МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

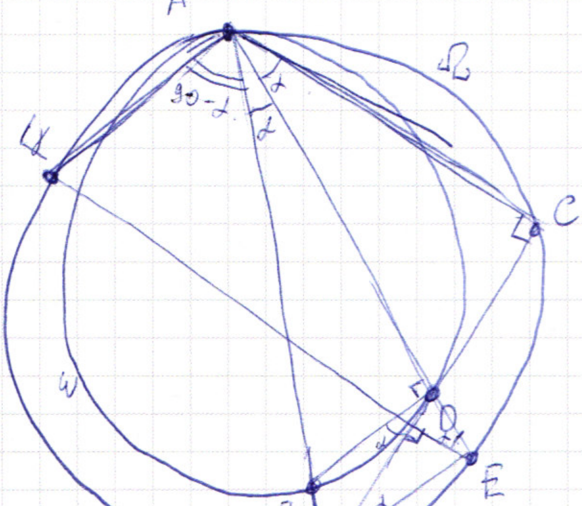
№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=0 \end{cases}$$

т.к. $(x-6)^2 \geq 0$, и $(6y-3)^2 \geq 0$, причём равенства достиг. только при $x=6$ и $y=\frac{1}{2}$ соответств., то из второго ур-я системы следует, что $x=6$ и $y=\frac{1}{2}$. Это решение удовлетворяет исходной системе.

Ответ: $(6; \frac{1}{2})$.

№4.



$CD=\frac{15}{2}$

$BD=\frac{17}{2}$

1) $S = AB \cap \omega$.

2) Пусть $\angle CBE=\alpha$. AB-диаметр, значит $\angle AEB=90°$, но т.к. в т. A ω и Ω касаются, то AS-диаметр ω, значит $\angle ADS=90° \Rightarrow SD \parallel BE \Rightarrow \angle SDB = DBE=\alpha$, но т.к. BD кас. к ω, то $\angle SAD=\angle SDB=\alpha$, $\angle EAC=\angle EBC=\alpha$, как опирающ. на дугу EC.

3) $\triangle DEB$-прямоуг., и $EF \perp BD \Rightarrow \angle DEF=\angle DBE=\alpha \Rightarrow \angle FEB=90-\alpha$, а $\angle FAB=\angle FEB=90-\alpha \Rightarrow \angle FAE=90° \Rightarrow FE$-диаметр Ω.

4) AD-бис. в $\triangle ACB \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{17}{15}$. Пусть $AB=17x$, $AC=15x$, то где ~~AB~~ $=8x$ (по Th. Пифагора) BC.

Но $BC=CD+BD=\frac{32}{2}=16=8x \Rightarrow x=2 \Rightarrow AB=34$, $AC=30$.

AB-диаметр $\Omega \Rightarrow$ радиус $\Omega=17$. BD-кас. к $\omega \Rightarrow BS\cdot AB=BD^2$.

$BS=\frac{BD^2}{AB}=\frac{17^2}{4\cdot 34}=\frac{17}{8} \Rightarrow AS=34-\frac{17}{8} \Rightarrow$ радиус ω равен $17-\frac{17}{16}=\frac{15\cdot 17}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4) Из прямоуг. $\triangle ACD$: $AD^2 = \sqrt{AC^2+CD^2} = \sqrt{30^2+\frac{15^2}{4}} = \frac{15}{2}\sqrt{17}$.

5) $AD \cdot DE = BC \cdot CD$, т.к. AE и CB - хорды. Тогда

$$DE = \frac{BC \cdot CD}{AD} = \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}}{\frac{15}{2} \cdot \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AE = AD + DE = 8\sqrt{17}.$$

6) $FE = 34$, $AE = 8\sqrt{17} \Rightarrow AF = 2\sqrt{17}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{AF}{FE} = \frac{2\sqrt{17}}{34} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$, $S_{AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2} = 8 \cdot 17 = 136$, $\angle AFE = 90 - \alpha = \arccos\alpha =$
$= \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

Ответ: радиус ω - $\frac{255}{16}$, Ω - 17, $S_{AFE} = 136$,
$\angle AFE = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

№5. Выпишем $f(x)$ для $x \in P$:

$f(2)=0$ $\quad f(7)=1$ $\quad f(17)=4$
$f(3)=0$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(19)=4$
$f(5)=1$ $\quad f(13)=3$ $\quad f(23)=5$.

