МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$; $y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$; $9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

1) $a=x-1$ $\quad b=y-6$ $\quad \begin{cases} b-6a=\sqrt{ba} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$y-6x=b-6a$; $x=a+1$; $y=6+b$

$\begin{cases} b\geq 6a \\ ab=b^2+36a^2-12ab \quad (1) \\ 9a^2+b^2=90 \quad (2) \end{cases}$

(1) $-13ab+b^2+36a^2=0$

$b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ не выполняется (2)

$b\neq 0$ $\quad 36\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$

$\frac{a}{b}=\frac{13\pm 5}{72}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{1}{4} \Rightarrow b=4a \quad (\text{сл } A) \\ \frac{a}{b}=\frac{1}{9} \Rightarrow b=9a \quad (\text{сл } Б) \end{array}\right.$

A: $\begin{cases} b\geq 6a \\ b=4a \ ; \ b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 25a^2=90 \ ; \ a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ $\longrightarrow \begin{cases} a=\frac{-3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x=\frac{5-3\sqrt{10}}{5} \\ b=\frac{-12\sqrt{10}}{5} \Rightarrow y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

Б: $\begin{cases} b \geq 6a \\ b = 9a \ ; \ b = \pm 9 \\ 90a^2 = 90 \ ; \ a = \pm 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1 \to x = 2 \\ b = 9 \to y = 15 \end{cases}$

Ответ: $(2;15)$; $\left(\frac{5-3\sqrt{10}}{5} ; \frac{30-13\sqrt{10}}{5}\right)$

№6 $\forall x \in \left(\frac{2}{3};2\right] : \underbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}_{f(x)} \geq ax+b \geq \underbrace{18x^2-51x+28}_{g(x)}$

$(a;b)$ - ?

1) $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$ на $\left(\frac{2}{3};2\right]$ - непрерывна

2) $g(x)$ - парабола с ветвями вверх

$x_в = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} \in (1;2)$

3) Посчитаем некоторые значения f и g

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\frac{2}{3}+} f(x) = +\infty$

$g(2) = -2$ $\qquad f(2) = -1$; $f(1) = 2$ $\quad f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

4) $ax+b$ - линейная ф-ция.

5) Построим эскизы графиков $f(x)$ и $g(x)$

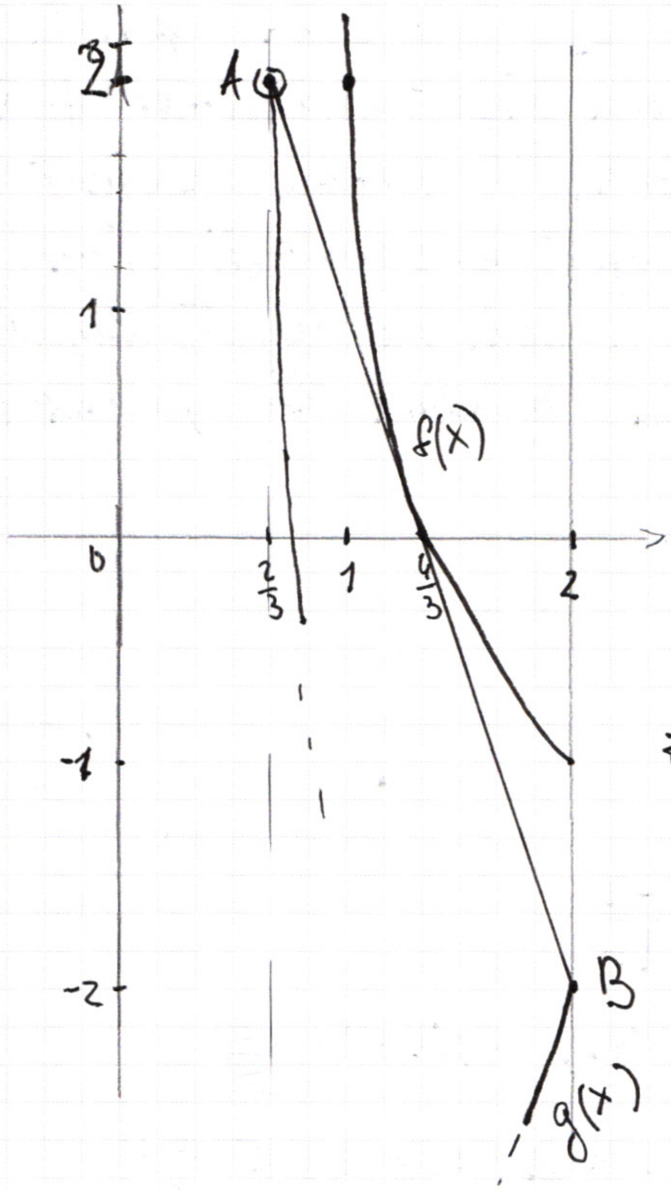
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



