МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$

$2\sqrt{\frac{\log_5 x}{\log_5 5x}} \leq -2\frac{\log_5 x}{\log_5 125x} \quad /:2$

$\sqrt{\frac{\log_5 x}{\log_5 x+1}} \leq -\frac{\log_5 x}{3+\log_5 x}$

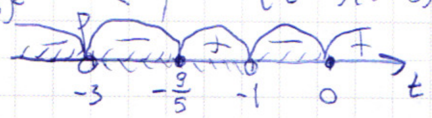
$\log_5 x = t$

$\sqrt{\frac{t}{t+1}} \leq -\frac{t}{3+t}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \frac{t}{t+1} \geq 0, \\ \frac{t}{t+1} \leq \frac{t^2}{(3+t)^2}, \\ -\frac{t}{3+t} \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty), \\ \cancel{\frac{t^2+3t+t+t^2(t+1)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0} \quad \frac{t(t+3)^2 - t^2(t+1)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0, \\ t \in (-3; 0]; \end{cases}$

$\begin{cases} t \in (-3; -1) \cup \{0\}, \\ \frac{t(t^2+6t+9-t^2-t)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t \in (-3; -1) \cup \{0\}, \\ \frac{t(5t+9)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0 \end{cases}$

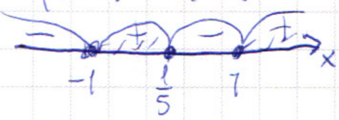


~~$t \in (-3; -1$~~

$t \in \left(-3; -\frac{9}{5}\right) \cup \{0\}$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ 5x \neq 1, \\ 125x \neq 1 \\ \log_{5x} x^4 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{1}{125}, \\ (x^4-1)(5x-1) \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{1}{125}, \\ (x-1)(x+1)(x^2+1)(5x-1) \geq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{1}{125}, \\ x \in \left[-1; \frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty) \end{cases}$

$x \in \left(0; \frac{1}{125}\right) \cup \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{5}\right) \cup [1; +\infty).$

1. $\log_5 x = 0; \quad x = 1.$

2. $\begin{cases} \log_5 x > -3, \\ \log_5 x < -\frac{9}{5}; \end{cases}$ $\quad x > \frac{1}{125}, \quad x < 5^{-\frac{9}{5}} = \frac{1}{5^{2-\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{25}$

$x \in \left(\frac{1}{125}; \frac{\sqrt[5]{5}}{25}\right)$

$x \in \left(\frac{1}{125}; \frac{\sqrt[5]{5}}{25}\right) \cup \{1\}$

$\left.\begin{matrix} \frac{1}{5} > \frac{\sqrt[5]{5}}{25} \\ 5^{-1} > 5^{-\frac{9}{5}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{125}; \frac{\sqrt[5]{5}}{25}\right) \cup \{1\} \subset \left(0; \frac{1}{125}; \frac{1}{5}\right) \cup [1; +\infty).$

Ответ: $\left(\frac{1}{125}; \frac{\sqrt[5]{5}}{25}\right) \cup \{1\}.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5) $\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) \cancel{x} - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right), \\ \frac{1}{2}\cos(x-2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-2y) = 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right); \end{cases}$

$\frac{1}{2}\cos(x-2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-2y) = \sin\frac{\pi}{6}\cos(x-2y) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(x-2y) = \sin\left(\frac{\pi}{6}-x+2y\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2(x-y)\right) =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos 2(x-y) - \sin 2(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) - 2\sin^2(x-y)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) -$

$- 2\sin(x-y)\cos(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) - 2\sin(x-y)\left(\sin(x-y)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) + \cos(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right) =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) - 2\sin(x-y)\cos\left(x-y-\frac{\pi}{6}-x\right) = \sin\frac{\pi}{6}+x - 2\sin(x-y)\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right) = 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right);$

$9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin(x-y)\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right);$

$-\sin(x-y) = -2\sin(x-y)\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right);$

$\sin(x-y)\left(1-2\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 0;$

1. $\sin(x-y) = 0;$

$\cancel{x-y} = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0;$

$x - y = \pi m, m \in \mathbb{Z};$

$x = y + \pi m, m \in \mathbb{Z};$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z};$

$x = \frac{5\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbb{Z};$

$y = \frac{5\pi}{6} + \pi t, t \in \mathbb{Z};$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$

$\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$

1. $y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $\operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -9\,\cancel{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right);$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = -9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right);$

$5\sqrt{3}\sin x = -4\cos x;$ $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{5\sqrt{3}};$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}.$

3. $y + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $\cos y = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} y$ не определён.

