МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) \overset{+\sin 2\alpha}{=} -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

$x = 2\alpha,\ y = 2\beta$

$(2): \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \iff \sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{17}$

$\sin((y+x)+y) + \sin x = -\frac{8}{17}$

$\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y + \sin x = -\frac{8}{17}$

$\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y + \sin(x+y-y) = -\frac{8}{17}$

$\sin(x+y)\cdot\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y + \sin(x+y)\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos(x+y) = -\frac{8}{17}$

$2\sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{8}{17}$

$\sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{4}{17}$

Имеем: $\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow \cos y = \frac{4}{17}\cdot\sqrt{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$

I) $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

~~Отсюда~~ Первое равенство $\overset{(1)}{\vphantom{x}}$:

$\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos x = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$4\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) = -1.$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha = 0$

продолжение номера №1 см. страница 3
продолжение работы см. стр 2

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2-6x$$

$$3^{\frac{\log_3(x^2+6x)}{\log_2 4}} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2-6x$$

$$3^{\frac{\log_3(x^2+6x)}{\log_2 4}} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-(x^2+6x)$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-(x^2+6x) \quad (x^2+6x>0 \text{ (из ОДЗ)})$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 4}$$

$x^2+6x=t$, $t>0$

$$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}-t^{\log_4 4}$$

$$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

$\log_4 t = y$

$$3^y+4^y \geq 5^y$$

$$3^y+4^y-5^y \geq 0$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y-1 \geq 0$$

Очевидно, эта функция убывает по y. Следовательно,

$3^y+4^y \geq 5^y$: равенство при $y=2$

Т.к. функция убывает, то $y \in (-\infty; 2]$

$\log_4 t \leq 2 \Leftrightarrow 0<t\leq 16$

$0<x^2+6x\leq 16$

I) $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

II) $x^2+6x-16\leq 0$ продолжение номера №3 см. страница 4.
продолжение работы см. стр 3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №1)

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$ (по условию $tg\alpha$ существует)

$8tg\alpha + 2 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

II) $\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Первое равенство (1): $\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin x - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 + \sin^2\alpha = 0$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

а) $\sin\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$

б) $\sin\alpha \neq 0$

$4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad |:\sin\alpha \neq 0$

$tg\alpha = -4$

Имеем 3 значения: $tg\alpha = 0$, $tg\alpha = -\frac{1}{4}$, $tg\alpha = -4$.

Ответ: $0; -\frac{1}{4}; -4$.

продолжение работы см. стр. 4

~~№3.~~

$$\cancel{3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 - 6x}$$

$$\cancel{3^{\log}}$$

продолжение №3

$(x-2)\cdot(x+8) \leq 0 \Rightarrow \cancel{x \in [-8;-6)\cup}$

$x \in [-8;2]$

~~Объясня~~ Объединяя, получаем: $x \in [-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$.

продолжение работы см. страницу 5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№3.~~

$\cancel{3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2}$

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$3xy-2x-3y+2 = x(3y-2)-1\cdot(3y-2)=(x-1)(3y-2)$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y=4 \iff 3(x^2-2x+1)+3\left(y^2-\frac{4}{3}\cdot y+\frac{4}{9}\right)-3-\frac{4}{3}=4 \iff$$

$$\iff 3(x-1)^2+3\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{3}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$a=x-1$, $b=y-\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $x=a+1$, $y=b+\frac{2}{3}$

Имеем:

$$\begin{cases} 3b+2-2a-2=\sqrt{3ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b-2a=\sqrt{3ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9b^2-12ab+4a^2=3ab \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

продолжение номера №2 см. стр. 7
продолжение работы см стр 6

продолжение работы см стр. 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение № 2.

$$\begin{cases} 9b^2-15ab+4a^2=0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$a\neq 0$, $b\neq 0$, т.к. не выполнено $a^2+b^2=\frac{25}{9}$