6) Заметим, что $a<0$,

~~т.к. $g\left(\frac{2}{3}\right) \leq \lim f(x)$~~

т.к на всём промежутке $g(x) \leq f(x)$ (иначе не выполнялось бы для всех x)

7) Р-м прямую l

$A \in l$; $B \in l$

$l: \frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2} = \frac{y-2}{2+2}$

$4x - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}y + \frac{8}{3}$

$y = -3x+4$

8) Д-м, что $y=-3x+4$ — касательная к $f(x)$,

т.е. $-3x+4 = \frac{4}{3x-2} - 2$ — имеет одно решения

$\frac{4+9x^2-6x-18x+12}{3x-2} = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{(3x-4)^2}{3x-2} \geq 0 \to x = \frac{4}{3}$ — ед. реш чтд.

а) Нам подходят любые прямые $t = ax + b$, $a < 0$, которы не пересекают l на $(\frac{2}{3}; 2]$, но если прямая t отлична от l, что она будет пересекать $f(x)$ дважды → при некоторых x условие не будет выполняться, г) она будет пересекать её один раз → при некоторых x усл. не будет выполняться. → искомая прямая → прямая l

$\to a = -3; b = 4$

Ответ: $(-3; 4)$

№1
$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} & (2) \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17} & (1) \end{cases}$$

(1) $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$\sin 2\alpha (1 + \cos 4\beta) + 2 \sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$2 \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$\cos^2 2\beta \, (\underbrace{\sin(2\alpha + 2\beta)}_{\frac{-1}{\sqrt{17}}}) = \frac{-1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \to \sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha = k \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2k}{1+k^2}$; $\cos 2\alpha = \frac{1-k^2}{1+k^2}$

a) $\frac{2k}{1+k^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1-k^2}{1+k^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2k+4-4k^2+1+k^2}{\underbrace{1+k^2}_{\geq 1}} = 0$

$3k^2-2k-5=0$

$\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=\frac{5}{3} \end{array}\right.$

б) $\frac{2k}{1+k^2} - 4\frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2k-4+4k^2+1+k^2}{\underbrace{1+k^2}_{\geq 1}} = 0$

$5k^2+2k-3=0$

$\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=\frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\}$

№4 1) Пусть O_1 и O_2; R и r центры окр Ω и ω соответственно

2) ~~$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по 2-м углам)~~

$\cos\angle B = \frac{25}{2R}$ ($\triangle BCA$)

$\cos\angle B = \frac{13}{2R-r}$ ($\triangle BDO_2$)

