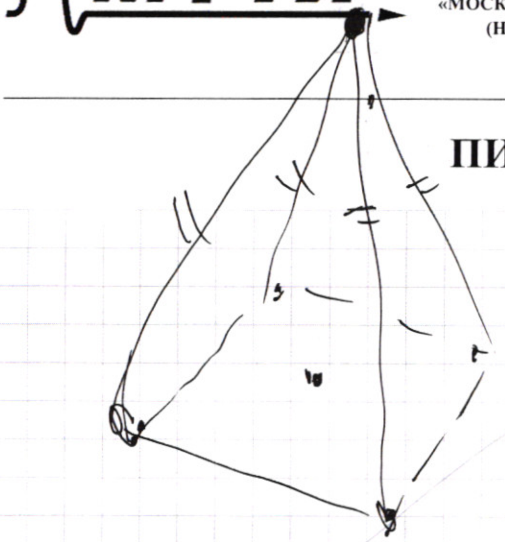
$KL = 3$; $KM = 1$ $MN = \sqrt{2}$

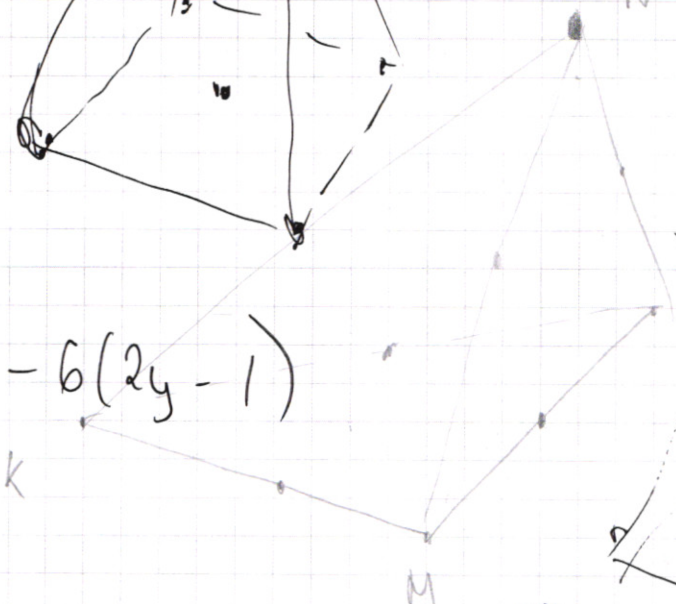
$9 = 1 + 2 - 2\sqrt{2}\cos\varphi$

$\cos\varphi = -\frac{6}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$\varphi = 180 - 30 = 130^\circ$

