МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (2) \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (1) \end{cases}$

(1) $\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{2}{17}$, подставим (2)

$2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, подставим в (2)

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \quad (*) \quad |: \cos 2\alpha, \cos 2\alpha \neq 0$

$\operatorname{tg} 2\alpha \pm 4 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha \pm 4 = \sqrt{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1}$

$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha \geq \pm 4 \\ \cancel{\operatorname{tg}^2 2\alpha} \pm 8\operatorname{tg} 2\alpha + 16 = \cancel{\operatorname{tg}^2 2\alpha} + 1 \quad (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha \leq \pm 4 \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \mp\frac{15}{8} \end{cases}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{15}{8} \quad (3)$

(**) $\pm 8\operatorname{tg} 2\alpha = -15$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \mp\frac{15}{8}$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

$\sin^2 2\alpha = 1$

Если $\cos 2\alpha = 0$, то $\sin 2\alpha = \pm 1$, исходя из (*) $\sin 2\alpha = -1$

Тогда $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ и

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -1}$

Известно, что $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = 0$, подставим (3)

$-\frac{15}{8}\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{15}{8} = 0$

$15\operatorname{tg}^2\alpha - 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64+225}}{15}$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3} \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{5} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда имеем, что $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$; $tg\,\alpha = -\frac{1}{5}$.

3. $|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

Введем замену $S = 26x - x^2$, $D \geq 0 \Rightarrow 169 - S \geq 0$ $\boxed{S \leq 169}$

$|-S|^{\log_5 12} \geq -S + 13^{\log_5 S}$ ОДЗ: $S > 0$, тогда модуль раскроется однозначно.

$S^{\log_5 12} \geq -S + 13^{\log_5 S}$

$S(S^{\log_5 12 - 1} + 1) \geq 13^{\log_5 S}$, логарифмируем по основанию 5.

$\log_5 S + \log_5 (S^{\log_5 12 - 1} + 1) \geq \log_5 S \cdot \log_5 13$

$\log_5 (S^{\log_5 12 - 1} + 1) \geq \log_5 S \cdot (\log_5 13 - 1)$

$\log_5 (S^{\log_5 12 - 1} + 1) \geq \log_5 S^{\log_5 13 - 1}$

$S^{\log_5 12 - 1} + 1 \geq S^{\log_5 13 - 1}$

$S^{\log_5 13} \leq S^{\log_5 12} + S$.

Т.к. $S > 0$, то на $S \geq 1$ обе функции возрастающие.
(Понятно, что $0 < S \leq 1$ является решением неравенства, ведь
$\log_5 13 > \log_5 12 \Rightarrow S^{\log_5 13} \leq S^{\log_5 12}$, т.к. $S \leq 1$).
Раз функция $g(S) = S^{\log_5 13}$ на $S > 1$ возрастает, и
$f(S) = S^{\log_5 12} + S$ на $S > 1$ возрастает, то они не пересекутся больше одного раза на $S > 1$ (также это понятно из того, что вторые производные обеих функций положительны, а значит они обе имеют вид и не пересекутся больше одного раза).
Найдем эту точку пересечения.

$S = 25$, тогда $g(S) = 169$, $f(S) = 144 + 25 = 169$

$g(S) = f(S)$ при $S = 25$, т. пересечения. Значит решением неравенства является область $0 < S \leq 25$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

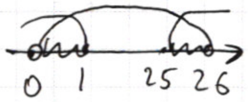
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Обратная замена:

$0 < 26x - x^2 \le 25$

$\begin{cases} x(x-26) < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \ge 0 \end{cases}$ (25; 1)

$\begin{cases} 0 < x < 26 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 25 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$



$\left[\begin{array}{l} 0 < x \le 1 \\ 25 \le x < 26 \end{array}\right.$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$.