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{5\sqrt{3}}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} 7x+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=20, \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44; \end{cases}$ $\quad 7x-y=64;$ $\quad \sqrt[3]{49x^2-y^2}=4\sqrt[3]{7x+y};$ $\quad \begin{cases} 7x+4\sqrt[3]{7x+y}=20, \\ y+4\sqrt[3]{7x+y}=-44; \end{cases}$

$7x+y+8\sqrt[3]{7x+y}=-24$

$\sqrt[3]{7x+y}=t;\quad t^3+8t+24=0;\quad (t^3+8)+8(t+8)=0;$

$(t+8)(t^2-8t+64)+8(t+8)=0;\quad (t+8)(t^2-8t+72)=0;$

$t+8=0;\quad t=-8=7x+y$

$\begin{cases} 7x+y=-8, \\ 7x-y=64; \end{cases}$ $\begin{cases} 14x=\cancel{5y}\,56, \\ 7x+y=-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ 28+y=-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ y=-36. \end{cases}$

Ответ: $(4;-36)$.

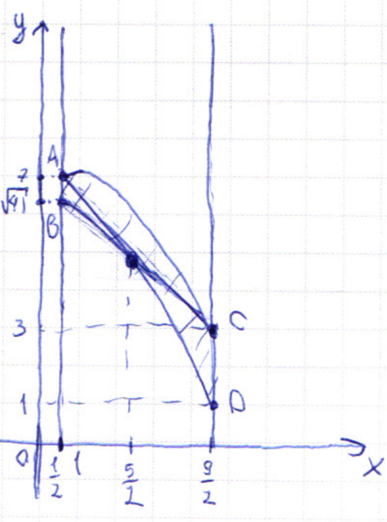
6) $\sqrt{\frac{175}{4}-5x-x^2}\le ax+b\le -\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{27}{4}$

$f(x)=\sqrt{\frac{175}{4}-5x-x^2}=\sqrt{50-(x+\frac{5}{2})^2}$ – ~~окру~~ полуокружность

$g(x)=-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{27}{4}=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{85}{12}$ – парабола

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{41};\ f(\frac{9}{2})=1$

$g(\frac{1}{2})=7;\ g\cancel{f}(\frac{9}{2})=3;\ g(1)=\frac{85}{12}$



Прямая $ax+b$ проходит ~~проход~~ через ~~х~~ AB и CD,

а также касается ~~проходи~~ или проходит над $f(x)$.

Пусть $ax+b$ проходит через A и C,

тогда: $\begin{cases} \frac{a}{2}+b=7, \\ \frac{9a}{2}+b=3; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-1, \\ b=\frac{15}{2}. \end{cases}$

Касательная к $f(x)$ с наклоном -1 ~~имеет вид~~: ~~$-x$~~ касается $f(x)$ в точке, удовлетворяющей уравнению $f'(x)=-1$

$f'(x) = -\frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{50-(x+\frac{5}{2})^2}} = -1$; $x+\frac{5}{2} = \sqrt{50-(x+\frac{5}{2})^2}$; $t = x+\frac{5}{2}$;

$t = \sqrt{50-t^2} \iff \begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 = 50-t^2; \end{cases}$ $\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 = 25. \end{cases}$ $t = 5$; $x = \frac{5}{2}$.

Касательная ~~к~~ к $f(x)$ с наклоном -1 имеет вид:

$-(x-\frac{5}{2}) + f(\frac{5}{2}) = -x+\frac{5}{2}+\sqrt{50-25} = -x+\frac{15}{2}$, то есть эта

касательная проходит через точки A и C.

Тогда любая ~~если какая-либо еще~~ прямая, проходящая через AB и CD будет пересекать $f(x)$, а значит они не будут удовлетворять условие.

Значит, $(a, b) = (-1; \frac{15}{2})$.

Ответ: $(-1; \frac{15}{2})$.

~~3) Если минимальная степень 10 больше 3, то сумма может быть равна 12531 тогда только когда разряд статысячных равен нулю и минимальная степень равна 4~~

~~Если минимальная степень ≤ 3, то количество чисел, удовлетворяющих условию, будет равно $9 \cdot 10 = 90$, тогда сумма будет составляться из числа:~~

~~$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}$,~~

~~тогда~~

~~Если количество чи~~

~~Если минимальная степень 10 $p \leq 3$, то при~~

~~$t=1$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) t - ~~степень~~ минимальная степень 10; ~~$\overline{a_7 \ldots a_1}$ - число~~

~~t=1:~~ $t=1$: $a_1 + \overline{a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1} \leq 9+99+999 = 1197 < 12531$

$t=2$: $\overline{a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} \leq 99+999+9999 = 11097 < 12531$

$t=3$: ~~$3 \cdot a_3 a_4 a_1$~~ $3\overline{a_3 a_2 a_1} + 2000 a_4 + 10000 a_5 = 12531$;

$a_5 = 0$: ~~$a_4 = 1$: $3\overline{a_3 a_2 a_1} = 531$; $\overline{a_3 a_2 a_1} = 177$~~