$9\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}\right)-15\left(\frac{b}{a}\right)+4=0$. $t=\frac{b}{a}$, тогда: $9t^2-15t+4=0$

$D=225-144=81$

$t=\frac{15\pm 9}{18}$ $\left[\begin{array}{l} t=\frac{24}{18}=\frac{4}{3} \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Имеем: $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ или $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$

$\left[\begin{array}{l} b=\frac{4}{3}\cdot a \\ b=\frac{1}{3}\cdot a \end{array}\right.$. Также необходимо учесть $3b-2a\geq 0$

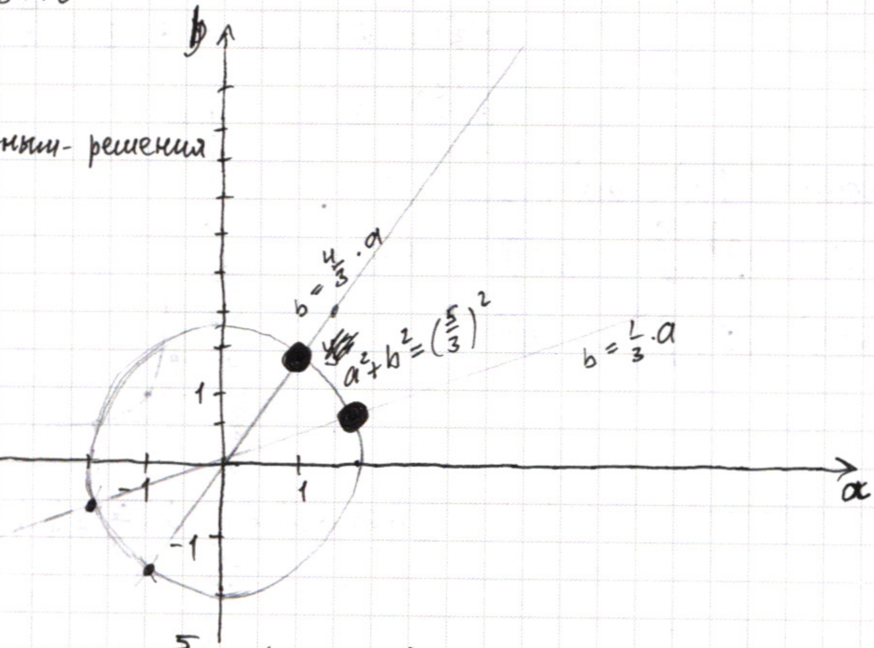
$b\geq\frac{2}{3}\cdot a$.

$b=\frac{4}{3}\cdot a$ верно при $a,b>0$

$b=\frac{1}{3}\cdot a$ верно при $a,b<0$

Имеем:

точки, отмеченные жирным- решения



~~то есть~~, 1. $\begin{cases} b=\frac{4}{3}\cdot a \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$

$a^2+\frac{16}{9}\cdot a^2=\frac{25}{9}$

$\frac{25}{9}\cdot a^2=\frac{25}{9}\Rightarrow a=1,\ b=\frac{4}{3}$

2. $\begin{cases} b=\frac{1}{3}\cdot a \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$

$a^2+\frac{1}{9}a^2=\frac{25}{9}\Rightarrow a^2=\frac{25}{10}\Rightarrow\begin{cases} a=-\frac{5}{\sqrt{10}} & (\text{т.к. } a<0) \\ b=-\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{cases}$

продолжение см стр. 8

вернемся к x и y: $x^2 \begin{cases} x = a+1 = 2 \\ y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = a+1 = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = -\frac{5}{3\sqrt{10}} + \frac{2}{3} \end{cases}$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1 - \frac{5}{\sqrt{10}} ; \frac{2}{3} - \frac{5}{3\sqrt{10}}\right)$.

№6.