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$, если $b = 1$, то

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$

Если $b = \frac{1}{a}$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\boxed{f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)}$

Необходимо найти $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$\boxed{f(x) < f(y)}$

Путем приравнивания b к простым числам, получаем:

$f(2a) = f(a)$

$f(3a) = f(a)$

$f(5a) - 1 = f(a)$

$f(7a) - 1 = f(a)$

$f(11a) - 2 = f(a)$

$f(13a) - 3 = f(a)$

Любое число из промежутка [1; 28] является простым, либо раскладывается на простые множители от 2 до 13.

$f(28) = f(14) = f(7) = 1$

$f(27) = f(9) = f(3) = 0$

$f(26) = f(13) = 3$

$f(25) = f(5) + 1 = 2$

$f(24) = f(12) = f(6) = f(3) = 0$

$f(23) = 5$

$f(22) = f(11) = 2$

$f(21) = f(7) = 1$

$f(20) = f(5) = 1$

$f(19) = 4$

$f(18) = f(3) = 0$

$f(17) = 4$

$f(16) = 0$

$f(15) = 1$

$f(14) = 1$

$f(13) = 3$

$f(12) = 0$

$f(11) = 2$

$f(10) = 1$

$f(9) = 0$

$f(8) = 0$

$f(7) = 1$

$f(6) = 0$

$f(5) = 1$

$f(4) = 0$

Имеем 2 равные 4

1 равна 5

2 равных 3

3 равных 2

8 равных 1

9 равных 0

Тогда посчитаем S-количество таких пар, что $f(x) < f(y)$.

$S = (1+2+2+3+8)\cdot 9 + (3+2+1+2)\cdot 8 + (2+1+2)\cdot 3 + (2+1)\cdot 2 + 2\cdot 1 =$

$= 16\cdot 9 + 8\cdot 8 + 5\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2 = 144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 231$

Ответ: 231.

6. $\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28 \end{cases}$, по условию $3x-2>0$, тогда

$\begin{cases} 8-6x \geq (ax+b)(3x-2) \\ 18x^2 - x(51+a) + 28 - b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ax^2 + x(6+3b-2a) - 8 - 2b \leq 0 \quad (*) \\ 18x^2 - x(51+a) + 28 - b \leq 0 \quad (**) \end{cases}$

$(**)$ $18x^2 - x(51+a) + 28 - b \leq 0$ на $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$, т.к. $18>0$, то это

равносильно: $\left\{\begin{array}{l} 18\cdot\frac{4}{9} - \frac{2}{3}(51+a) + 28 - b \leq 0 \\ 18\cdot 4 - 2(51+a) + 28 - b \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{51+a}{36} \leq \frac{2}{3} \\ \frac{51+a}{36} \geq 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8 - 34 - \frac{2}{3}a + 28 - b \leq 0 \\ 72 - 102 - 2a + 28 - b \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 51+a \leq 24 \\ 51+a \geq 72 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\boxed{\left\{\begin{array}{l} b \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ b \geq 2 - 2a \\ \left[\begin{array}{l} a \leq -27 \\ a \geq 21 \end{array}\right. \end{array}\right.}$ (1)

$(*)$ Если $a=0$, то $x \leq \frac{8+2b}{6+3b}$

$\frac{8+2b}{6+3b} \geq 2$

$\begin{cases} b>-2 \\ 4+b \geq 6+3b \end{cases}$; $\begin{cases} b<-2 \\ 4+b \leq 6+3b \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} b \leq -1 \\ b > -2 \\ a=0 \end{cases}}$, не удов. (1) $\quad \begin{cases} b \geq -1 \\ b < -2 \end{cases}$ $\varnothing$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $a \neq 0$, то
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a\frac{4}{9}+\frac{2}{3}(6+3b-2a)-8-2b\le 0 \\ 3a4+4(6+3b-2a)-8-2b\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{2a-6-3b}{3a}\le\frac{2}{3} \\ \frac{2a-6-3b}{3a}\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} a<0 \\ (6+3b-2a)^2+4(8+2b)\le 0 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