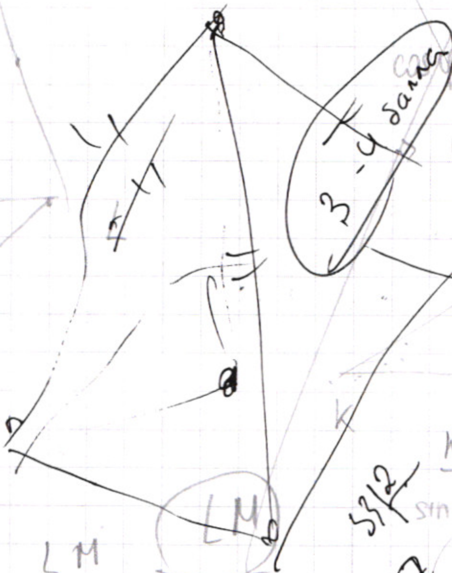
3 – 4 балла





$-6(2y - 1)$

наим. радиус



LM

$3+5+5=13$

$\frac{KL}{\sin 130} = \frac{1}{\sin L}$

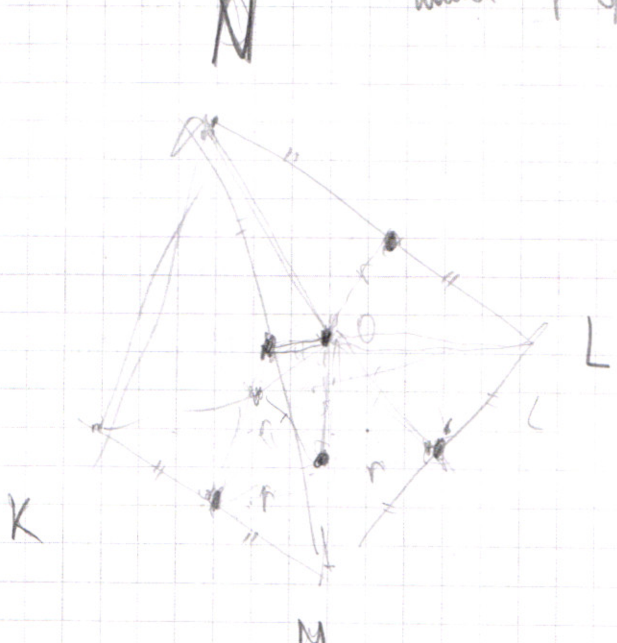
$\frac{5\sqrt{3}}{2}$

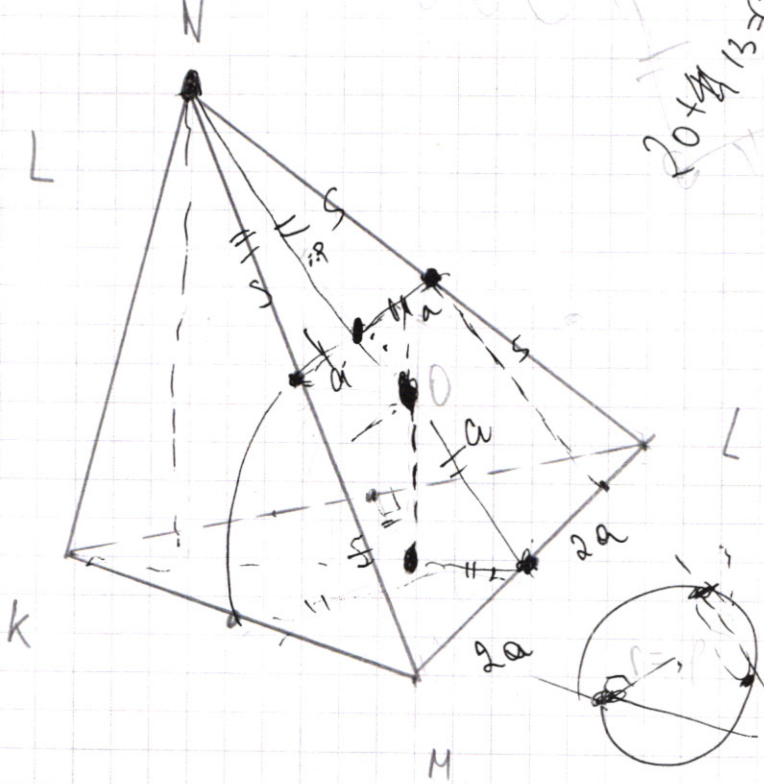
$16 \cdot 7$

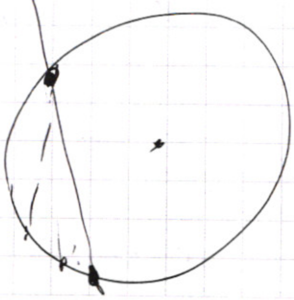
$\sin L =$

$NO =$ $OM = ON$

$20 + 13 = 33$







☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2y(x-6)-1(x-6)=(x-6)\cdot(2y-1)$

