МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2-x^2} = 124 \quad (1) \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2-x^2} = -92 \quad (2) \end{cases}$$

$$64y^2 - x^2 = (8y-x)(8y+x)$$

$$a = 8y + x \Rightarrow 8y - x = a - 2x$$

~~(1)-(2)~~: (2)-(1)

$$8y - x - \sqrt[3]{\cancel{2}64y^2-x^2} + \sqrt[3]{64y^2-x^2} = -92-124 = -216 = -(2\cdot 3)^3 =$$

$$= 8y - x = a - 2x$$

$$a - 2x = -(2\cdot 3)^3$$

(1)+(2):

$$8y + x \cancel{+} - 2\sqrt[3]{64y^2-x^2} = 124 - 92 = 32$$

$$\begin{cases} a - 2\sqrt[3]{a(a-2x)} = 32 \\ a - 2x = -(2\cdot 3)^3 \end{cases}$$

$$a - 2\sqrt[3]{a\cdot(-(2\cdot 3)^3)} = 32$$

$$a - 2\cdot(-2\cdot 3)\sqrt[3]{a} = 32$$

$$a + 12\sqrt[3]{a} = 32$$

$$f(a) = a + 12\sqrt[3]{a} - 32$$

$$f'(a) = 1 + \frac{12}{3}\cdot a^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} > 0 \ \forall a \Rightarrow$$ функция монотонно возрастает.

Значит есть только один корень

$a = 8$:

$8 + 12 \cdot 2 = 8 + 24 = 32 \Rightarrow a = 8$ - корень

$a - 2x = -216 \Rightarrow 2x = 8 + 216 = 224 \Rightarrow x = 112$

$a = 8y + x$

$8 = 8y + 112 \Rightarrow 8y = 8 - 112 = -104 \Rightarrow y = -13$

Ответ: $x = 112,\ y = -13$

№2

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^3 > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \\ x^9 > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \ne 1 \\ \log_{2x^3} x^9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x > 0 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{2} \\ \log_{2x^3} x^9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne \frac{1}{2} \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \log_{2x^3} x^9 \ge 0 \end{cases}$

$\sqrt{9\log_{2x} x} \le -3\log_{2x} x$

$3\sqrt{\log_{2x} x} \le -3\log_2 x$

$\sqrt{\log_{2x} x} \le -\log_2 x$

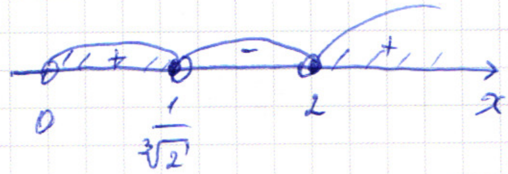
$\log_{2x^3} x^9 \ge 0$

$9\log_{2x^3} x \ge 0$

$\frac{9}{\log_x 2x^3} \ge 0$

$\frac{9}{\log_x 2 + 3} \ge 0 \Rightarrow \log_x 2 + 3 > 0$

$\frac{1}{\log_2 x} + 3 = \frac{3\log_2 x + 1}{\log_2 x} > 0$



ОДЗ: $x \in (0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \cup (2; +\infty)$

$$\sqrt{9\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -3\log_{2x} x$$

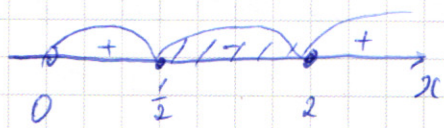
$$\sqrt{\frac{1}{\log_x 2x^3}} \le -\frac{1}{\log_x 2x}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\log_x 2+3}} \le -\frac{1}{\log_x 2+1}$$

$$-\frac{1}{\log_x 2+1} \ge 0 \Rightarrow \log_x 2+1 < 0$$

$$1+\frac{1}{\log_2 x} < 0$$

$$\frac{\log_2 x+1}{\log_2 x} < 0$$



$x \in (\frac{1}{2};2)$

$(\frac{1}{2};2) \notin$ ОДЗ => реш. нет.