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$, $x \in (1;3]$

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

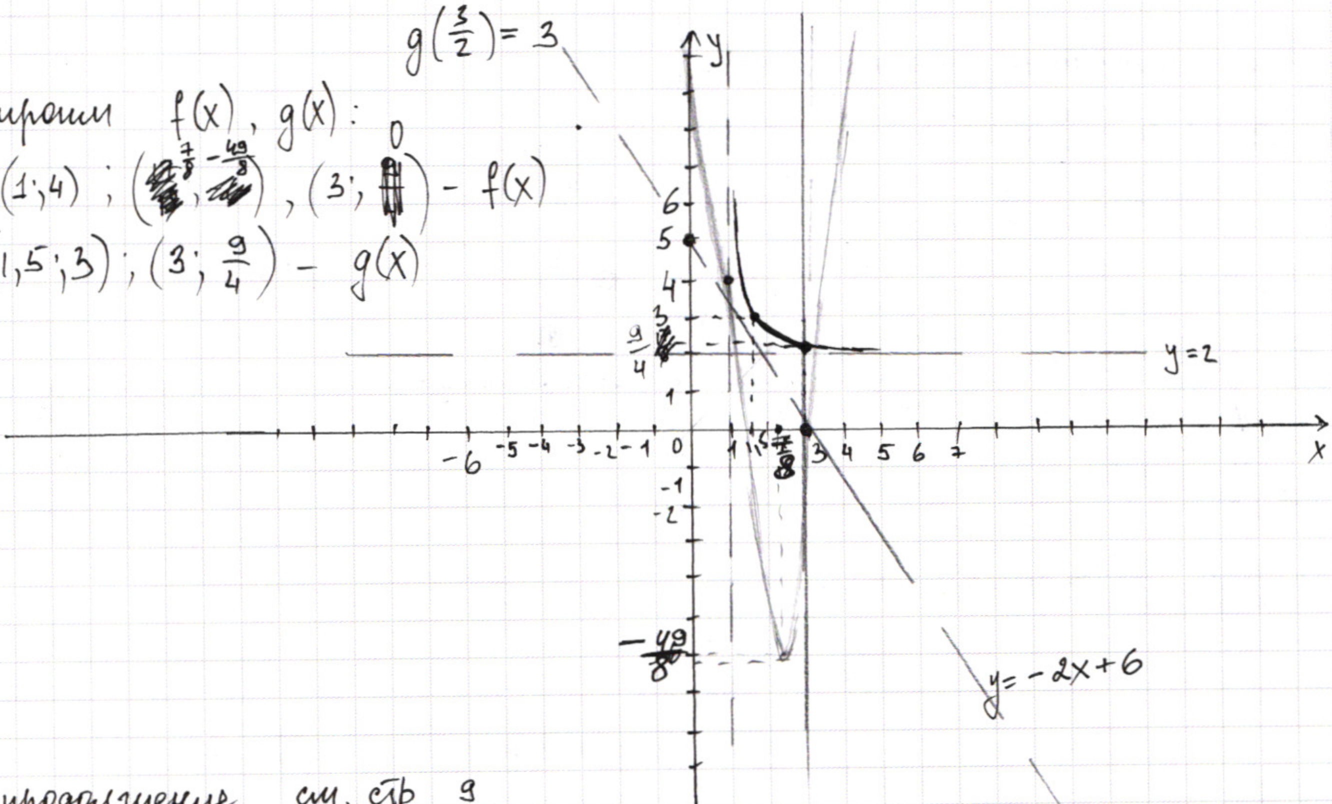
Построим $2+\frac{1}{2x-2}$ и $8x^2-34x+30$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{7}{8}$, $y_0 = \frac{8 \cdot 289}{64} - 34 \cdot \frac{17}{8} + 30 = \frac{289}{8} - \frac{578}{8} + 30 = -\frac{289}{8} + 30$
$= -\frac{49}{8}$

при этом для $f(x) = 8x^2 - 34x + 30$: $f(1) = 8 - \frac{34}{1} + 30 = 4$
$f(3) = 8 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30 = 72 - 102 + 30 = 0$