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r$

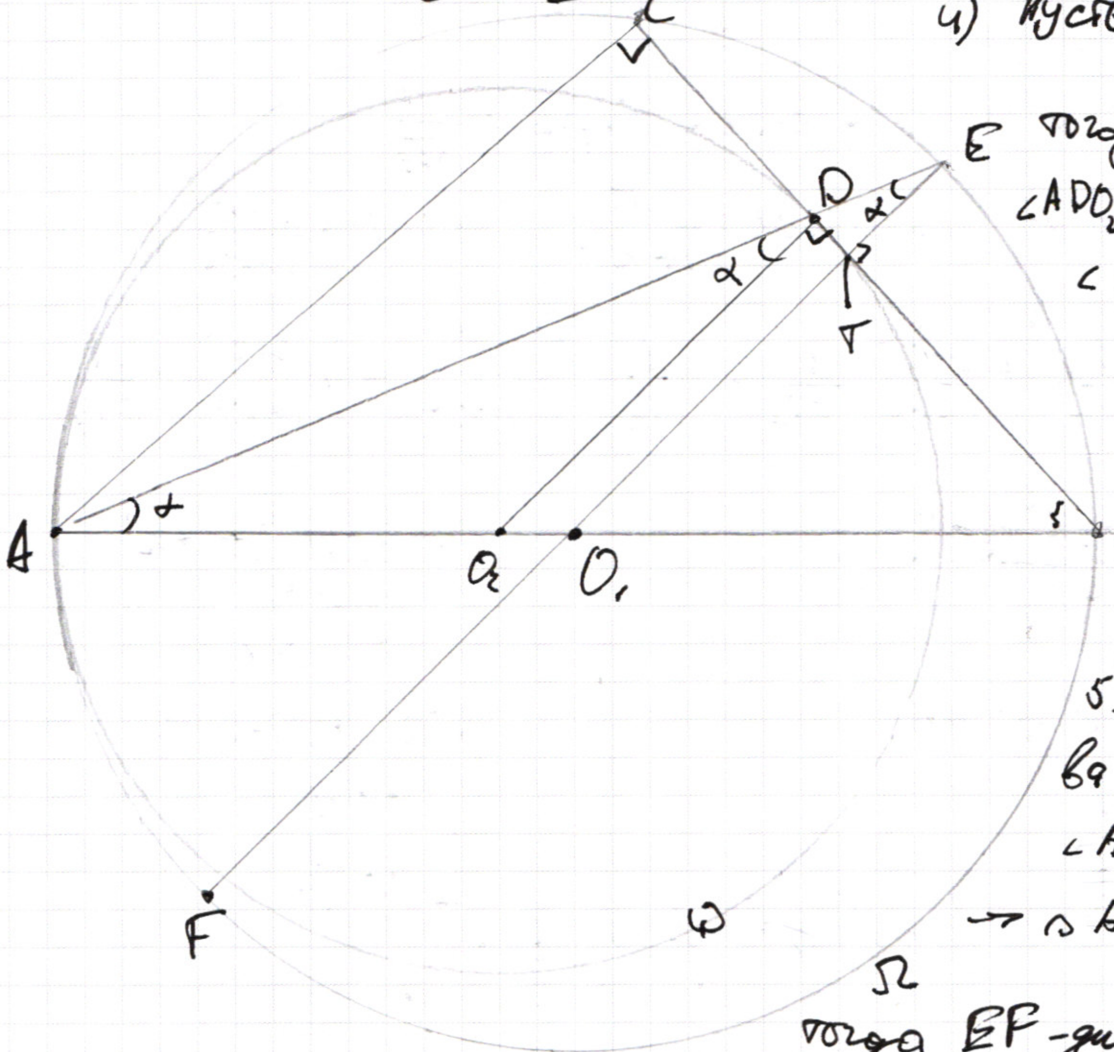
$r = \frac{24}{25}R$

3) Теорема о секущей и касательной для ω

$13^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$13^2 = 4(R^2 - Rr)$ $\quad 13^2 = 4\left(R^2 - \frac{24}{25}R^2\right)$ $\quad R = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}$

$\to r = \frac{24}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{156}{5}$



4) Пусть $\angle AEF = \alpha$, тогда $\angle ADO_2 = \alpha$ и $\angle DAO_2 = \alpha$ (РБ Δ)

5) Из равенства $\angle EAO_2$ и $\angle AEF \to$

$\to \Delta AO_1E$ - РБ, тогда EF - диаметр,

$\angle AFE = 90 - \alpha$

6) $\Delta CAD \sim \Delta TED \to \angle CAD = \alpha \to \angle B = 90 - 2\alpha$

7) $\cos\angle B = \frac{25}{65} = \frac{5}{13} = \sin 2\alpha \to \cos 2\alpha = \frac{12}{13}$

см. пункт 1

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{12}{13}$; $\cos^2\alpha = \frac{25}{26} \to$

$\to \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$; $\angle AFE = 90 - \alpha = \underline{\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}}$