~~$a_4 = 0$:~~ $a_4 < 5$: $3\overline{a_3 a_2 a_1} + 2000 a_4 < 8000 + 3\overline{a_3 a_2 a_1}$

$4531 < 3\overline{a_3 a_2 a_1} \leq 3 \cdot 999 = 2997$ ①

$a_4 = 5$: $10000 + 3\overline{a_3 a_2 a_1} = 12531$;

$3\overline{a_3 a_2 a_1} = 2531 \not\vdots 3$ ①

$a_4 = 6$: $12000 + 3\overline{a_3 a_2 a_1} = 12531$;

$\overline{a_3 a_2 a_1} = 177$

$a_5 = 1$: $2000 a_4 + 3\overline{a_3 a_2 a_1} = 2531$

$a_4 = 0$: $3\overline{a_3 a_2 a_1} = 2531 \not\vdots 3$ ①

$a_4 = 1$: $3\overline{a_3 a_2 a_1} = 531$; $\overline{a_3 a_2 a_1} = 177$

$t=4$: $a_6 > 0$: ~~a_6~~ $1000000 a_6 + \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} \geq 1000000 > 12531$

$a_6 = 0$: ситуация идентична $t=3$.

$t > 4$: a_7 не равно $0 \Rightarrow$ искомая сумма $\geq 10^7 > 12531$.

~~При~~ Так как в случае с $t=4$ удовлетворяющие нас ~~чи~~ числа будут входить в множество удовлетворяющих нас при $t=3$ всего нужных нам чисел будет:

$9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$

Ответ: 180.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

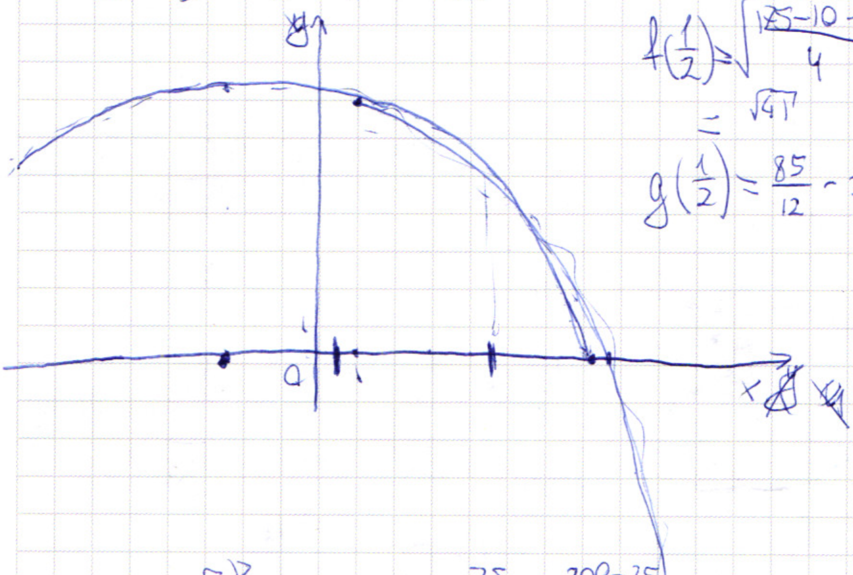
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = \sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} = \sqrt{50 - (x+\frac{5}{2})^2}$

$g(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4} = -\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{3} + \frac{27}{4} = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{85}{12}$

$\cancel{-\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{85}{12}}$



$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{175-10-1}{4}} = \frac{\sqrt{164}}{2} = \sqrt{41}$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{85}{12} - \frac{1}{12} = 7.$

$5\sqrt{2} > \frac{9}{2}$ $5 \cdot 1{,}4 = \frac{14}{2} = 7$

$200 > 81$

$\frac{\sqrt{151}}{2} < \frac{85}{12}$

$151 < \frac{85^2}{36}$

$36 \cdot 151 < 85^2$

$5436 < 7225$

$151 \times 36 = 906 + 453 = 5436$

$85 \times 85 = 425 + 680 = 7225$

$\frac{85}{4} = (x-1)^2$

$x - 1 = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$x = \frac{\sqrt{85}}{2} + 1$

$50 - (x+\frac{5}{2})^2 = 50 - x^2 - 5x - \frac{25}{4} = \frac{200-25}{4} - x^2 - 5x$

$\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{27}{4} = 0$

$4x^2 - 8x - 81 = 0$

$81 \times 4 = 324$

$340 : 4 = 85$

$81 - 49 = 32$

$\frac{D}{4} = 16 + 324 = 340 = (2\sqrt{85})^2$

$x = \frac{8 \pm 4\sqrt{85}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{85}}{2}.$

$49 \cdot 16 - 36^2 = 49 \cdot 16 - 16 \cdot 81 = 16(49 - 81) = -16 \cdot 32 = -2^9$