для $g(x) = 2 + \frac{1}{2x-2}$: $g(1)$ не определено, $x=1$ – асимптота
$g(3) = 2 + \frac{1}{6-2} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$
$g\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

Строим $f(x)$, $g(x)$:
$(1;4)$; $\left(\frac{7}{8}; -\frac{49}{8}\right)$, $(3; 0)$ – $f(x)$
$(1,5;3)$; $\left(3; \frac{9}{4}\right)$ – $g(x)$



продолжение см. стр 9.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдем прямую $y = ax+b$, проходящую через т. $(1;4)$ и $(3;0)$:

$$\begin{cases} 4=a+b \\ 0=3a+b \end{cases} \Rightarrow 4=-2a \Rightarrow \begin{matrix} a=-2 \\ b=6 \end{matrix}$$

Покажем, что эта прямая удовлетворяет неравенству:

$$2x+\frac{1}{2x-2} \geq -2x+6, \quad 2x+\frac{1}{2x-2}-4 \geq 0, \quad 2x(2x-2)+1-4(2x-2) \geq 0$$

$$4x^2-4x+1-8x+8 \geq 0$$
$$4x^2-12x+9 \geq 0, \quad D=144-144=0$$

$$(2x-3)^2 \geq 0 \text{ - это верно.}$$

$$-2x+6 \geq 8x^2-34x+30,$$
$$8x^2-32x+24 \leq 0$$
$$x^2-4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

При таких x н-во выполнено, что соответствует условию $x \in (1;3]$.

Итак, н-во верно при $a=-2$, $b=6$. Из графика следует, что других значений a и b не будет.

Ответ: $(-2;6)$

№5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$, $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ – для простых p

$3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$, $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$.

Количество (x,y) – ?

$$f(x)=f\left(y\cdot\frac{x}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$$

Т.е. необходимо найти кол-во пар (x,y), что $f(x)<f(y)$.

Запишем значение $f(x)$ для всех натур. чисел $3 \leq x \leq 27$:

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(x)$	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

x	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(x)$	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

продолжение см. стр 10

для простых чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 запишем: $f(p) = [\frac{p}{4}]$

Заметим, что $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Также $f(2) = 0$ (2 - простое). Далее $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$ и т.д.

Заполним так всю таблицу. Посчитаем кол-во (x, y) таких, что $f(x) < f(y)$

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
кол-во y	15	15	8	15	8	15	15	8	5	15	3	8	8	15	1	15	1	8

~~X 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17~~
~~кол-во y~~

X	21	22	23	24	25	26	27
кол-во y	8	5	0	15	5	3	15

для $\forall x$: $f(x) = 0$ (кол-во y) $= 15$

для $f(x) = 1$ (кол-во y) $= 8$

для $f(x) = 2$ (кол-во y) $= 5$

$f(x) = 3$ (кол-во y) $= 3$

$f(x) = 4$ (кол-во y) $= 1$

$f(x) = 5$ (кол-во y) $= 0$

Итого: $15 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 214$ пар x, y

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

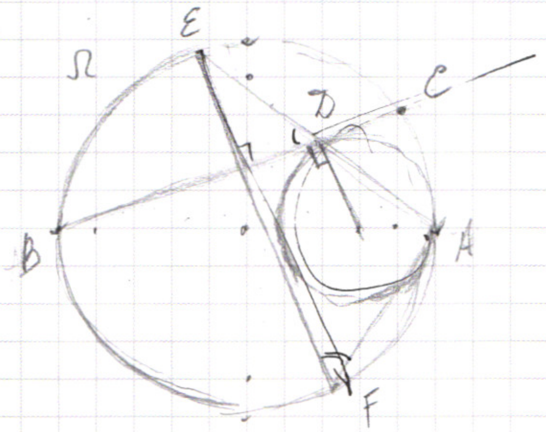
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$f(x) = f(y \cdot \frac{x}{y}) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

f определена на Q

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\frac{x}{y} = fx - fy \Rightarrow f(x) < f(y)$.