8) $S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE$

~~$6\frac{25}{65}$ $\frac{125}{130}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AF = 2R\sin\alpha = 65\cdot\sqrt{1-\frac{25}{26}} = \frac{65}{\sqrt{26}}$

$AE = 2R\cdot\cos\alpha = 65\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{65\cdot 5}{\sqrt{26}}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{65^2\cdot 5}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}} = \frac{21125}{52} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

~~$S_{AFE} = \frac{21125}{52}$~~ $S_{AFE} = \frac{1625}{4}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

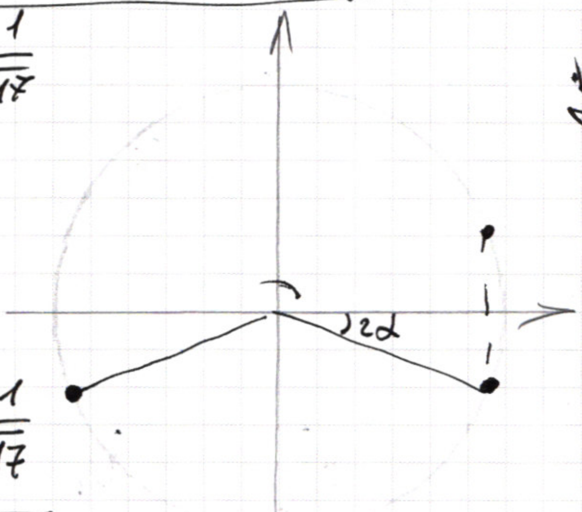
$$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha+\sin(2\alpha+4\beta)=\frac{-2}{17};\quad \sin 2\alpha+\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta=\frac{-2}{17}$$

$$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+\cancel{2\sin}\ 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta=\frac{-2}{17}$$

$$\cos 2\beta\,\underbrace{(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)}_{\frac{-1}{\sqrt{17}}}=\frac{-1}{17}$$

$$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$$



$$\overset{a}{\overbrace{\sin 2\alpha}}\frac{1}{\sqrt{17}}+\sqrt{1-a^2}\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$\cancel{\sin 2\alpha}+$

$$\left[\begin{array}{l} a+4\sqrt{1-a^2}=-1 \\ a-4\sqrt{1-a^2}=-1 \end{array}\right.\quad \frac{2k}{1-k^2}+4\frac{1+k^2}{1-k^2}=-1 \ (1)$$

$$\frac{2k}{1-k^2}-4\frac{1+k^2}{1-k^2}=-1$$

(1) $$\frac{2k+4+4k^2}{1-k^2}=-1;\qquad \frac{2k-4-4k^2}{1-k^2}+1=0$$

$$\frac{2k+5+3k^2}{1-k^2}=0\qquad \frac{2k-3-5k^2}{1-k^2}\qquad 5k^2-2k+3$$

$$\frac{3k^2+2k+5}{1-k^2}$$

$65 \cdot 65$: 325, 390, 4225

$169 \cdot 125$: 845, 338, 169, 21125

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left\{ \underbrace{(26x - x^2)}_{p}{}^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)} \right.$$

$p \in (0, 169]$

$p \geq \underbrace{p^{\log_5 13} - p^{\log_5 12}}$

$\cancel{26}\ 13 \cdot 2 \cdot 13 - 13^2$

$p\ \log_5 13 \cdot p^{\frac{13}{5}}$ $= p^{\log_5 12}\left(p^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1\right)$