$x-12y+6-6=(x-6)-(2y+1)$

$a=x-6$ $\quad b=\cancel{1-2y}\ 2y+1$

$a+b>0$

$a+b=\sqrt{ab}$

$(x-6)+\quad 2y-1$

$45+36=81$

$(x^2-12x+36)-36+36y^2-36y=45$

$36y^2-36y-81=0 \quad |:9$

$\cancel{4y^2-4y+9=0}$

$\cancel{D=4+36\cdot 4\cdot 9}$

$(2y-1)^2=4y^2-4y+1$

$x-6-12y+6=(x-6)-6($

$a-6b\geq 0$

$x-6=a \quad ; \quad 2y-1=b$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$x-6+6-12y=a-6b$

a^2

$36y^2-36y-81=a^2$

$(+1)\ -1$

$(x^2-12x+36)+36y^2-36y-81=0$

$=\cancel{18b}$

$9(4y^2-4y+1-10)=9\cdot(b^2-10)=0$

$9(4y^2-4y-9$

$$\begin{cases} a^2+9b^2-90=0 \\ a^2+ab+b^2=0 \quad |:a^2 \end{cases}$$

$a^2+9(b^2-10)=0$

$a+b=\sqrt{ab} \Rightarrow a^2=90-9b^2$

$\cancel{90-9b^2+\sqrt{b}\cdot\sqrt{90-9b^2}+b^2=0}$

$36\times 4=144$

$a+b=\sqrt{ab}$

$a^2+2ab+b^2=ab$

a^2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Усл ж: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0$.

$10x - (x^2 - 10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 = t$, $\boxed{t > 0}$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t - t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$9^{\log_3 3} = 3^{\log_3 9} = 9$

$16^{\log_2 4} = 4^{\log_2 16}$

$x^a \geq \cancel{x^a}\ x^b$

$$\begin{cases} ax + b \geq \dfrac{16x - 16}{4x - 5} \\ ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3 \end{cases}$$

$18 \cdot 18 = 144$, 18, $324 - 96 = 228$

$32 \cdot 3 = 96$

$228 : 4 = 57$

$228 + 96 = 324$

$y_1 = \dfrac{16x - 16}{4x - 5}$

$x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$\dfrac{36}{64} = \dfrac{9}{16}$