Тогда заметим, что если $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ - его каноническое разлож., то $f(n) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_k f(p_k)$. Поэтому мы можем найти f для всех натур. $2 \le x \le 25$.

$f(4)=0$ $\quad f(10)=1$ $\quad f(16)=0$ $\quad f(22)=2$
$f(6)=0$ $\quad f(12)=0$ $\quad f(18)=0$ $\quad f(24)=0$
$f(8)=0$ $\quad f(14)=1$ $\quad f(20)=1$ $\quad f(25)=2$.
$f(9)=0$ $\quad f(15)=1$ $\quad f(21)=1$

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$, для рационального $a>0$. Также $f(a) = f(a) + f(1)$
$\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$, для $a \in \mathbb{Q}$, $a>0$. В частности, для $x \in \mathbb{N}$ $f(x) = -f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.
Т.е. нужно найти кол-во таких пар $(x;y)$, что $f(x) < f(y)$. Для x есть 10 знач., при к-рых $f(x)=0$,
7 - $f(x)=1$, 3 - $f(x)=2$, 1 - $f(x)=3$, 2 - $f(x)=4$, и 1 - $f(x)=5$.
Тогда для $f(x)=0$, $f(y) \ge 1$; для $f(x)=1$; $f(y) \ge 2$; ....;
для $f(x)=5$; $f(y) \ge 6$. Посчитаем кол-во удовлетв. пар.

1) $f(x)=0$: $10 \cdot 14$.
2) $f(x)=1$: $7 \cdot 7$
3) $f(x)=2$: $3 \cdot 4$
4) $f(x)=3$: $1 \cdot 3$
5) $f(x)=4$: $2 \cdot 1$
6) $f(x)=5$: $1 \cdot 0$

Итого, таких пар $(x;y)$: $140+49+12+3+2=206$
Ответ: 206.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

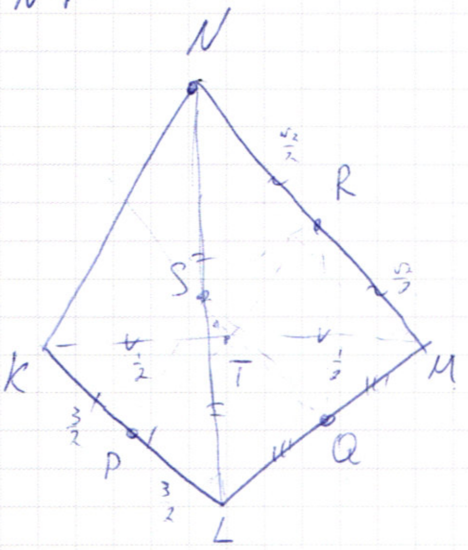
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$.

№7



1) R - сер. MN, Q - ML, P - KL, T - KM, S - NL. Т.к. N, R, S, Q лежат на одной сфере и при этом в одной плоскости, то NSQR - прямоугольник (ведь N, S, Q, R образуют параллелограмм, а он ещё и вписанный. Также P, S, R, T лежат на одной сфере и в одной плоскости $\Rightarrow$ PSRT - прямоуг.

Значит $\triangle LNM$ - прямоугольный.