$12 \times 7 = ...$

$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$x = 1;$

$\cancel{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} - 2$ $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{27}{4} = \frac{1}{3} + \frac{27}{4} = \frac{4+81}{12} = \frac{85}{12} = 7 + \frac{1}{12}.$

$\sqrt{50 - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{200-49}{4}} = \frac{\sqrt{151}}{2} < \frac{85}{12}.$

$6\sqrt{151} < 85$

$5436 < 7225$

$14 \times 4 = 56$

~~7×8~~

$28 - 8 = 20$

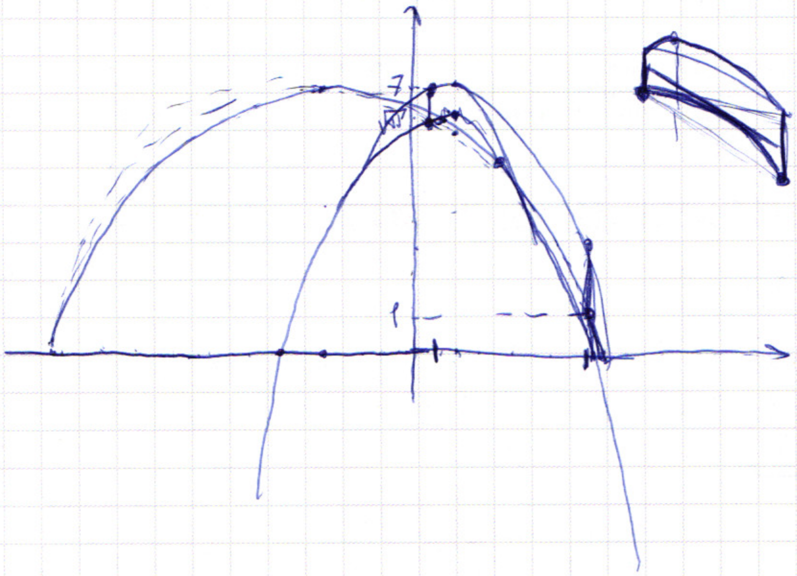
$-36 - 8 = -44.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{9}{2} < 5\sqrt{2}$

$81 < 200$

$1+\frac{\sqrt{85}}{2} < 5\sqrt{2}$

$1+2\sqrt{85}+85 < 200$

$\sqrt{85} < 57$

$1+\frac{\sqrt{85}}{2} > \frac{9}{2}$

$\sqrt{85} > 7$

$\sqrt{50-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2} = -\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{27}{4}$

$4\cdot 79 < 23^2$ $\quad 79 \cdot 4 = 316$ $\quad 23 \cdot 23 = 529$

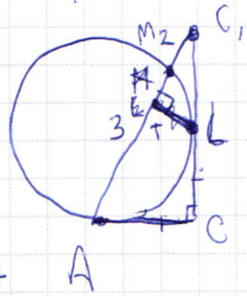
$\sqrt{50-\frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{79}}{2} < -3+2+\frac{27}{4} = \frac{23}{4}$

$119 \cdot 4 = 476$

27

$\sqrt{\frac{200}{4}-\frac{81}{4}}$ $\quad \frac{27}{4}$

$\frac{\sqrt{119}}{2}$



$\frac{\sqrt{151}}{2} < \frac{85}{12}$

$36\cdot 151 < 85^2$

$24 \cdot 5 = 90$ 7

$\frac{5\sqrt{3}}{2} < \frac{27}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{2}{CC_1}$

$300 < 529$

$10 = C_1L^2 \overset{?}{=} 15$ $\quad C_1L = \sqrt{10}$

$C_1L = \sqrt{10}$ $\quad \frac{CC_1}{5} =$

$C_1L = \sqrt{15}$

$-164 \,|\, 4$, 41, -4, 0

$CA = \sqrt{\frac{\cancel{100}}{\cancel{5}} - C_1C}$

$CA^2 = 25 - C_1C^2$

$\frac{5}{C_1L} = \frac{C_1C}{2}$

$C_1L^2 = \cancel{15}\ 10$

$C_1L = \sqrt{10}$

$\frac{C_1C}{2\cancel{3}} = \frac{\cancel{C_1}\ 5}{5}$

$\cancel{CC_1 = \frac{3}{5}CL}$

$12\sqrt{50-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2} = -4x^2+8x+81$

$3\sqrt{200-(2x+5)^2} = -(4x^2+20x+25)^{\cancel{2}}+28x+106$

$3\sqrt{200-(2x+5)^2} = -(2x+5)^2+14(2x+5)+36$

$2x+5 = t$

$C_1C \cdot C_1L = 10$ $\quad C_1C \cdot C_1L = 10 = C_1C\cdot\sqrt{10}$

$C_1C = \frac{10}{\sqrt{15}} = \frac{10\sqrt{15}}{15} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