равенство достигается при $x=1$

$$\sqrt{\log_2 1} = \log_2 1 = 0$$

Ответ: $x=1$

№3

$A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$

$9 + 999 + 99 < 12414 \Rightarrow$ степени должны быть больше

$\overline{1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} > 12414 \ \forall a_i \Rightarrow$ степени меньше

$9999 + 999 + 99 < 10000 + 1000 + 100 = 11100 < 12414 \Rightarrow$ степени больше $\Rightarrow$

есть два варианта:

1):

$\overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 12414$

2):

$\overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_5 a_6 a_7} = 12414$

1):

$a_2 = 0$, иначе сумма будет больше 12414

$0 \cdot 10^5 + 2a_3 \cdot 10^4 + 3a_4 \cdot 10^3 + 3a_5 \cdot 10^2 + 3a_6 \cdot 10 + 3a_7 = 12414$

$a_i \in [0; 9]$

т.к. заканчивается на 4, то $a_7 = 8$

$3a_6 + 2$ (т.к. $3 \cdot 8 = 24$) должно заканч. на 1 $\Rightarrow a_6 = 3$

$3a_5 + 1$ (т.к. $3 \cdot 3 + 2 = 11$) должно заканч. на 4 $\Rightarrow a_5 = 1$

$3a_4$ заканч. на 2 $\Rightarrow a_4 = 4$

$2a_3 + 1$ (т.к. $3 \cdot 4 = 12$) ~~заканч.~~ и равно 1 $\Rightarrow a_3 = 0$

$a_1 004138 = A \Rightarrow 9$ вариантов числа A

2):

$a_3 \cdot 10^4 + 2a_4 \cdot 10^3 + 3a_5 \cdot 10^2 + 3a_6 \cdot 10^2 + 3a_7 = 12414$

из аналогичных соображений: $a_7 = 8,\ a_6 = 3,\ a_5 = 1$

$\cancel{2a_4} + 2a_4 \cdot 10^3 + a_3 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^3$

$a_4 + \cancel{10a_3}\ 5a_3 = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_4 = 6 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_4 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = a_1 a_2 06138 \\ A = a_1 a_2 11138 \end{array}\right.$

Итого вариантов: $9 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 9 = 189$

Ответ: 189

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

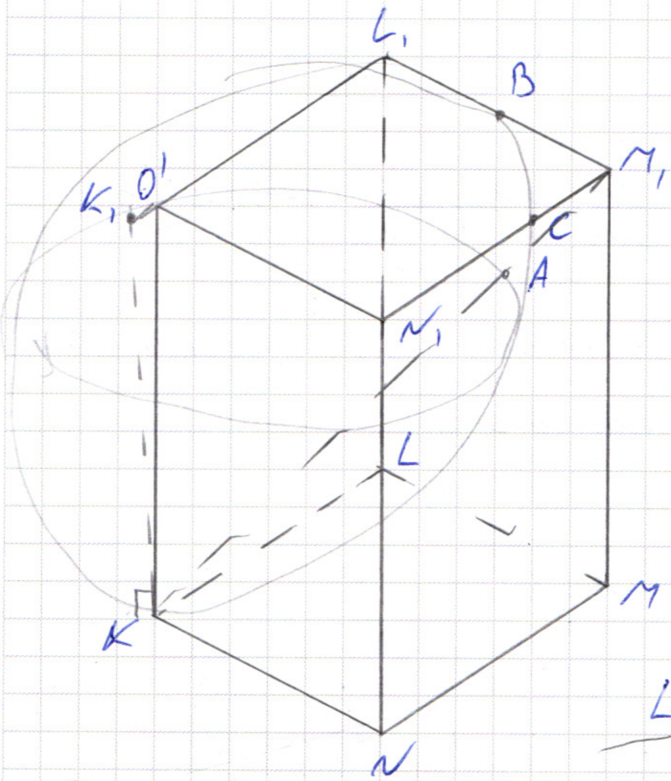
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



Дано:

$KLMNK_1L_1M_1N_1$ – параллелепипед

$KLMN$ и LMM_1L_1 – прямоугольники

сфера касается L_1M_1, M_1N_1, пл-ти LMM_1 и KLM, причем пл-ти KLM в точке K

KM_1 вторично пересекает сферу в A

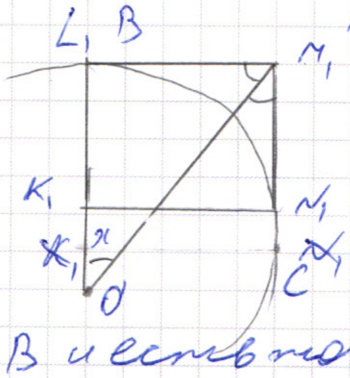
$AK = 5$

$AM_1 = 2$

Найти:

$\angle NN_1M_1$ – ?