2) Тогда, если мы рассмотрим сечение сферы KLMN плоскостью LNM, то диаметр окружности LNM не превосходит диаметр

При $x=1$: $a+b\le 1$. Т.е., чтобы 1 было выполнено необх. и достаточно, чтобы $a+b\le 1$ и $\frac{1}{4}a+b\le 4$. ($\Leftrightarrow a+4b\le 16$)

Теперь рассмотрим (2). Т.к. $x\in[\frac{1}{4};1]$, то $4x-5<0$, умножим ~~поделим~~ на него со сменой знака.

$16x-16\ge(ax+b)(4x-5) \Leftrightarrow -4ax^2+x(16-4b+5a)+5b-16\ge 0.$ (3)

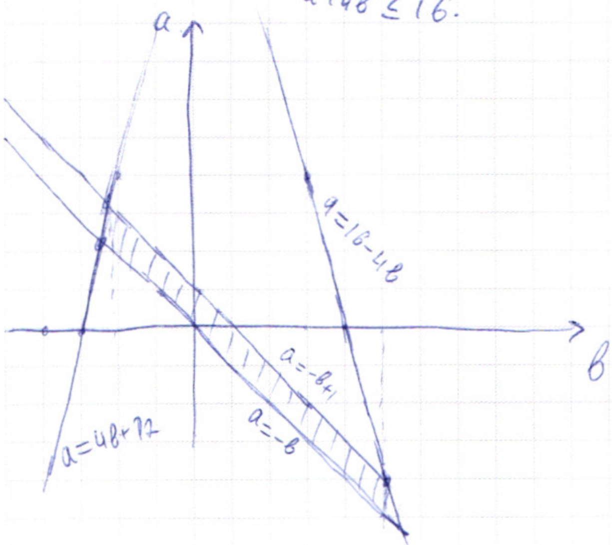
Подставим $x=1$ и $x=\frac{1}{4}$, получим, что $a+b\ge 0$ и $a-4b-12\ge 0$.

Тогда мы знаем, что необходимыми для выполнения системы явл. условия ~~$a+4b\le 16$~~ $a+b\ge 0$ и $a-4b\ge 12$.

Тогда $a-4b+4(a+b)\ge 4\cdot 0+12=12 \Leftrightarrow 5a\ge 12 \Rightarrow a>0$,

значит (3) – парабола с ветвями вниз $\Rightarrow a+b\ge 0$ и $a-4b-12\ge 0$ – необходимые условия для выполнения (2) на отрезке $[\frac{1}{4};1]$.

То есть для выполнения системы необходимо и достаточно, чтобы
$$\begin{cases} a+b\ge 0 \\ a+b\le 1 \\ a-4b\ge 12 \\ a+4b\le 16. \end{cases}$$
Изобразим это множество в осях $(b;a)$



N3.

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-10x|=10x-x^2$. ~~Пусть $10x-x^2=a$, тогда~~

$\Rightarrow 10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\ge 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\Updownarrow$

$3^{\log_3(10x-x^2)}+4^{\log_3(10x-x^2)}\ge 5^{\log_3(10x-x^2)}$. Пусть $\log_3(10x-x^2)=a$, тогда $3^a+4^a\ge 5^a \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a\ge 1$. $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ – строго убывающая ф-я на $\mathbb{R}$. Значит при $x\le 2$ $f(x)\ge f(2)=1$, а при $x>2$ $f(x)<1$ $\Rightarrow$ $\underline{a\le 2}$. Сделаем обратную замену.

$\log_3(10x-x^2)\le 2 \Rightarrow 10x-x^2\le 9 \Leftrightarrow (x-1)(x-9)\ge 0 \Leftrightarrow$ $x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$, но по ОДЗ $x\in(0;10) \Rightarrow x\in(0;1]\cup[9;10)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть $2(\alpha+\beta) = x$, $2\alpha = y$. Тогда

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2x-y) + \sin y = -\frac{2}{5} \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2x \cos y - \cos 2x \sin y + \sin y = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$\cos x = \pm\frac{2}{\sqrt5}$. Разберём 2 случая

1) $\cos x = \frac{2}{\sqrt5}$. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{3}{5}$.