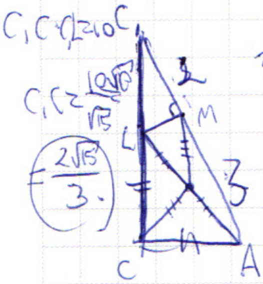
$\cancel{3\sqrt{200-t^2} = -t^2+14t+36}$

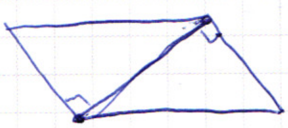
$200-t^2+14t+36-200 = (200-t^2)+14t-164$

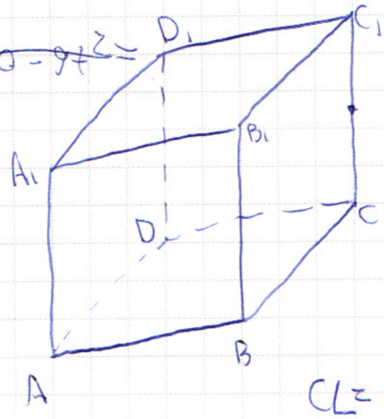
$C_1C = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$

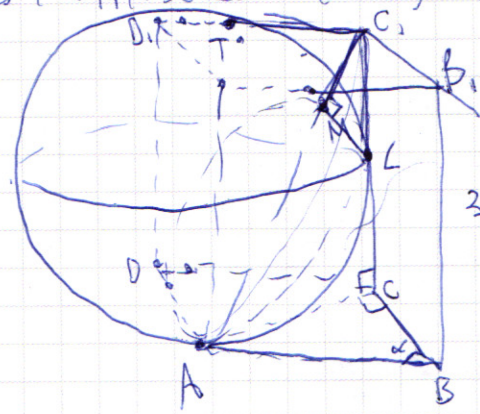
$= \frac{2\sqrt{15}}{3}.$

$\cancel{9 \cdot 200 - 9t^2 =}$









$AM = 3$

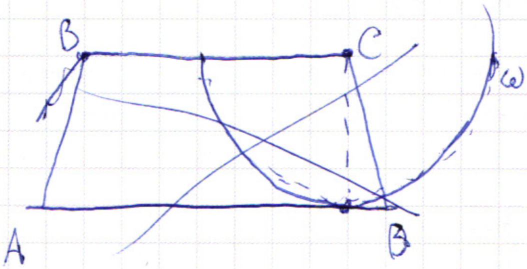
$C_1M = 2$

$\frac{2\sqrt{15}}{3}$

$CL =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



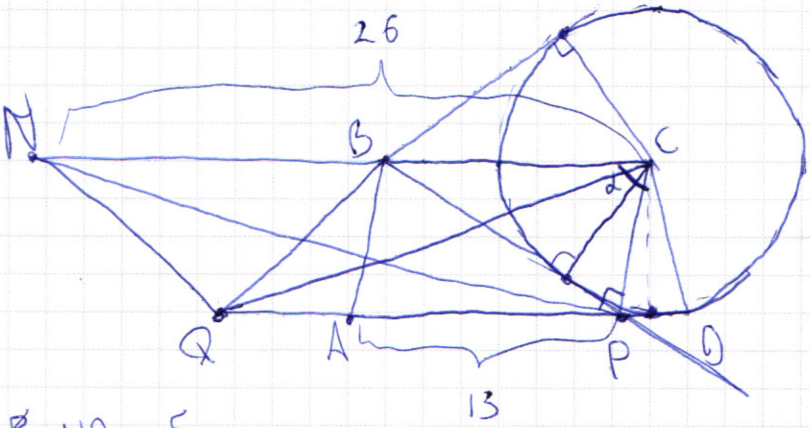
$f\left(\frac{9}{2}\right)=\sqrt{\frac{175-90-81}{4}}=1$

$\begin{array}{r}-85\\ 49\\ \hline 36\end{array}$

$g\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{85}{12}-\frac{49}{12}=3$

$-\frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{81}{12}=\frac{84}{12}=7.$

$\frac{81}{12}+\frac{36}{12}+\frac{81}{12}=3.$



$\alpha=\angle NCP=\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$AP=13;\ NC=26$

$\angle ADC-?;\ \angle NQC-?$

$S_{NCDQ}-?$

$\frac{NP}{PC}=\frac{5}{12};$

$\frac{13}{2}>\sqrt{41}$

$169>82$

$f'(x)\left(\frac{1}{2}-x\right)+f(x)=7$

$+\frac{8}{2}f'(x)=4$

$f'(x)=1$

$\sqrt{\frac{175}{4}-5x-x^2}\leq ax+b\leq-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{27}{4}$

$D=25+175=200$

$x=\frac{5\pm 20}{2}=\frac{25}{2}$

$\cancel{f(x)}$

$\begin{cases}ax+b\geq\sqrt{\frac{175}{4}-5x-x^2},\\ ax+b\leq-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{27}{4}.\end{cases}$