V – ?



Решение:

~~Это прямоуг. пар-пед, т.к.~~

B – касание L_1M_1

C – касание M_1N_1

$L_1M_1 \in$ пл-ти $LMM_1 \Rightarrow$ B и есть точка касания сферы со всей пл-ю.

по св-ву секущей и касательной:

$M_1B^2 = M_1A \cdot M_1K = M_1A(AK + M_1A) = 2 \cdot 7 = 14$

$M_1B = M_1C = \sqrt{14}$

радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен всей пл-ти $\Rightarrow$ центр сферы лежит на ~~KK_1~~ прямой, параллельной высоте

Центр сечения сферы пл-ю $K_1L_1M_1N_1$ лежит на биссектрисе $\angle L_1M_1N_1$ и на ~~$KK_1 \Rightarrow M_1K_1$ – биссектриса $\Rightarrow$ в основании квадрат~~ перпендикуляру из K к пл-ти $KLMN$

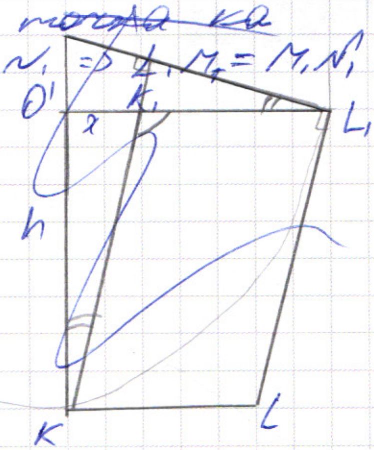
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~~т. к. центр окружности – K_1, то тогда ка~~

~~В совпадает с L_1, С совпадает с N_1 $\Rightarrow L_1M_1 = M_1N_1 = M_1B = \sqrt{14}$~~



~~$KM_1 = 7$~~

~~$KM_1^2 = KN^2 + NM^2 + NN_1^2$~~

~~$49 = 14 + 14 + NN_1^2 \Rightarrow NN_1 = \sqrt{21}$~~

~~$tg\angle NN_1M_1 =$~~

Рассмотрим верхнее основание. Одна из точек касания совпадает с вершиной.

Пусть В совпадает с L_1, тогда $ML_1 = MB = \sqrt{14}$

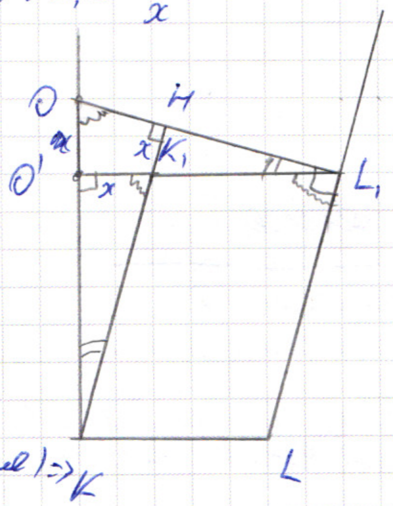
O' – центр окружности сечения сферы пл-ю $K_1L_1M_1N_1$

$O'K_1 = x$, h – высота параллелепипеда

$KM_1^2 = h^2 + KN^2 + (KN + x)^2 = h^2 + \sqrt{14}^2 + (\sqrt{14} + x)^2$

$tg\angle O'KK_1 = \frac{x}{h} \Rightarrow tg\angle NN_1M_1 = -ctg\angle O'KK_1 = -\frac{h}{x}$

O – центр сферы



$OL_1 \perp L_1L$

~~$\Delta O'KK_1 = \Delta O'OL_1$ (по~~

$KK_1 \cap OL_1 = H$

$OK = OL_1 = R$

$\Delta OKH = \Delta OO'L_1$ (по двум углам и стороне) $\Rightarrow$

$\cancel{O'K_1}$ $OH = OO' \Rightarrow \Delta O'OK_1 = \Delta OHK_1 \Rightarrow O'K_1 = HK_1 = x$ и $KO' = L_1H = h$

т. е. равны высоты, опущенные к разным основаниям $\Rightarrow$ равны площади оснований:

$KN \cdot NN_1 = NN_1 \cdot K_1L_1 \cdot \sin\angle NN_1M_1$

$\sqrt{14} \cdot \cancel{NN_1} = L_1K_1 \cdot \sin \angle NN_1M_1 = (\sqrt{14} + x) \sin\angle NN_1M_1$

$\sin\angle NN_1M_1 = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14} + x}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\angle NN_1M_1 = -\frac{h}{x}$

$tg^2\angle NN_1M_1 = \frac{h^2}{x^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}+x}\right)^2}{1-\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}+x}\right)^2} = \frac{\frac{14}{(\sqrt{14}+x)^2}}{1-\frac{14}{(\sqrt{14}+x)^2}} = \frac{14}{14+2x\sqrt{14}+x^2-14} = \frac{14}{2x\sqrt{14}+x^2}$

$h^2 = \frac{14x^2}{2x\sqrt{14}+x^2}$

$49 = h^2+14+14+2\sqrt{14}x+x^2 = \frac{14x^2}{2x\sqrt{14}+x^2} + 28+2\sqrt{14}x+x^2 =$

$= \frac{14x^2+28(2x\sqrt{14}+x^2)+(2x\sqrt{14}+x^2)^2}{2x\sqrt{14}+x^2} = \frac{14x+28(2\sqrt{14}+x)+x(2\sqrt{14}+x)^2}{2\sqrt{14}+x}$

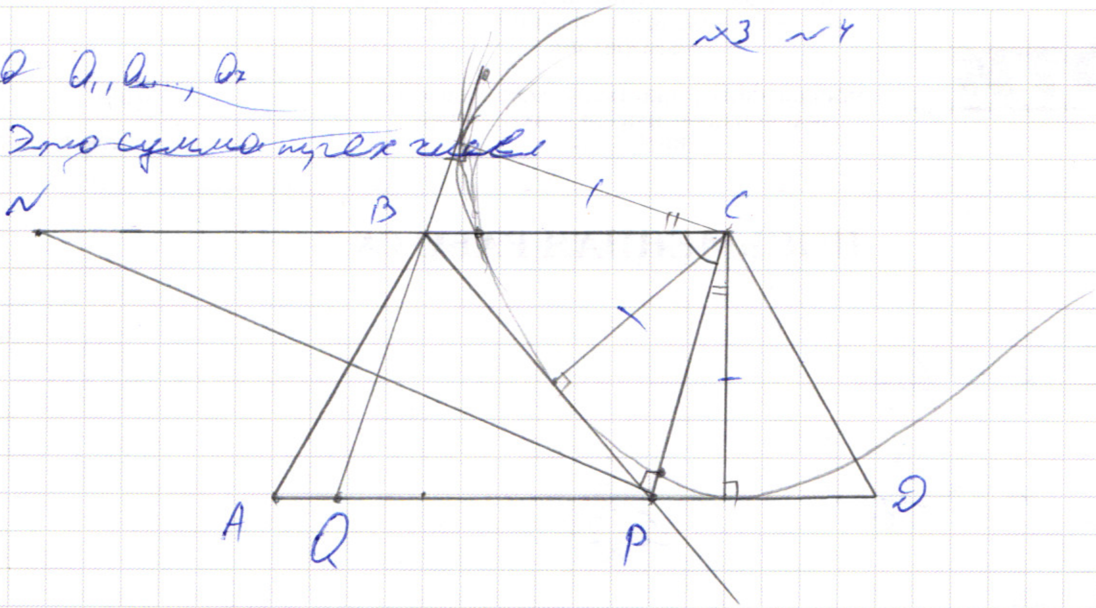
$98\sqrt{14}+49x = 14x+56+28x+56x+4x^2\sqrt{14}+x^3$

$x^3+4x^2\sqrt{14}+49x+56-98\sqrt{14}$

a_1, a a_1, a_m, a_7

Это сумма трёх чисел

№3 №4



$\angle NCP : arcctg\frac{8}{15}$

$AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$ $\qquad tg\angle NCP = \frac{NP}{PC} \Rightarrow \frac{NP}{PC} = \frac{8}{15}$