(I)
$$\begin{cases} 4+2b-8-2b\le 0 \\ 4a+24+12b-8-2b\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\ge -2 \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} b\le -2 \\ a<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a\le -6-3b \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a\ge -6-3b \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}
\qquad
\begin{cases} 4\le 8 \;\checkmark \\ 4a\le -16-10b \quad 2a\le -8-5b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\ge -2 \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} b\le -2 \\ a<0 \end{cases} \text{ не удов } (*) \\ \begin{cases} 4a\le -6-3b \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a\ge -6-3b \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

(II)
$$\begin{cases} a<0 \\ 36+9b^2+36b+4a^2-4a(6+3b)+32+8b\le 0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} a<0 \\ 9b^2+44b-12ab-24a+4a^2+68\le 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a\le -8-5b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\ge -2 \\ 4a\le -6-3b \\ a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a\ge -6-3b \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} b\ge 2-\frac{2}{3}a \\ b\ge 2-2a \\ \left[\begin{array}{l} a\le -27 \\ a\ge 21 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a\le -8-5b \\ b\ge -2 \\ 4a\le -6-3b \\ b\ge 2-\frac{2}{3}a \\ a\ge 21 \end{cases} \\ \begin{cases} b\ge 2-2a \\ 4a\ge -6-3b \\ a\le -27 \end{cases} \end{array}\right.$$

$21\cdot 4\le -6-3b$, чтобы система решалась $b\le -30$, но $b\ge -2$. $\varnothing$

$b\ge 2-\frac{2}{3}a$, max знач $2-14=-12$, $b\ge 12$ в худшем случае

max знач $-6-2+2a=-8+2a$ $\quad 4a\ge -8+2a$, $a\ge -4$

$-6-3b<-27\cdot 4$, чтобы система решалась

$b<34$

$34\ge 2-2a$, чтобы система решалась

$a\ge -16$, но $a\le -27$ $\varnothing$

[Продолжение на стр 9]

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$, введем замену $a=y-6$, $b=x-1$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \ (1) \\ 9b^2+a^2=90 \ (2) \end{cases}$

(1) $a=0$, $b=0$ $\varnothing$, тогда $a-6b=\sqrt{ab} \ :b$

$\begin{cases} a \geq 6b \\ ab \geq 0 \\ \frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}-6=0 \end{cases}$ $3;-2$

$\begin{cases} a \geq 6b \\ ab \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{a}{b}}=3 \\ \sqrt{\frac{a}{b}}=-2 \end{array}\right. \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=9b \\ a \geq 0 \end{cases}$, подставим в (2)

$9b^2+81b^2=90$

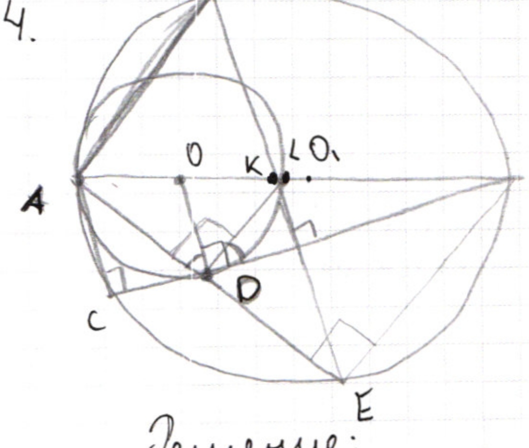
$b=\pm 1$, тогда $a=\pm 9$, но $a>0$ => $\boxed{\begin{array}{l} b=1 \\ a=9 \end{array}}$

Обратная замена:

$y-6=9$, $x-1=1$, тогда $\boxed{\begin{array}{l} y=15 \\ x=2 \end{array}}$

Ответ: $(2;15)$.

4.



Дано: A – т. кас. окр.
$CD=12$
$DB=13$
$FE \perp CB$

Найти: S_{AFE}
$\angle AFE$
R – радиус большей окр.
r – радиус меньшей окр.

Решение:

1) $OD \perp CB$ (т.к. CB - кас => $OD=r$

$OB=2R-r$ (AB - диам большой, т.к. окр. кас. внутр. образом в т. A, а AB - диам большой окр, то O-центр со лежит на AB,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ведь если провести кас через A, то O_1A и OA (O_1 – центр больш. окр) будут перпендик. этой кас => на одной прям.)