$$\begin{array}{r} 13 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

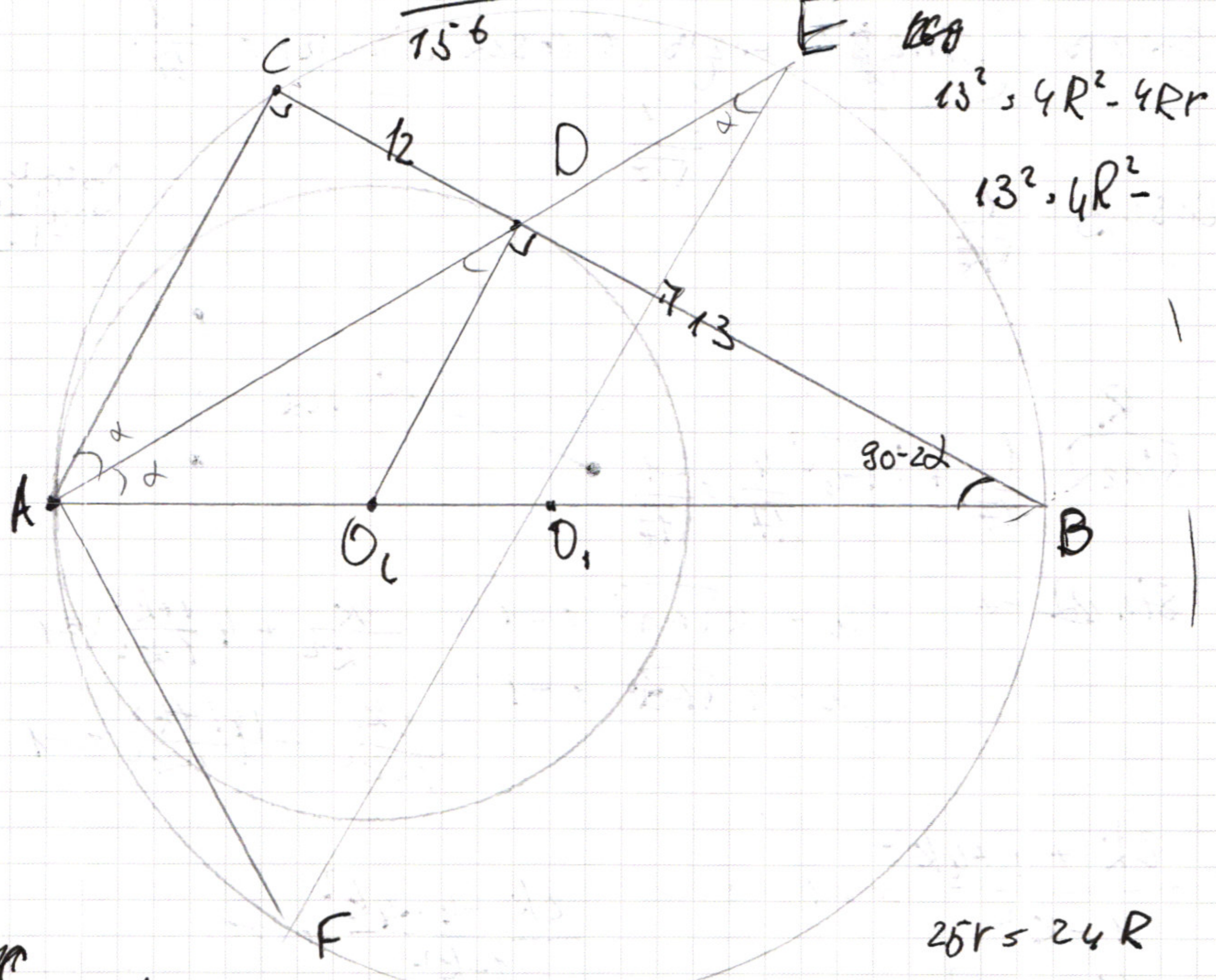
$\frac{13}{15 \cdot 6}$

$169 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\cancel{169}$

$13^2 = 4R^2 - 4Rr$

$13^2 = 4R^2 -$



$25r = 24R$

$r = \frac{24R}{25}$

$\frac{13}{2R - r} = \frac{25}{2R}$ $26R = 50R - 25r$

$r = \frac{13 \cdot 5}{2} \cdot \frac{24}{25}\frac{12}{5}$ $13^2 = 4\left(R^2 - \frac{24}{25}R^2\right) = 13^2 = \frac{4}{25}R^2$ $R = \frac{13 \cdot 5}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