$\sin 2x = -\frac{4}{5}$. Тогда $(2) \Leftrightarrow -\frac{4}{5}\cos y - \frac{3}{5}\sin y + \sin y = -\frac{2}{5}$.

$-\frac{4}{5}\cos y + \frac{2}{5}\sin y = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\cos y - \sin y = 1$. Тогда если

$\cos y = a$, $\sin y = b$, то $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ b=2a-1 \end{cases}$

Тогда $(2a-1)^2 + a^2 = 1 \Leftrightarrow 5a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\frac{4}{5}. \end{array}\right.$

1.1. $\cos y = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0$. Т.к. $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, то

$0 = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha = 1$, $tg\alpha = \pm1$

1.2. $\cos 2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 - tg^2\alpha = \frac{4}{5} + \frac{4}{5}tg^2\alpha \Leftrightarrow \frac{9}{5}tg^2\alpha = \frac{1}{5}$.

$tg\alpha = \pm\frac{1}{3}$.

2) $\cos x = -\frac{2}{\sqrt5}$, тогда $\sin x = \frac{4}{5}$, и. $\frac{4}{5}\cos y + \frac{2}{5}\sin y = -\frac{2}{5}$.

$2\cos y + \sin y = -1$. Тогда $\left[\begin{array}{l} \cos y = 0 \\ \cos y = -\frac{4}{5}. \end{array}\right.$

$\cos y = 0$ уже был разобран, остался случай $\cos y = -\frac{4}{5}$.

$1 - tg^2\alpha = -\frac{4}{5}(1+tg^2\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{5}tg^2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow tg\alpha = \pm3$

Ответ: ±1; ±3; $\pm\frac{1}{3}$.

№6.

$$\begin{cases} ax+b \le -32x^2+36x-3 \ (1) \\ ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-5} \ (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1). $(1) \Leftrightarrow$

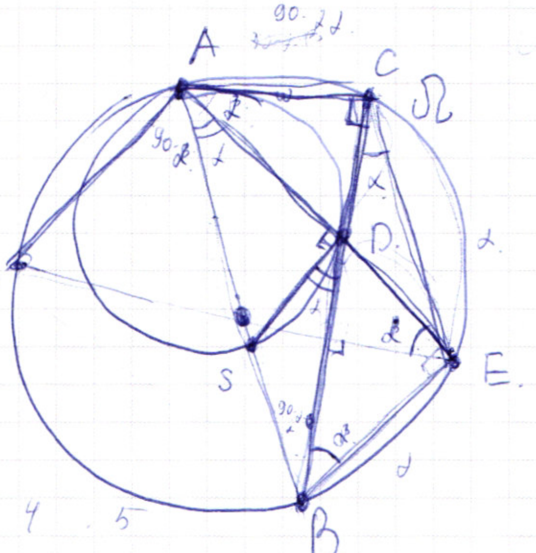
$-32x^2 + x(36-a) - 3 - b \ge 0$.

Это парабола, ветви к-рой направ. вниз. Значит, если в точках $\frac{1}{4}$ и 1 ее значения будут неотриц., то и на $[\frac{1}{4}; 1]$ будут неотр.

При $x = \frac{1}{4}$: $-32\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4}(36-a) - 3 - b \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a + b \le 0$.

$f(x) < f(y)$. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(4)=0$
$f(6)=0$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(12)=0$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(18)=0$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(24)=0$
$f(25)=2$



$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

R_1, R_2 - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF}

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{14}{2}$

$AB = 14x$

$AC = 15x$

$BC = 8x$

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{14}{15}$

$BS \cdot AB = BD^2$

$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$\boxed{BS = \frac{14^2}{4 \cdot 34} = \frac{14}{8}}$