Т.к. $\angle ODB = 90°$, то по т. Пифагора $(2R-r)^2 = r^2 + DB^2$, или

$$(2R-r)^2 = r^2 + 169 \quad (*)$$

2) $\angle ACB = 90°$, т.к. AB – диам, а $\angle ACB$ – впис., тогда $\triangle ACB \sim \triangle ODB$ по 2м углам. Значит

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{DB}{DB+CD}$, или $(2R-r)25 = 26R$, подставим $2R-r$ отсюда в $(*)$

$$\begin{cases} \frac{26^2}{25^2}R^2 = r^2 + 169 \\ 50R - 25r = 26R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{26^2}{25^2}R^2 = r^2 + 169 \\ r = \frac{24}{25}R \end{cases}$$, подставим в верхнее ур-е

$$\frac{26^2}{25^2}R^2 = \frac{24^2}{25^2}R^2 + 13^2$$

$$R^2(26-24)(26+24) = 13^2 \cdot 25^2$$

$$R^2 = \frac{13^2 \cdot 25^2}{50 \cdot 2}$$

$$R = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}$$

Тогда $r = \frac{\overset{12}{\cancel{24}} \cdot 13 \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot 25 \cancel{5}} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

3) Хорды CB и AE пересек в т. D, тогда $AD \cdot DE = 12 \cdot 13$ ○

4) $\triangle EAB \sim \triangle DAL$ по 2м углам ($\angle AEB = \angle ADL = 90°$ т.к. на диам.)

Тогда $\frac{AD}{AD+DE} = \frac{r}{R} = \frac{12 \cdot \cancel{13} \cdot 2}{5 \cdot \cancel{13} \cdot 5} = \frac{24}{25}$

$$25AD = 24AD + 24DE$$

$AD = 24DE$, тогда подставим в ○: $24DE^2 = 12 \cdot 13$

$DE = \sqrt{\frac{13}{2}}$, тогда $AD = 24\sqrt{\frac{13}{2}}$

5) $\triangle DAO \sim \triangle EAK$ по 2м углам ($OD \perp CB$, $KE \perp CB$).

Тогда $\frac{r}{KE} = \frac{AD}{AD+DE} = \frac{24DE}{24DE+DE} = \frac{24}{25} = \frac{r}{R}$

Тогда $KE = R = \frac{1}{2}AB \Rightarrow K$ - центр окр Ω (в прямоуг. т.р. медиана из прям. угла равна половине основание)

Тогда FE - диаметр $\Rightarrow FE = 2R = 65$.

6) FE-диаметр $\Rightarrow \angle FAE = 90°$ (на диаметре).

$AE = AD + DE = 25\sqrt{\frac{13}{2}}$

Тогда по т. Пифагора $AF^2 + AE^2 = FE^2$

$AF = \sqrt{-\frac{25^2 \cdot 13}{2} + 13^2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{13}\sqrt{\frac{26-25}{2}} = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$

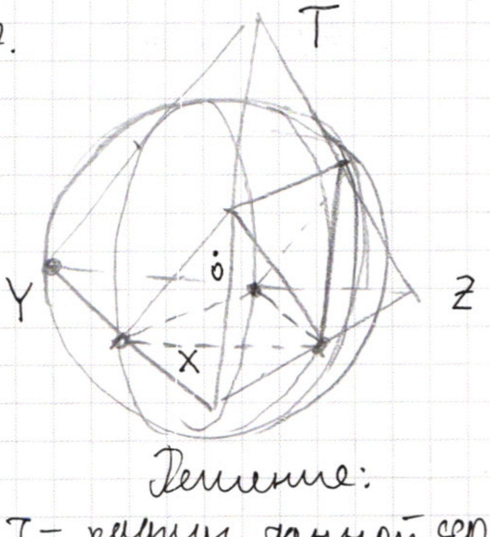
7) Т.к. $\angle FAE = 90°$, то $S_{AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2}$

$S_{AFE} = \frac{5\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot 25\sqrt{\frac{13}{2}}}{2} = \frac{13 \cdot 125}{4} = \frac{1865}{4}$

8) $\sin\angle AFE = \frac{25\sqrt{13}}{65\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$, тогда $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $S_{AEF} = \frac{1865}{4}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$.