$16x - 16 : (4x - 5) = 4$, $16x - 20$

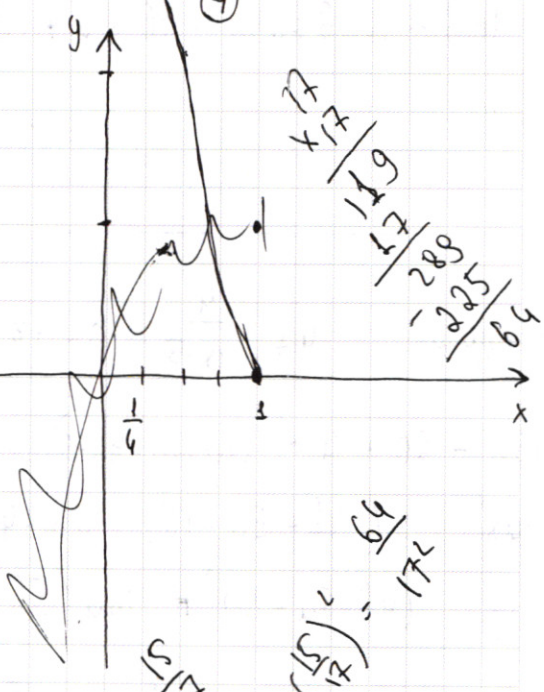
$y_2 = -32x^2 + 36x - 3$

$32x^2 - 36x + 3 = 0$

$x = 1$: $-32 + 36 - 3 = -35 + 36 = 1$

~~$\frac{1}{4}D = 18^2 - 32 \cdot 3 =$~~

$\frac{1}{4}D = 18^2 - 32 \cdot 3 = 324 - 96 = 228 = (2\sqrt{57})^2$



$y_1 = \dfrac{16x - 16}{4x - 5} = 4 + \dfrac{4}{4x - 5}$

Df: $x \neq \frac{5}{4}$

$+$ $-$ $+$; 0, 1, $\frac{5}{4}$, x

Нули: $x = 1$

$y' = \dfrac{16 \cdot (4x - 5) - (16x - 16) \cdot 4}{(4x - 5)^2}$

$x = \frac{1}{2}$: $\dfrac{8 - 16}{2 - 5} = \dfrac{8}{3}$

$-16 \cdot 5 + 16 \cdot 4 = -16 < 0$

$\dfrac{\cancel{16}\ 8}{\cancel{2} \cdot 17} =$

$x = \frac{1}{4}$: $\dfrac{4 - 16}{1 - 5} = \dfrac{-12}{-4} = 3$

$17 \cdot 17 = 119$, 17, 289, -225, 64

$\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{64}{17^2}$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

и $x=\frac{1}{4}$: $y = 4 + \frac{4}{-4} = 3$

$$\begin{array}{r|l} -\,16x-16 & 4x-5 \\ 16x-20 & \overline{4} \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\,81 \\ 24 \\ \hline 57 \end{array}$$

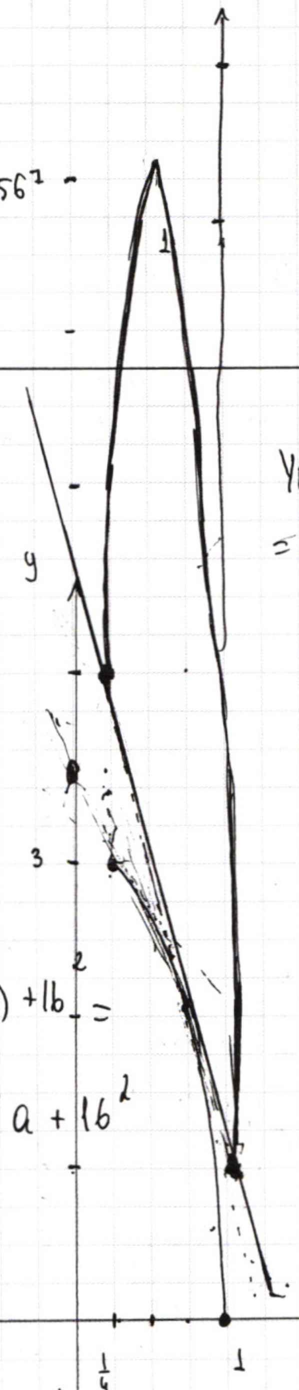
$8 \cdot 7 = 56$

$x=1$: $y = 4 + \frac{4}{4-5} = 0$

$4 + \frac{4}{-3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$

$$\begin{array}{r} \times\,18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\,81 \\ 81 \\ \hline 162 \end{array}$$

$y_1 = 4 + \frac{4}{4x-5}$



$y_2 = -32x^2 + 36x - 3$

$x=1$:

x			
y			

$-32 + 36 - 3 =$

$= 36 - 35 = 1$

$y_B = -\frac{\cancel{32} \cdot 81}{\cancel{16} \cdot \cancel{16}_8} + \frac{\cancel{36} \cdot 9}{\cancel{16}_8} - 3 =$

$= -\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - 3 = \frac{81}{8} - 3 \quad \frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}$

верш. $\frac{\cancel{36}^{18}}{32 \cdot \cancel{2}} = \frac{9}{16}$

$y_3 = ax + b$ ≤

$x = \frac{1}{4}$:

$y = -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 =$

$= -2 + 9 - 3 = 4$

$$\begin{array}{r} \times\,32 \\ 5 \\ \hline 160 \\ +\,64 \\ \hline 224 \end{array}$$

$\sin\alpha = \frac{15}{17}$

64

$(4b-5a-16)^2 = (4b-5a)^2 - 32(4b-5a) + 16^2 =$

$= 16b^2 - 40ab + 25a^2 - 16 \cdot 8b + 32 \cdot 5a + 16^2$

$$\begin{array}{r} \times\,16 \\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