$\angle ADC - ?$

$\angle NQS - ?$

$S_{NCDQ} - ?$

№5

$\frac{\pi}{3} = 60$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(\frac{\pi}{3} - x) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$ctg\, x + ctg\, y - ?$

$$\begin{cases} \sqrt{3}(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = 5(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x) \\ \sin x\cos 2y + \sqrt{3}(\cos x\cos 2y - \sin x\sin 2y) = 8(\cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x\cos y - \sqrt{3}\sin x\sin y = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \\ \sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + \sqrt{3}(\cos x(\cos^2 y - \sin^2 y) - \sin x(-2\sin y\cos y)) = \end{cases}$$

$= 8(\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sin x)$

$\sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + \sqrt{3}(\cos x\cdot(1 - 2\sin^2 y) - 2\sin x\sin y\cos y) = 4\cos x\sqrt{3} - 4\sin x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\frac{1}{\log_{x^9} 2x^3}} \le -3\log_{2x} x$$

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{9}\cdot\log_x 2x^3}} \le -3\log_{2x} x = -3\cdot\frac{1}{\log_x 2x}$$

$$\sqrt{\frac{9}{\log_x x^3+\log_x 2}} \le -\frac{3}{\log_x x+\log_x 2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3+\frac{1}{\log_2 x}}} \le -\frac{3}{1+\frac{1}{\log_2 x}} \qquad \frac{1}{\log_2 x} = t$$

$$\frac{1}{\sqrt{3+t}} \le \frac{-1}{1+t} \Rightarrow \quad -\frac{1}{1+t} \le 0 \Rightarrow$$

$$1+t \le 0 \Rightarrow \boxed{t<1}$$

$$3+t > 0 \Rightarrow t>-3$$

$-3 \quad 1 \quad t$

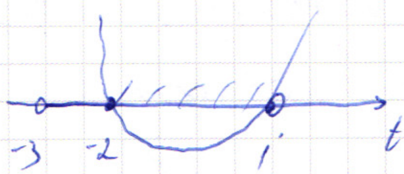
$$\frac{1}{3+t} \le \frac{1}{t^2+2t+1}$$

$$t^2+2t+1 \le 3+t$$

$$t^2+t-2 \le 0$$

$$D = 1^2-4\cdot1\cdot(-2) = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{-1\pm3}{2} = \left[\begin{array}{l}1\\-2\end{array}\right.$$



$$t\in[-2;1)$$

$$\begin{cases}\frac{1}{\log_2 x} \ge -2\\ \frac{1}{\log_2 x} < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x \ge -\frac{1}{2} = \log_2\frac{1}{\sqrt2}\\ \log_2 x > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge \frac{1}{\sqrt2}\\ x>2\end{cases} \Rightarrow x>2$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

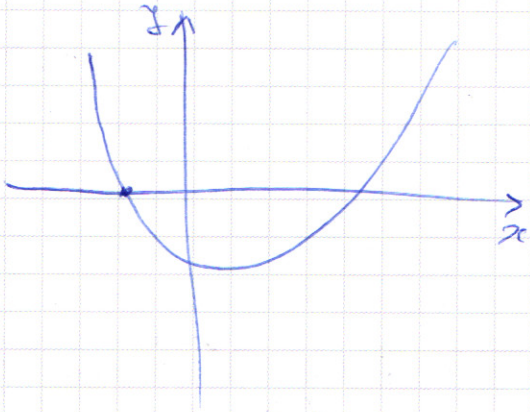
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x-14}{2x-3} \le ax+b \le 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}, \quad x \in [-\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2})$$

$$\frac{12x-14}{2x-3} \le ax+b$$

$2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2} \Rightarrow 2x-3<0$

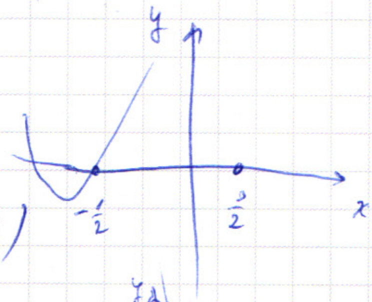


$$\frac{12x-14}{2x-3} - ax - b \le 0$$

$$\frac{12x-14-(ax+b)(2x-3)}{2x-3} \le 0$$

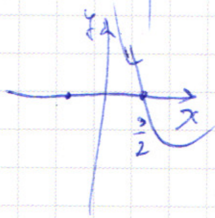
$$\frac{12x-14-(2ax^2-3ax+2bx-3b)}{2x-3} \le 0$$

$$\frac{12x-14-2ax^2+3ax-2bx+3b}{2x-3} \le 0$$



$-2ax^2+x(3a-2b+12)+3b-14 \ge 0 \quad x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