7.



Дано: $XY = \sqrt{3}$

$TX = \sqrt{2}$

$TZ = 2$

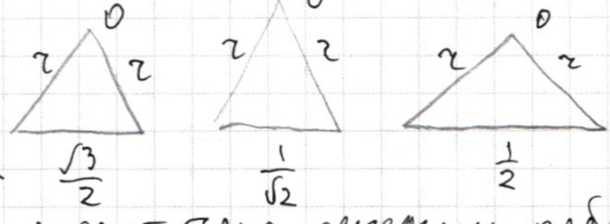
Найти: XZ

min R

Решение:

r – радиус данной сферы, тогда существуют треугольники

Тогда существуют треугольники



Значения оснований равны половинам соотв. сторон т.к. они средние линии, ведь сфера проходит через середины ребер

Тогда остается лишь

$$\begin{cases} a<0 \\ 9b^2+44b-12ab-24a+4a^2+68 \le 0 \\ \end{cases}$$

$9b^2+44b-12ab \le -4a^2-68+24a < 0$, т.к. $a<0$

$9b^2+44b-12ab$ будет меньше нуля независимо от b, если $22^2+9\cdot 12a<0$

$a<-\frac{121}{27}$

Имея ввиду (1) знаем, что т.к. $a<0$, то $a \le -27 < -\frac{121}{27}$

Значит достаточно лишь выполнение условие

$$\begin{cases} a \le -27 \\ b \ge 2-2a \end{cases}$$

Ответ: ~~a ≤ -27 при~~ $b \ge 2-2a$ при $a \le -27$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

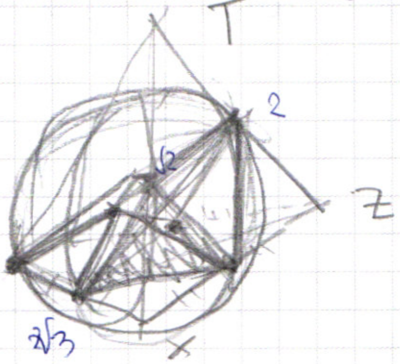
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3ax^2+x(6+3b-2a)-8-2b\le 0$

$a=0$



$\begin{cases} b>-2 & + \\ b<-2 & - \end{cases}$

$9x^2+y^2=18x-12y-45=0$

$y^2+36x^2-12xy=6-6x-y$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$6(x-1)$

$156=xy$

$\begin{cases}169=R^2-2Rr \\ 26R=50R-25r\end{cases}$

$24R=25r$

$169=R^2-\frac{R^2\cdot 144\cdot 2}{25}$

$y\ge 6x$

$xy-6x-y+6\ge 0$

$y(x-1)-6(x-1)\ge 0$

$(x-1)(y-6)\ge 0$

$(2R-r)^2=r^2+169$

$26R=25(2R-r)$

$2R-r=\frac{26}{25}R$

$\frac{26^2}{25^2}R^2=r^2+169$

$\boxed{r=\frac{24}{25}R}$

$\frac{26^2}{25^2}R^2=\frac{24^2}{25^2}R^2+169$

$R^2=\frac{(13\cdot 25)^2}{50^2}$

$R=\frac{13\cdot 25}{2}$

$a=y-6$

$b=x-1$

$y-6+6-6x=(y-6)-6(x-1)$

$\begin{cases}a-6b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90\end{cases}$

$a^2+36b^2-13ab=0$

$27b^2-13ab+90=0$

$a=\frac{9(3b^2+10)}{13b}$

$a-6b>0$

$a>6b$

$AD\cdot DE=156$

$\frac{AD}{DE}=\frac{Rr}{R-r}$

$AD^2=\frac{156r}{R-r}=$

$=\frac{156\cdot 156}{\frac{65}{2}-\frac{156\cdot 2}{5}}=\frac{65\cdot 5-156\cdot 2}{10}=$