т. касания: $4 + \frac{4}{4x-5} = ax + b \quad | \cdot (4x-5)$

$16x - 20 + 4 = (ax+b)(4x-5) = 4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b$

$4ax^2 + x(4b - 5a - 16) - 5b - 4 = 0$

$D = (4b-5a-16)^2 + 16a(5b+4) = 16b^2 - \cancel{40ab} + 25a^2 - \cancel{16 \cdot 8b} + \cancel{32 \cdot 5a} + 16^2 +$

$+ \cancel{80ab} + \cancel{64a} = 16b^2 - 50ab - 128b + 224a + 25a^2 + 16^2 = 0$

~~$25a^2$~~ ~~$25 \cdot 50b$~~

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle AFE = \alpha + \beta$

$90 - \beta = \alpha + \beta$

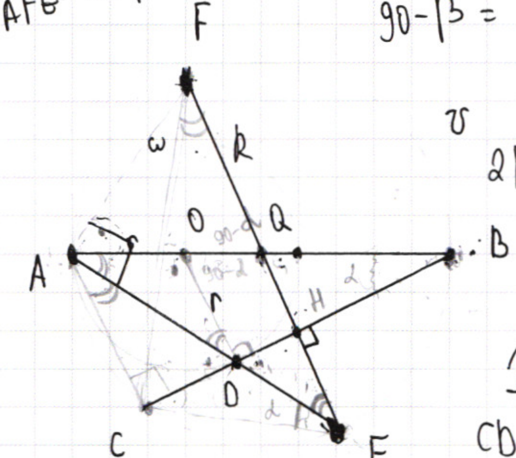
$BD = \frac{17}{2}$

$CD = \frac{15}{2}$

$\frac{180 - (90 + \varphi)}{2} = \frac{90 - \varphi}{2}$

$2\beta = 90 - \alpha$

$\angle ADB = \frac{90-\varphi}{2} + 90 = \varphi + \frac{90-\varphi}{2}$



$\angle FAQ = 90 - \beta = \frac{180 - 90 + \alpha}{2} = \frac{90+\alpha}{2}$

$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{2R}$

$CEF = \varphi$

$180 - (90 - \alpha)$

$\angle BAD =$

$15 + 17$, $\frac{32}{2} = 16$

$180 = 2\beta$

$= \frac{90+\alpha}{2}$

$\frac{90+\alpha}{2} + 90 = \alpha + \frac{90+\alpha}{2}$

$\alpha + \beta = \frac{3\alpha + 90}{2}$

$180 - 2\beta + 90 - \alpha = 180$

$\beta = \frac{90-\alpha}{2} + \alpha = \frac{90+\alpha}{2}$

$(\beta + \alpha) \cdot 2 + 90 - \alpha = 180$

$\angle ADC = 90 - \frac{90-\alpha}{2} = \frac{180 - 90 + \alpha}{2} = \frac{90+\alpha}{2}$

$17 \times 15 = 255$

$34 \times 4 = 136$

$DAC = 90 - \frac{90+\alpha}{2} = \frac{90-\alpha}{2}$

$1 - \frac{8}{17} = \frac{9}{17}$

$225 + 64 = 289$

$90 - \angle ADC = \frac{90-\alpha}{2}$

$90 + \beta + \beta + \alpha =$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{34}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$90 + 90 - \alpha + \alpha = 180$

$17 \times 17 = 289$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t - t^{\log_3 4} \ge t^{\log_3 5}$ $\quad a = \log \; t$

$\log_t \left(t - t^{\log_3 4}\right) \ge \log_t t^{\log_3 5}$ $\quad t>0 \quad t=1$ проверить!