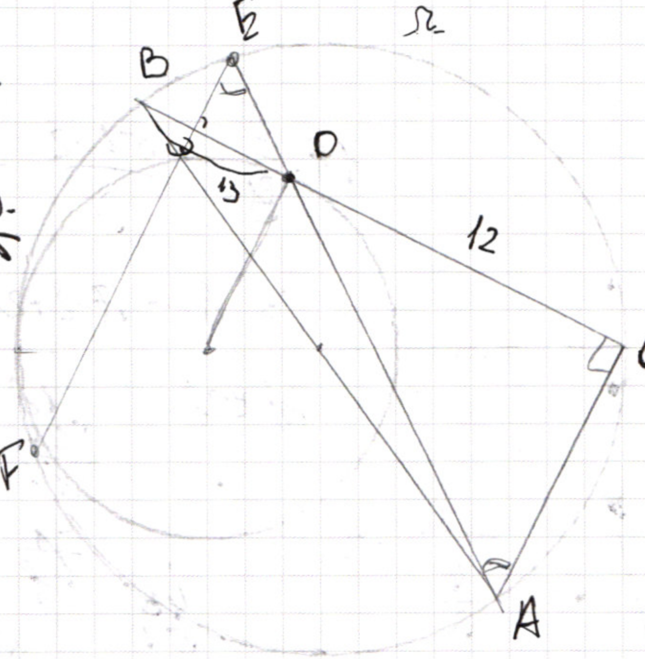
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

B $\frac{x}{2R-x} = \frac{13}{12}$

$tg\,2\alpha = \frac{2k}{1-k^2}$



$\frac{2k}{a^2} + \frac{1-k^2}{a^2} = 1$

$4k^2 + 1 + k^4 - 2k^2 - a = 0$

$a = k^2 - 2k - 1$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $a>0$ $b>0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1) + f(p) = [p/4]$ $f(1) = 0 \to x \neq y$

$f(ab) = \to$

x - простое

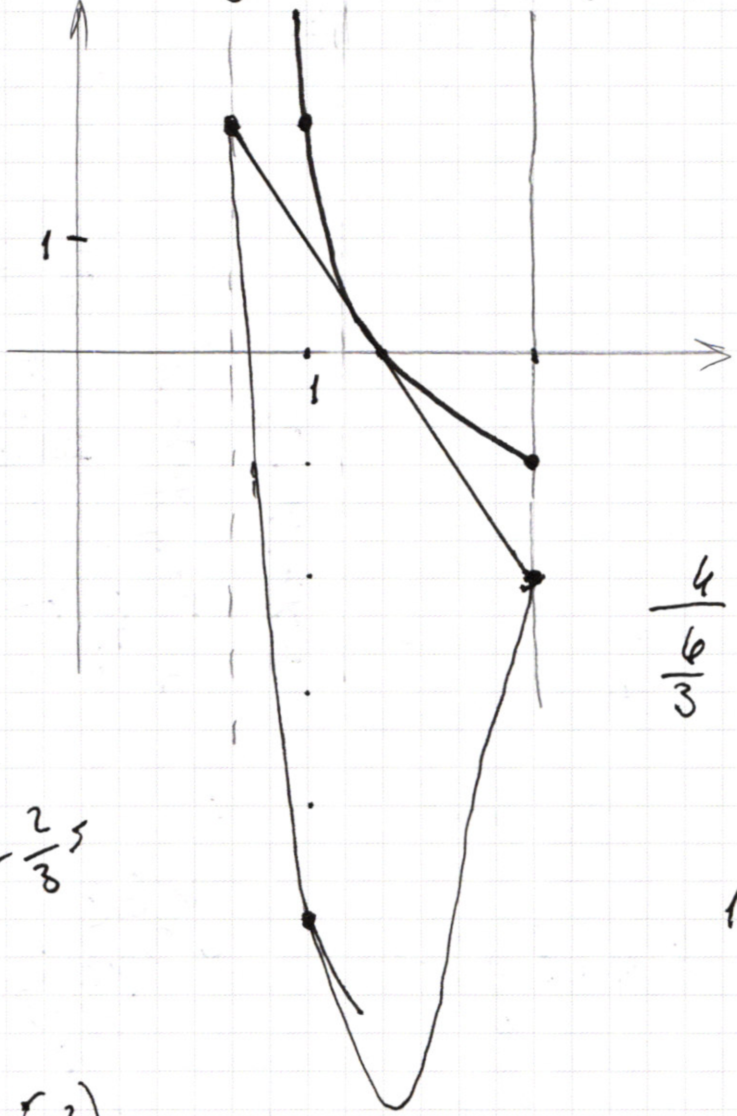
$\frac{x}{y}$ - простое, то они нам не подходят