$\cancel{10x - x^2} > 0$

$x^2 - 10x = a$

$AS = 34 - \frac{17}{8} =$

$\frac{AS}{AB} = \frac{R_1}{R_2}$

$R_2 = 17$

$\frac{32}{2} = 8x$

$\boxed{x=2}$

$AB = 34$

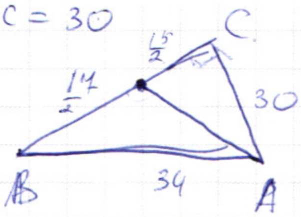
$AC = 30$

$|a|^{\log_3 4} \geq a + 5^{\log_3(-a)}$ $AB = 34$

$AC = 30$

$5^{\alpha} =$

$5^{\left(\frac{\log_5(-a)}{\log_5 3}\right)}$



$14 \cdot \frac{17}{16} = \frac{15 \cdot 14}{16}$

$DE = BD \sin\alpha$

$AD =$

$\sqrt{30^2 + \frac{15^2}{4}} = \sqrt{\frac{}{4}}$

$30^2 \cdot 4 + 15^2$

$\frac{15^2 \cdot 17}{4} = \frac{15}{2}\sqrt{17}$

$D = 100 - 32$

$\frac{255}{16}$

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(14)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

66

$\sqrt{-a}$

$x(10-x) > 0$

$x \in (0; 10)$

$f(2) = f(2) + f(1)$

$\Downarrow$

$f(1) = 0$

$\sqrt{34^2 - 8^2 \cdot 17}$

$= \sqrt{17(2 \cdot 34 - 64)}$

$\sqrt{17}$.

$x^2 - 10x + 8$

$f(ab) = f(a) + f(b)$.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p- простое.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$x < y$. $\frac{x}{y} < 1$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(2) = 0$.

17.63

$f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(1-2\sin^2 2\beta) + 2\cos^2 2\alpha\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\cos 2\beta$

$2\alpha = x$

$2(\alpha+\beta) = y$

$\sin y = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos y = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2y-x) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin 2y\cos x - \cos 2y\sin x + \sin x = -\frac{2}{5}$

1) $\cos y = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2y = 2\sin y\cos y = -\frac{4}{5}$

$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = \frac{3}{5}$

~~$\sin 2y = 2\sin y\cos$~~

$-\frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$-\frac{4}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x = -\frac{2}{5}$ $\left|\cdot\left(\frac{5}{2}\right)\right.$

$2\cos x - \sin x = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$-4ax^2+x(5a-4b+16)-16+5b\ge0$

$-4a\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(5a-4b+16)-16+5b\ge0$

$16x-16-4ax^2+5ax+5b-4bx\ge0$ $\boxed{4x-5}$

$-4ax^2$

$x=\frac14$

$-\frac{a}{4}+\frac{5a}{4}-b+4$

$-16+5b\ge0$

$a-4b-12\ge0$

$-a-4b+16\ge0$

$-8b+4\ge0$

$b\le\frac12$

$a-4b-12$

$\frac14 a+b\le4$

$a+4b-16\le0$

$a+b\ge0$

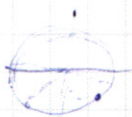
$a+b\le1$

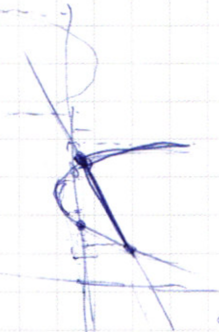
$a-4b-12\ge0$

$0\le a+b\le1$

$-32+36-3=1$

$\frac{8}{3}-1=$





$2^4\cdot24$

$D=36^2-32\cdot12$

$24(81-24)$

$-32x^2+8x(36-a)-3b\ge0$

$x\in[\frac14;1]$

$-32\cdot\frac{1}{16}+\frac14(36a)-3b\ge0$

$-2+9-3-\frac14 a-b\ge0$

$x^2-12x+36$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=0$

$x=6$

$y=\frac12$

$$\begin{cases} 2y(x-6)-(x-6) \\ \sqrt{(2y-1)(x-6)} = x-12y \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2(\alpha+\beta)=x$

$2\alpha=y$

$\cos x=$

$\sin x=-\frac{1}{\sqrt5}$.