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

аналогия.

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$x \to 27$

~~нашво~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$3y \pm 2x$

$-6x-4y = -2(3x+2y)$

$-3y-2x = -y-4x$

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{-3y-2x+3xy+2} \\ 3y^2+3x^2-2(2y+3x)-4=0 \end{cases}$

$\cancel{3y-2x=\sqrt{-(3y+2x)+3xy+2}}$

$\cancel{3y \cdot y+}$

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{-(3y+2x)+3xy+2} \\ 3y\cdot y+2x\cdot x+x\cdot x-\cancel{(3y+2x)-4=0} = \end{cases}$

$\begin{cases} 3y+2x-4x = \sqrt{-(3y+2x)+3xy+2} \\ 3y\cdot y+2x\cdot x+x\cdot x-(3y+2x)-y-4x-4=0 \end{cases}$

для $Q>0$: ~~натур~~ >0, дробные

$f(ab)=f(a)+f(b)$, $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, если p – простое

Скиво (x,y) N: $3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\cancel{3}y$

3

$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$2+\frac{1}{2x-2} = f(x)$

$g(x) = 8x^2-34+30$

$x = \frac{34}{16} = \frac{7}{8}$

$y = \cancel{\frac{8\cdot 289}{64\,8} - 34\cdot\frac{17}{16}+30}$

$x = \frac{17}{18} \quad y = -6$

$x = 3 \quad y = \frac{9}{4}$

$\cancel{x=1} \quad x = 1{,}5 \quad y = 3$

$\cancel{3y-2x=}$

$3xy-2x-3y+2 = x(3y-2)-1$

$(3y-2) = x(-1)(3y-2)$

$3x^2+3y^2-6x-4y = 4 \Leftrightarrow \cancel{3}$

$3(x^2-2x+1)+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})-3-\frac{4}{3} = 4$

$3y-2x = \sqrt{x(-1)(3y-2)}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$\Rightarrow \quad a = x-1, \quad b = y-\frac{2}{3}$

$x = a+1 \quad y = b+\frac{2}{3}$

$\begin{cases} 3b-2a = \sqrt{3ab} \\ a^2+b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow 9b^2-12ab+4a^2 = 3ab$

$9b^2-15ab+4a^2 = 0$

$9t^2-15t+4 = 0$

$t = \frac{15\pm 9}{18} \Rightarrow t = \frac{4}{3}$, $t = \frac{1}{3}$

1) $b = \frac{4}{3}a \Rightarrow a, b > 0$

$\Leftarrow a^2+b^2 = \frac{25}{9}$ – окр! $(0;0)$; $r = \frac{5}{3}$

2) $b = \frac{1}{3}a \Rightarrow a, b < 0$

$a^2+\frac{a^2}{9} = \frac{25}{9}$

$a = 1, \quad b = \frac{4}{3}$

2. $b = \frac{1}{3}a \Rightarrow a^2 = \frac{25}{10}$

$a = -\frac{5}{\sqrt{10}}, \quad b = -\frac{5}{3\sqrt{10}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№1~~

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta) + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$ зн ≥ 3, $\cos\alpha \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

Имеем: $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \underline{\cos(2\alpha+2\beta)}\cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$\pm$

$$1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{17-1}{17} = \frac{16}{17}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$\Rightarrow \sin\alpha$ - ? $\Rightarrow$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 1 - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} = 1 - \frac{1}{1-\sin^2 2\alpha}$$

! 2 sin

$\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg} 2\alpha \sim \sin 2\alpha$!

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = A$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = B$

$(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta)\cos 2\beta + (\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta)\cdot \sin 2\beta + \sin\alpha = B$

$A\cdot\cos 2\beta \pm \sqrt{1-A^2}\cdot \sin 2\beta + \sin\alpha = B$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~$3^{\log_4(x^2+2}$~~

$3^{\log_3(x^2+}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)