$=156\cdot 12\cdot 2$

$=\sqrt{26}\cdot 12$

$13\cdot 5\cdot 5-12\cdot 13\cdot 2=13(25-24)=13$

$a-6b-\sqrt{ab}=0 \quad |:b$

$\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}-6=0$

$3;-2$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=3$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=-2$

$ab>0\Rightarrow \frac{a}{b}>0$

$\boxed{a=9b}$

$9b^2+81b^2=90$

$b^2=1$

$b=\pm1 \quad a=\pm9$

$9-6=\sqrt{9}$

$a>6b\Rightarrow$

$b=1\ a=1$

$12\cdot 13 \times 12 = 156$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|S|^{\log_5 12} \geq S + 13^{\log_5 -S}$

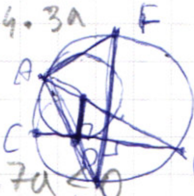
$-S > 0$

$S < 0$

$22^2 + 9 \cdot 12a$

$11^2 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \cdot 3a$

$\frac{r}{x} = \frac{AD}{AD+DE} = \frac{24DE}{25DE} = \frac{24}{25}$



$11^2 + 27a < 0$

$\frac{121}{27}$

$CD = 12$

$BD = 13$

$S^{\log_5 12} \geq -S + 13^{\log_5 S}$

$\boxed{S > 0}$ $a < -\frac{11^2}{27}$

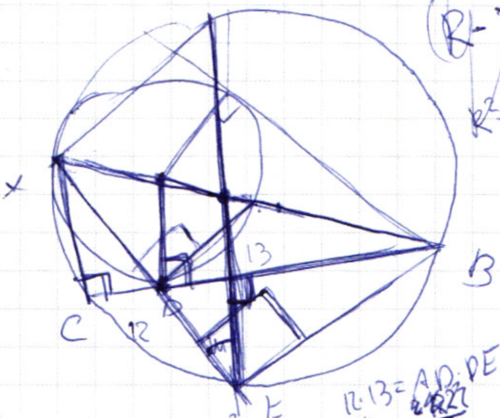
$S^{\log_5 12} \geq -S + 13^{\log_5 S}$

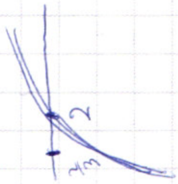
$S^{\log_5 12} + S - 13^{\log_5 S} \geq 0$

$125 \times 13 = 615 + 125 = 1365$

$(R-r)^2 + r^2 = 169$

$\log_5 S + \log_5 (S^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1) \geq \log_5 S \log_5 13$





$\log_5 (S^{\log_5 12 - 1} + 1) \geq \log_5 S (\log_5 13 - 1)$

$S^{\log_5 12 - 1} + 1 \geq S^{\log_5 13 - 1}$

$12 \cdot 13 = AD \cdot DE$

$\frac{AD}{DE} = \frac{2Rr}{R-r}$

$169 + r^2 = (R-r)^2$

$-S > 0$

$1 \geq \frac{S^{\log_5 13} - S^{\log_5 12}}{S} = \frac{S^{\log_5 12}(S^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1)}{S}$

$\boxed{169 = R^2 - 2Rr}$

$-S$

$16 \times 9 = 144$

$\frac{x^2y^2+1}{xy} = \frac{x+y+x^2y+y^2x}{xy}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{r}{R-r}$

$26x - x^2 = S$

$x^2 - 26x + S = 0$

$0 \geq \frac{S^{\log_5 13} - S^{\log_5 12} - S}{S}$ $S > 0$

$f(0) = f(6) + f(6)$

$f(a) = f(1) + f(a)$

$\boxed{f(1) = 0}$

$\frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$\sqrt{169 - S} \geq 0$

$\boxed{S \leq 169}$

$S^{\log_5 13} - S^{\log_5 12} - S^{\log_5 1} \leq 0$

$5 \cdot 4$

$6 \cdot 4$

$7 \cdot 4$

$S^{\log_5 \frac{13}{5} - 1} \leq S^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1210$