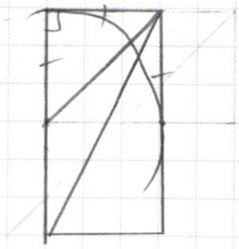
$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2b-3a-12}{-4a} = \frac{12+3a-2b}{4a}$



при $a>0$ необходимо, чтобы кор

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 \le -\frac{1}{2} \\ x_2 \le x_1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 \ge \frac{3}{2} \\ x_2 > x_1 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~a~~ x - разница



$(\sqrt{14})^2+(\sqrt{14}+x)^2+h^2=49$

$tg\,\alpha = \frac{x}{h}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2):

$a_3\cdot10^4+a_4\cdot10^3+a_5\cdot10^2+a_6\cdot10+a_7+a_4\cdot10^3+a_5\cdot10^2+a_6\cdot10+a_7+a_5\cdot10^2+a_6\cdot10+a_7=$

$=a_3\cdot10^4+2a_4\cdot10^3+3a_5\cdot10^2+3a_6\cdot10+3a_7=12414$

$\boxed{a_7=8}$

$a_6=3a_6+2$ заканч на 1 => $\boxed{a_6=3}$

$3a_5+1$ заканч на 4 => $\boxed{a_5=1}$

$2a_4\cdot10^3+a_3\cdot10^4=12\cdot10^3$

$2a_4+10a_3=12$

$a_4+5a_3=6$: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_4=6\\a_3=0\end{cases}\\\begin{cases}a_4=1\\a_3=1\end{cases}\end{array}\right.$

$\begin{array}{r}11138\\+\ 1138\\\hline 12276\\+\ 138\\\hline 12414\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r}11137\\+\ 1137\\\hline 12274\\+\ 137\\\hline 12441\end{array}$

$\begin{array}{r}11138\\+\ 1138\\\hline 12276\\+\ 138\\\hline 12414\end{array}$ $\quad$ & $\begin{array}{r}6138\\+\ 6138\\\hline 12276\\+\ 138\\\hline 12414\end{array}$

$\left[\begin{array}{l}a_1\ a_2\ \&\ 11138\\a_1\ a_2\ \ 06138\end{array}\right.$ $\qquad$ $11138+1138+138=12414$

$06138+6138+138=12414$

$9\cdot10+9\cdot10=2\cdot9\cdot10=180+9=189$

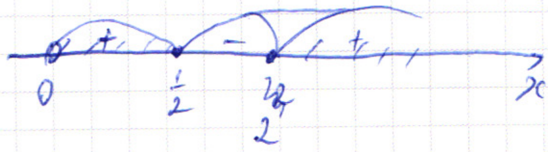
$\log_{2x^3}x^9\geq0\Leftrightarrow9\log_{2x^3}x\geq0$

$\frac{9}{\log_x x+\log_x 2}\geq0$ = $\frac{9}{1+\log_x 2}\geq0$ => $1+\log_x 2\geq0$