$\frac{27}{2\sqrt{41}}+\frac{85}{2\sqrt{41}}=\frac{56}{\sqrt{41}}$

$\cancel{x+\frac{5}{2}}=t$

$-\frac{15}{2}-t=\sqrt{50-t^2}$

$x^2+5x+\frac{25}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

$t\leq 0$

$t^2=50-t^2$, $t^2=5$

$\left\{ax+b\geq\cancel{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+75}}=f(x)\right.$

$\frac{175}{4}-5x-x^2=-\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)+25$

$y=\sqrt{25-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}$

$y^2+\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=5^2$

$x+\frac{5}{2}=5$

$\begin{array}{r}\times 53\\ 53\\ \hline 59\end{array}$

$x=-\frac{15}{2}.$

$-\frac{1}{12}\left(4x^2+8x+81\right)$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{\sqrt{41}}$

$-\frac{1}{12}\left(\left(4x^2+8x+4\right)+67\right)$

$a=\frac{3}{\sqrt{41}}$

$\frac{175}{4}-\frac{90}{4}-\frac{81}{4}=1$

$\left(\frac{3}{\sqrt{41}}x+b\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\sqrt{41}$

$-\frac{1}{3}(x+1)^2-\frac{67}{12}=0$

$53>3\sqrt{41}$

$\begin{array}{r}\times 41\\ 9\\ \hline 369\end{array}$

$-\frac{3}{2\sqrt{41}}+b=\sqrt{41}$

$(x+1)^2=\frac{77}{4}$

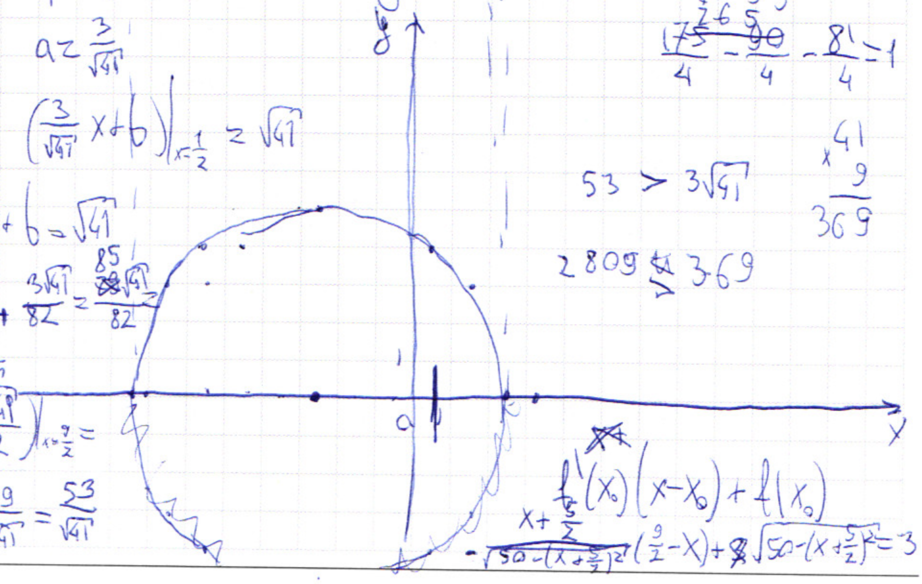
$2809>369$

$b=\sqrt{41}+\frac{3\sqrt{41}}{82}=\frac{85\sqrt{41}}{82}$

$=\frac{85}{2\sqrt{41}}$

$x+1=\pm\frac{\sqrt{77}}{2}$

$x=\pm\frac{\sqrt{77}}{2}-1$



$\left(\frac{3}{\sqrt{41}}x+\frac{79\sqrt{41}}{82}\right)\Big|_{x=\frac{9}{2}}=$

$=\frac{27}{2\sqrt{41}}+\frac{79}{2\sqrt{41}}=\frac{53}{\sqrt{41}}$

$f'(x)=-\frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{50-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}}$

$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$-\frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{50-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}}\left(\frac{9}{2}-x\right)+\sqrt{50-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin(x-y), \\ 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x+2y\right); \end{cases}$$

$-\frac{10}{9}\sin(x-y)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x+2y\right)=\sin\left(\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2(x-y)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos(2(x-y))$

$-\sin 2(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)(1-2\sin^2(x-y))-2\sin(x-y)\cos(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

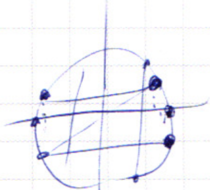
$10\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\sin^2(x-y)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\sin(x-y)\cos(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

$9\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=-2\sin(x-y)\cos\left(x-y-\frac{\pi}{6}-x\right)=-2\sin(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$