1) $t \in (0;1)$

$t = 10x - x^2$

$t>1$:

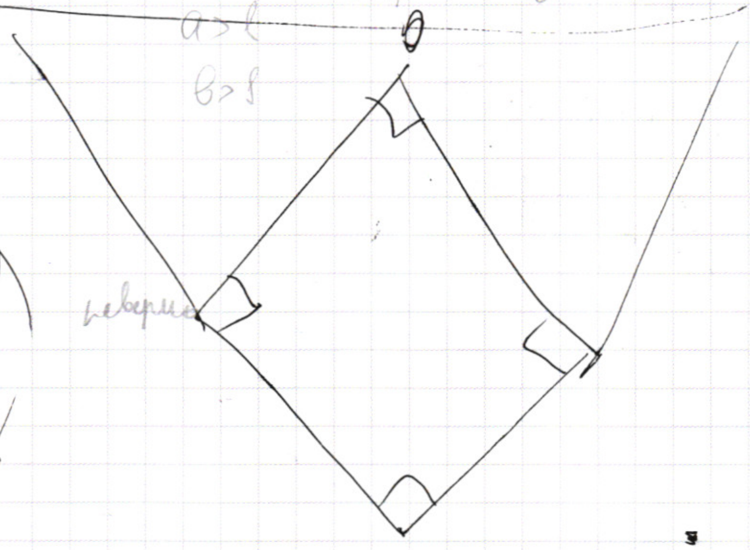
$1 - \log_3 4 \ge \log_3 5$

$\dfrac{\log_t t}{\log_t t^{\log_3 4}} \ge \log_t t^{\log_3 5}$

$1 \ge \log_3 20$ неверно

$a>1$

$b>1$

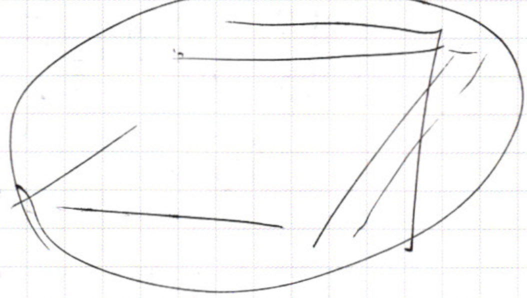


неверно

$\dfrac{1}{\log_3 4} \ge \log_3 5$

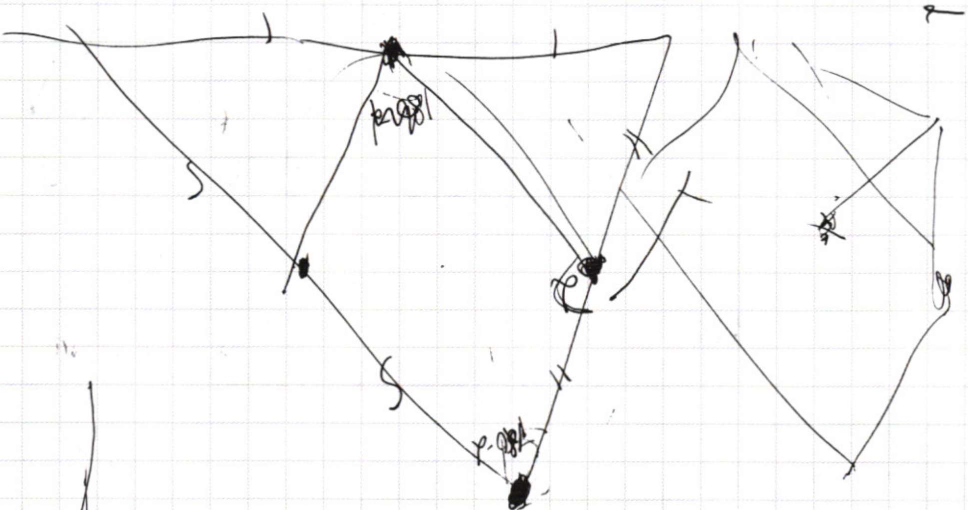
$1 \ge \log_3 5 \cdot \log_3 4$

$t \in (0;1)$



$\cos 2\alpha = \dfrac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$



☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)