$\sin(2x-y)+\sin y=-\frac{2}{5}$

$\sin 2x\cos y-\cos 2x\sin y=-\frac{2}{5}$.

$\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

1) $\cos x=\frac{2}{\sqrt5}$.

$\cos 2x=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$.

$\sin 2x=-\frac{4}{5}$

$-\frac{4}{5}\cos y-\frac{3}{5}\sin y=-\frac{2}{5}$.

$4\cos y+3\sin y=2$

$4a+3b=2$

$a^2+b^2=1$.

$a=\frac{2-3b}{4}$

$4-12b^2+9b^2+16b^2=16$

$13b^2-12b=0$

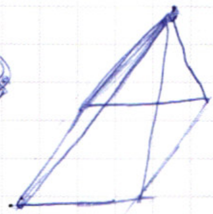
$b=\frac{12}{13}$

$b=0$

$\cancel{25b^2-12b-12=0}$

$\cancel{D=144+4\cdot12\cdot25}$

$16(9+75)=16\cdot 84$



$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$a=2b-1$

$1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$

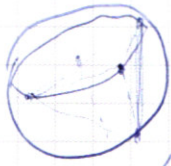
$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

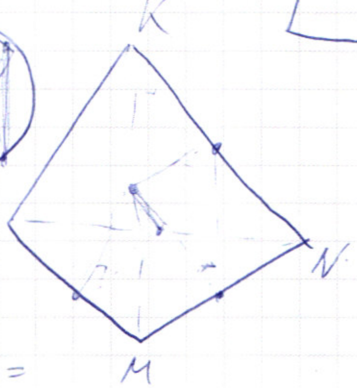
$b=-1-2a$. $\frac{1}{\cos^2 x}$

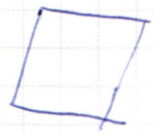
$a^2+(1+2a)^2=1$.