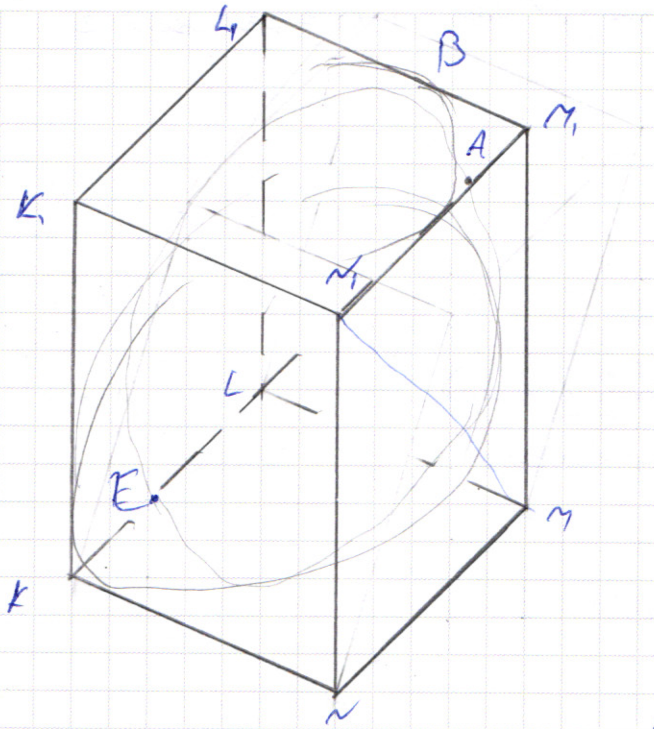
$\cancel{\log_x 2\geq-1}$

$1+\frac{1}{\log_2 x}\geq0$

$\frac{\log_2 x+1}{\log_2 x}\geq0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AK = 5$
$AM_1 = 2$

$\angle NN_1M - ?$
$V - ?$

$KM_1 = 7$

B - касание с L_1M_1

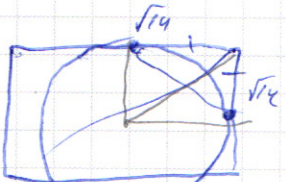
~~E - первое пересеч. с KM~~

$M_1B^2 = M_1A \cdot M_1K =$
$= 2 \cdot 7 \Rightarrow M_1B = \sqrt{14}$

B - кас. с пл-ю LMM_1

$M_1A = M_1B = \sqrt{14}$

$KM_1^2 = KN^2 + NM^2 + NN_1^2$

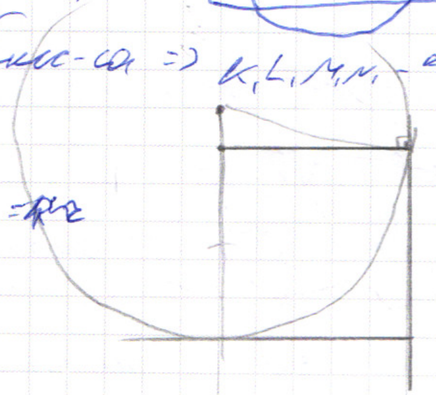


Центр ровно над K $\Rightarrow$ $\cancel{E}O \; O \in KK_1$

M_1O' - бисс-са $\angle L_1M_1N_1 \Rightarrow K_1M_1$ бисс-са $\Rightarrow$ $K_1L_1M_1N_1$ - квадрат

~~$L_1M_1 = 2M_1B = 2\sqrt{14}$~~ $\quad R = \frac{1}{2}KK_1$

$B \equiv L_1,\ A \equiv N_1 \Rightarrow M_1L_1 = M_1B = \sqrt{14} = \cancel{R}$



$KM_1^2 = KN^2 + NM^2 + NN_1^2$

$NN_1 = R$

$49 = 14 + 14 + NN_1^2 \Rightarrow$

$NN_1^2 = 21 \Rightarrow NN_1 = \sqrt{21}$

$\begin{array}{r} 49 \\ -28 \\ \hline 21 \end{array}$

$\angle NN_1M = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{14}{21}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$V = S \cdot h = KN^2 \cdot NN_1 = 14 \cdot \sqrt{21} = 14\sqrt{21}$

$9+99+999<12414$ $A=112\ldots$ или 108

$111111+\ldots>12414$

$11111+1111+111=$ ~~3~~ $12333<12414$ – можно

на первом месте 1, на втором ~~2~~ 1 или, но третьем 2

~~11 11~~ $+$ 1121

~~у нас тысячи перв~~

$108\ldots+8a\ldots+8\ldots=$

степени числа 10 от 5 до 5 12

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ $a_1 a_2 \boxed{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} a_8$

a_7 обязательно войдет трижды

a_6 дважды

a_5 единожды

$9999+999+99<10000+1000+100<12414$

99999 – много

К возможно:

1) $a_2a_3a_4a_5a_6a_7+a_3a_4a_5a_6a_7+a_4a_5a_6a_7$ – если $a_2=0$

или 2) $a_3a_4a_5a_6a_7+a_4a_5a_6a_7+a_5a_6a_7$

1):