$-\sin(x-y)=-2\sin(x-y)\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)=0$

$\sin(x-y)\left(1-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\right)=0;$

1. $\sin(x-y)=0$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)=\frac{1}{2}$



1. $x-y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ x=y+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$
2. $y+\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

   $y=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$
3. $y=-\frac{2\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi m=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

1. $-9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

   $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

   $x+\frac{\pi}{6}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

   $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

   $y=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

2. $-9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

   $-9\sin x\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{9}{2}\cos x=\sin x\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\cos x\frac{1}{2}$

   $-5\sqrt3\sin x-4\cos x=0;$

   ~~$\frac{\sqrt3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=0;$~~

   ~~$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$~~

$5\sqrt3\sin x=4\cos x$

$tg x=\frac{4}{5\sqrt3}$

$tg y=\frac{1}{\sqrt3}$

$\boxed{tg x+tg y=\frac{9}{5\sqrt3}}$

t^3+8

$t^3+8t^2-8t^2-64t+44+8$

Ответ: $\frac{9}{5\sqrt3};\ -\frac{2}{\sqrt3}.$

$3t^3+8^3$

3. При $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$\cos y=0\Rightarrow tg y$ не определён

$$\begin{cases} f'(x)\left(\frac{9}{2}-x\right)+f(x)=3, \\ f'(x)\left(\frac{1}{2}-x\right)+f(x)=7 \end{cases}$$

$f'(x)(4)=-4$

$f'(x)=-1$

$x+\frac{5}{2}=\sqrt{50-\left(\frac{5}{2}+x\right)^2}$

$t^2=50-t^2;\ t=5.$

$x=\frac{5}{2}.$

$$\begin{cases} \frac{a}{2}+b=7, \\ \frac{9a}{2}+b=3 \end{cases}$$

$4a=-4$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{15}{2}. \end{cases}$$

$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$

ОДЗ: $\cancel{x>0}$, $\begin{cases} x>0, \\ x \neq 1, \end{cases}$

$x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

$2\sqrt{\log_{5x} x} \leq -2\log_{125x} x$

$\cancel{2\sqrt{\frac{\ln x}{\ln 5x}} \leq -2\frac{\ln x}{\ln 125x}}$

$\sqrt{\frac{\log_5 x}{\log_5 x+1}} \leq -\frac{\log_5 x}{3+\log_5 x}$

$\log_5 x = t$

$\sqrt{\frac{t}{t+1}} \leq -\frac{t}{3+t}$

$-\frac{t}{3+t} \geq 0, \quad \frac{t}{t+3} \leq 0 \qquad t \in (-3;0]$

$\frac{t}{t+1} \leq \frac{t^2}{(3+t)^2}; \quad \frac{t(t+3)^2 - t^2(t+1)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0; \quad \frac{t(t^2+6t+9-t^2-t)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0;$

$\frac{t(5t+9)}{(t+1)(t+3)^2} \leq 0 \qquad t \in (-\infty;-3) \cup (-3;-\frac{9}{5}] \cup (-1;0]$

1. $\log_5 x < -3$; $x < \frac{1}{125}$. $x \in (-\infty; \frac{1}{125})$

2. $-3 < \log_5 x \leq -\frac{9}{5}$; $\frac{1}{125} < x \leq \left(5^{2-\frac{1}{5}}\right)^{-1} = \frac{\sqrt[5]{5}}{25}$; $x \in \left(\frac{1}{125}; \frac{\sqrt[5]{5}}{25}\right]$.

3. $0 \geq \log_5 x > -1$; $1 \geq x > \frac{1}{5}$; $x \in (\frac{1}{5}; 1]$.

С уч. ОДЗ: $x \in (0; \frac{1}{125}) \cup (\frac{1}{125}; \frac{\sqrt[5]{5}}{25}] \cup (\frac{1}{5}; 1)$.

$n = \overline{a_1 \ldots a_7} \quad a_1 \neq 0; \quad n \equiv_{10^{k_1}} b_1 \quad n \equiv_{10^{k_2}} \cancel{b_2} \quad n \equiv_{10^{k_3}} b_3$

$b_1 + b_2 + b_3 = 12531$

$k_3 = k_2 + 1 = k_1 + 2$.