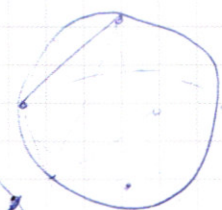
$a=0$

$a=-\frac{4}{5}$

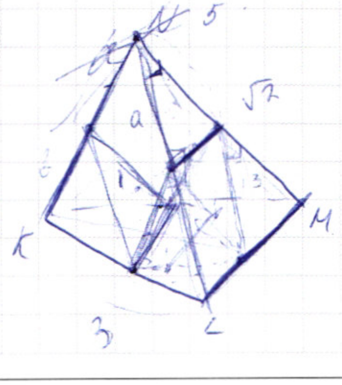


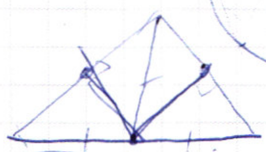






$\sqrt{a^2+a\frac{1}{2}}=$





☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$[\frac{1}{4};1]$

$-32x^2+x(36-a)-3-b\geq 0$

$-32\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(36-a)-3-b\geq 0$

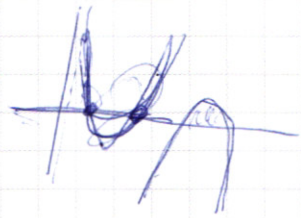
$-2+9-3-\frac{1}{4}a-b\geq 0$

$\boxed{\frac{1}{4}a+b\leq 4}$

$0\leq a+b\leq 1$

$\cancel{=4a-4b+5a+5b\geq 0}$

$\cancel{\frac{16x-16-4ax^2-4bx+5ax+5b}{4x+b}}\geq 0$



$-4ax^2+x(16-4b+5a)+5b-16\geq 0$

$D=(16-4b+5a)^2+16a(5b-16)=$

$(5b)^2+(4b)^2+(16)^2-2\cdot 64b=\cancel{40ab}+160a+80\cancel{b}-64\cancel{b}$

$-\cancel{4}=\frac{1}{4}a+4-b+\frac{5}{4}a+5b-16\geq 0$

$a\geq 4b+12$

$a\geq -b$

$a-4b-12\geq 0$

$a\geq 4b+12$

$4(a+b)\geq 0$

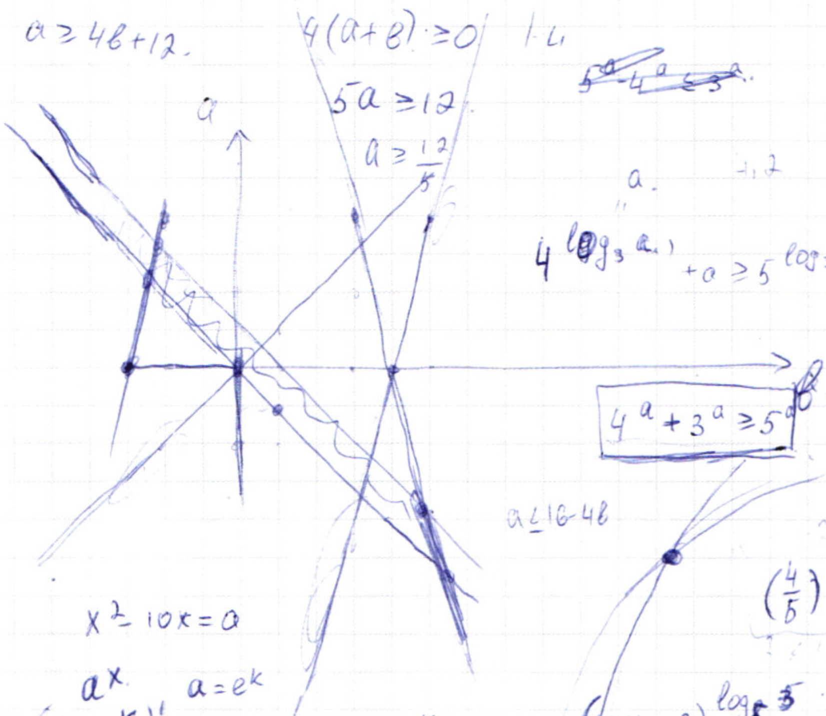
$5a\geq 12$

$a\geq\frac{12}{5}$

$\cancel{5a-4a\geq 3a}$

$\begin{cases}\frac{1}{4}a+b\leq 4\\ a+b\leq 1\\ a+b\geq 0\\ a-4b-12\geq 0\end{cases}$

$a^{\frac{\log_3 5}{\log_4 5}}$



$4^{\log_3 a}+a\geq 5^{\log_3 a}$

$a^{\log_3 3}+a^{\log_3 4}\geq a^{\log_3 5}$

$a\geq -b$

$a+4b\leq 16$

$a=4\cancel{b}\ 16-4b$

$b=5$

$a=4$

$\boxed{4^a+3^a\geq 5^a}$

$a\leq 16-4b$

$\left(\frac{4}{5}\right)^a+\left(\frac{3}{5}\right)^a\geq 1$

$\cancel{a\geq 4b-16}$

$a\in$

$x^2-10x=a$

$10x-x^2>0$

a

a^x $a=e^k$

$((e^x)^k)'$

$f(e^x)$

$f(a)=a^k$

$f(x)=a^x$

$(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$a+a^{\log_3 4}\geq a^{\log_3 5}$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$a^{\log_b c}$

$b^{x\log_b a}$

$c=b^x$

$2\sqrt{a^{\log_3 4+1}}$

$f(x)^k$

$=f'(x)\cdot k f(x)^{k-1}$

$e^x\cdot k\cdot e^{(k-1)x}$

$=a^x\cdot\ln a$

$\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}$

a^x

$(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\cancel{x^{\log_a b}-x^{\log_a c}}$

$|a|^{\log_3 4}-a\geq(-a)^{\log_3 5}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)