$10^5a_2+10^4a_3+10^3a_4+10^2a_5+10a_6+a_7+10^4a_3+10^3a_4+10^2a_5$

$+10a_6+a_7+10^3a_4+10^2a_5+10a_6+a_7=10^5a_2+2a_3\cdot10^4+3a_4\cdot10^3+$

$+3a_5\cdot10^2+3a_6\cdot10+3a_7=12414$

$\boxed{a_2=0}$ $a_6=3a_6+2$ заканч. на 1 $\Rightarrow$ $\boxed{a_6=3}$

$\boxed{a_7=8}$

$3a_5+1$ заканч на 4 $\Rightarrow$ $a_5=1$

$a_x=$

$3a_4$ на 2 $\Rightarrow$ $a_4=7\ 4$ $3a_4$: $a_4=$

$a_3=0$

$\begin{array}{r} 4138 \\ \times\ 3 \\ \hline 12414 \end{array}$

$a_1 007138$

$007138+07138+7138=$, т. е. в этом случае 9 вариантов.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=-92 \end{cases}$$

$a=8y+x$

$8y-x=a-2x$

$8y+x-2\sqrt[3]{a(a-2x)}=32$

$a-2\sqrt[3]{a(a-2x)}=32$

$8y-x-\sqrt[3]{(a-2x)\cdot a}+\sqrt[3]{(a-2x)a}=-216$

$a-2x=-216=-(2\cdot 3)^3$

$$\begin{cases} a-2\sqrt[3]{a(a-2x)}=32 \\ a-2x=-216=-(2\cdot3)^3 \end{cases}$$

$a-2\sqrt[3]{a}\cdot(-2\cdot 3)=32$

$a+12\sqrt[3]{a}=32=2^5 \Rightarrow a: 2$ и $\sqrt[3]{a}$

$a+12\sqrt[3]{a}-32=f(a)$

$f'(a)=1+12\cdot(a^{\frac{1}{3}})'=1+12\cdot\frac{1}{3}\cdot a^{-\frac{2}{3}}=$

$=1+\frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}$ $\forall a>0 \Rightarrow$ возрастает монотонно

$124-92=32$, $32+92=124$, $124+92=216$, $27\cdot 8=216$, $25\cdot5=125$, $49\cdot2=98$

$a=-64$

$-64+12\cdot 4$

$-125+12\cdot5=$

$28\cdot2=56$, $56-49=7$, $7\cdot 4=28$, $14\cdot4=56$

$a=2^{15}$

$216:8$, $216:2=108$, $108:2=54$, $54:2=27$

$98:4$

$tg^2=\frac{\sin^2}{\cos^2}=\frac{\sin^2}{1-\sin^2}$

$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$

$32=16\cdot2=2^5$

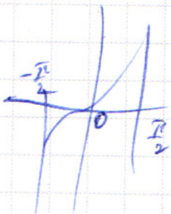
$a=\frac{8}{27}$

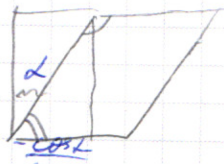
$\sqrt[3]{a}=a=-27$

$-27-12\cdot3$

$ctg\,\alpha$

$ctg(180-\alpha)=\frac{\cos(180-\alpha)}{\sin(180-\alpha)}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a + 12\sqrt[3]{a} = 32$ $\qquad a = 8:$ $\quad 8 + 24 = 32$

$12\sqrt[3]{a} = 32 - a$

$$\begin{array}{r} 216 \\ +\ 8 \\ \hline 224 \end{array}$$

$a = 8 \Rightarrow a - 2x = -216$

$8 - 2x = -\cancel{72}\,216$

$2x = 216 + 8 = 224 \Rightarrow x = 112$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -\ 8 \\ \hline 104 \end{array} \qquad 104 : 8 = 13$$

$a = 8y + x$

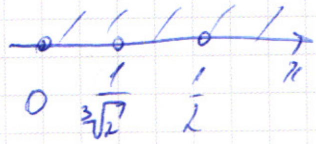
$8 = 8y + 112 \Rightarrow 8y = 104 \Rightarrow y = 13$

$x = 112$

$y = 13$

№2

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$



$$\begin{cases} 2x^3 > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \\ x^9 > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \ne 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x > 0 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{9}{3}\log_{2x} x} \le -3\log_{2x} x$

$\sqrt{3\log_{2x} x} \le -3\log_{2x} x$

$\sqrt{\log_{2x} x} \le -\log_{2x} x \Rightarrow \begin{cases} \log_{2x} x \le 0 \\ \log_{2x} x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \log_{2x} x = 0 \Rightarrow x = 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)