$\sin(x-y) = -9\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -9\cos\left(x - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = -9\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right) =$
$= -9\sin(x + \frac{\pi}{6})$

$\frac{1}{2}\cos(x-2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-2y) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cancel{\cos} \quad \cancel{\sin\frac{\pi}{6}\cos(x-2y)} - \sin\frac{\pi}{6}\cos(x-2y) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(x-2y) = \sin(\frac{\pi}{6} - x + 2y) =$
$= 10\sin(x+\frac{\pi}{6})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 7x+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=20, \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x-y=64=4^3 \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x-y=64; \\ y+4\sqrt[3]{7x+y}=-44; \end{cases}$

$y+4\sqrt[3]{64+2y}=-44$

$4\sqrt[3]{64+2y}=-44-y;\quad 64(64+2y)=-(44+y)^3$

$2^{12}+128y=-(44^3+3\cdot 44y^2+3\cdot 44^2\cdot y+y^3)$

$y^3-1808y-132y^2+89280=0$

$2^{12}+44^3=2^6(2^6+11^3)$

$y^3-132y^2-5680y+89280=0$

$1936\cdot 4 = 7744$; $44\cdot 44=1936$; $7744\cdot 11 = 85184$; $85184+4096=89280$; $1936\cdot 3=5808$; $5808-128=5680$; $12\cdot 11 = 132$

~~$7x+$~~ $\begin{cases} 7x+4\sqrt[3]{7x+y}=20, \\ y+4\sqrt[3]{7x+y}=-44; \end{cases}$

$7x+y+4\sqrt[3]{7x+y}=-24$

$\sqrt[3]{7x+y}=t$; $\quad t^3=7x+y$

$t^3+4t+24=0$ $\quad 64=7x-y$

$t^3+64=14x$

$t^3+8+4t+\cancel{16}=0$ $\quad 8+8$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$

$(t+2)(t^2-2t+4)+4(t+\cancel{4})\cancel{+0}+8=0$

$(t+l)^3+m=t^3+3l^2t+3t^2l+l^3+m=0$

~~$(t+2)(t^2-2t+8)+8=0$~~ $\quad 1+\sqrt[3]{6}$

$3l^2=4;$

~~$(t+2)(t(t-2)+8)+8=0$~~ $\quad 1+3\sqrt[3]{6^2}+3\sqrt[3]{6}+4+4\sqrt[3]{6}+24=0$

$6+29+7\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{6^2}=0$

$\sqrt[3]{6}$

~~$t^3+8+t^2+t^2+4t+4+12=0$~~

~~$t^2+4t+24=0$~~

~~$(t+2)(t^2-2t+8)+(t+2)^2-t^2+12=0$~~

~~$-4a-a^3=24$~~

~~$\frac{D}{4}=4$~~ ~~t^2-4t+~~

~~$(t+2)(t^2-t+10)-(t^2+t+10)+22-t=0$~~

~~$(t^2+t+10)(t+1)+22-t=0$~~

~~$t^3-t^2(a+1)-at^2+4t+24=0$~~

$(t^3-a^2t)+(4+a^2)(t-a)=0$

$24=2^3\cdot 3$ $\quad a=\cancel{\frac{24}{4+a}}$

$t^3-a^2t+4t+a^2t-a^3=0$

$-a^3=24$

$a=-\sqrt[3]{24}=-2\sqrt[3]{3}$

~~$(t^3-4\sqrt[3]{9}t)+4\sqrt[3]{9}t+4t+24=0$~~

$t(t-2\sqrt[3]{3})(t+2\sqrt[3]{3})+$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$999 + 99 = 1098$, $1098 + 99 = 1197$

$10^k \quad 10^l \quad 10^t$

$k = l+1 = t+2$

$t \le 3$

$k \le 5$

$53131 : 3 = 177$

$999 \cdot 3 = 2997$

$12531 - 2997 = 9534$

$9999 + 999 = 10998$, $10998 + 99 = 11097$

$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

$t=3$: $\overline{a_3 a_4 a_5} + \overline{a_4 a_5} + a_5 \le 2000$

$t=2$: $\overline{a_4 a_5} + \overline{a_3 a_4 a_5} + \overline{a_2 a_3 a_4 a_5} \le$

$\le 99 + 999 + 9999 = 11097 < 12531$

$t=3$

$3\overline{a_3 a_4 a_5} + 2000 \cdot a_2 + 10000 \cdot a_1$

~~$3\overline{a_3 a_4 a_5} + 2000 a_2 \le 3999 + 18000$~~

$a_1 = 0$: $3\overline{a_3 a_4 a_5} + 2000 \cdot a_2 \le 2997 + 2000 a_2$

$2997 + 2000 a_2 \ge 12531$

$2000 a_2 \ge 9534$

~~$a_2 \ge 5$~~ $a_2 = 5$:

$3\overline{a_3 a_4 a_5} = 2531 \not\vdots\, 3$

$a_2 = 6$:

$3\overline{a_3 a_4 a_5} = 531$

$\overline{a_3 a_4 a_5} = 177$

$\overline{310177}$

$\overline{06177}$

~~$2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$~~

$a_1 = 1$: $3\overline{a_3 a_4 a_5} + 2000 a_2 = 2531$

$a_2 = 1$: $\overline{a_3 a_4 a_5} = 177$

$a_2 = 0$: $3\overline{a_3 a_4 a_5} = 2531 \not\vdots\, 3$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)