225

$\frac{AD}{AD+DE} = \frac{r}{2R}$

$0 \leq S \leq 1$

$f(3) = 0$

$f = \frac{1}{a}$

$12\sqrt{26}$

$f(2a) = f(2) + f(a)$

$f(2a) = f(a)$

$2^{\log_5 13} \leq 2^{\log_5 12} + 2$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$13 \leq 12 + 5$

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$0 = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$\log_5 13 \, S^{\log_5 13 - 1}$

$\boxed{169 \leq 144 + 25 = 169}$

$\log_5 13 (\log_5 13 - 1) S^{\log_5 13 - 2} > 0$

$\frac{r}{x} = 24$

$\frac{r}{x} = \frac{AD}{DE}$

$S \leq 169$ $r = 24x$

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) = \left[\frac{x \cdot y}{4}\right]$

$f\frac{x}{y} = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$\frac{AD}{AD+DE} = \frac{r}{R}$

$f(3x) = f(2x) = \boxed{f(x) < f(y)} = f(2y) = f(3y) = f(5y) - 1 = f(7y) - 1$

$f(x) < -f(\frac{1}{y}) = f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin 2\alpha\cos 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) =$ $2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\beta$

$= 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$ $\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta\cos 2\beta$ 6

$2\sin\alpha\cos\alpha \cos^2\beta - 2\sin^2\beta \cos\alpha + 2\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta -$ $2a - 6 - 3b$

$\sin 2\alpha\cos^2\beta - \sin 2\alpha \sin^2\beta + \sin 2\beta\cos^2\alpha - \sin 2\beta \sin^2\alpha =$ $3b \geq -2$ $4a < -6 - 3b$

$= \sin 2\alpha($ $\quad tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ $\quad tg 2\alpha \pm 4 = -\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{tg^2 2\alpha + 1}$

$x = -\pi$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ $\quad 2\alpha - \pi$ $\sqrt{tg^2 2\alpha}$

$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \arccos\alpha - \arcsin\alpha$

$36+9$

50 $\quad \alpha + (\pi - \alpha) = 2\alpha - \pi$

$(y-6)^2 + 9(x-1)^2 = 90$ $\quad y > 6x$

$(y-6)^2 + (x-3)^2 = 90$ $\quad y^2 + 36x^2 - 12xy = xy - 6x - y + 6$

$y - 2x = \sqrt{\frac{xy}{3} - 2x - y + 6}$ $\quad y^2 + 36x^2 - 13xy + 6x + y - 6 = 0$

$\cancel{9x^2 - 36x^2 - 13xy}$ 133

$36x^2 - 9x^2 - 13xy + 13y + 39 + 24x$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} =$

$27x^2 + 24x - 13xy + 13y + 39 = 0$ $\quad 25x^2$

$22xy$

$\sin x\cos y + \cos x \sin y = \sqrt{17}$ $\quad tg(x-1)$ $= \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

$2\cos^2 y - 1$

$24x - 24$ $\quad \sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + 2\cos x \sin y\cos y + \sin x = -\frac{2}{17}$ $\quad 24 + 27 =$

$3y + 24$

$\begin{cases} 2\cos^2 y \sin x + 2\cos x \sin y \cos y = -\frac{2}{17} \\ \sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$ $= 451$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$2\cos y(\cos y\sin x + \cos x \sin y) = \frac{-2}{17}$ $\quad x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\cos y \cdot z = +\frac{2}{17}$ $\quad \arccos\alpha + \arcsin\alpha = \pi$

$x = 2\arcsin\alpha - \pi$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

289

$\frac{\sin x}{\sqrt{17}} \pm \frac{\cos x \cdot 4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin x \pm 4\cos x = -1$

$\sin(x \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$36x^2 + 4y^2 - 72x - 48y = 45 \cdot 4$

$3y^2 + 13xy - 6x - 9y + 6 - 72x - 48y - 45 \cdot 4 = 0$

$3y^2 - 13xy - 49y - 78x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)