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$\frac{8+6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\left(2-\frac{4}{3x-2}\right) = \frac{4}{3x-2}-2$$



$1 < x_b < 2$

$$18\cdot\frac{4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 =$$

$$= 8 - 17\cdot 2 + 28$$

$\cancel{18}+28$

$$\frac{4}{\frac{6}{3}} = -3$$

$+18$
$+28$
46
28
18

46
-51

51
46

$$\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28$

$2\cdot(36-51+14) =$

$= 2\cdot($

$2 - \frac{2}{3} =$

$(2; -2)$

$-2 = 6 + b \quad b = -8$

$-3x+4$

$$\frac{4}{3x-2} - 2 = -3x+4$$

$$\frac{4+3x-6}{3x-2} = 0 \qquad \frac{4+9x^2-6x-18x+12}{3x-2} = 0$$

$$\frac{9x^2-24x+16}{3x-2} = 0 \to \frac{(3x-4)^2}{3x-2}$$

$$\boxed{x = \frac{4}{3}}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $9a^2+16a^2=90$

$a^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$

$a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$b-6a\geq 0 \to \frac{12}{5}\sqrt{10}-\frac{18}{5}\sqrt{10}<0$

$-\frac{12}{5}\sqrt{10}+\frac{18}{5}\sqrt{10}>0$

$a=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$; $b=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$x=\frac{5-3\sqrt{10}}{5}$ $y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

$9a^2+81a^2=90$

$a=\pm1 \to b=\pm9$

$b-6a\geq 0 \to 9-6\geq 0$

$-9+6\not\geq 0$

$a=+1$ $b=+9$

$x=2$; $y=15$

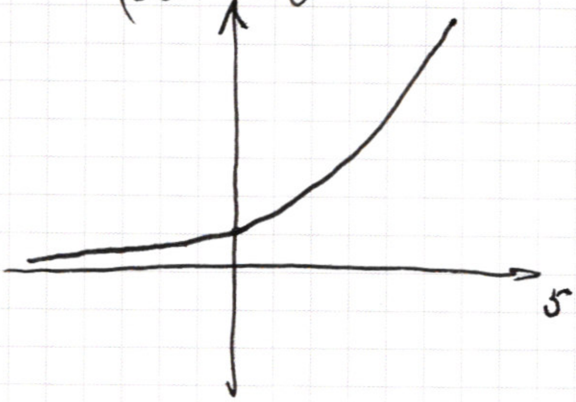
$\cancel{|x^2-26x|^{\lg}}$ $(26x-x^2)^{\log_5 12}+26$

t

$(26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)^{\log}$

$\cancel{26x}6$

$t \geq 13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}+x^2 \quad 26x-x^2>0$

$\cancel{x^2 < 26x}$

$f(x)=26x-x^2 \qquad g(x)=x^{\log_5 13}-x^{\log_5 12}$

$f(x) \geq g(f(x)) \qquad f(x)\in(0;13]$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}} \qquad tg\alpha=k$

$tg2\alpha=\frac{2k}{1+k^2}$

$\sin 2\alpha=\frac{2k}{1+k^2} \quad \cos 2\alpha=\frac{1-k^2}{1+k^2} \qquad \sin 2\alpha=\frac{2k}{a} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-k^2}{a}$

$\frac{4k^2+1+k^4-2k^2}{a^2}=\frac{1+k^4+2k^2}{a^2}=$

$=\frac{(1+k^2)^2}{a^2}$

$\begin{cases}\frac{2k}{1+k^2}\cdot\cos\beta+\frac{1-k^2}{1+k^2}\cdot\sin\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}}\\ \frac{2k}{1+k^2}\cdot\cos 2\beta+\frac{1-k^2}{1+k^2}\sin 2\beta+\frac{2k}{1+k^2}=\frac{-2}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\begin{cases}y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases} ; \ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$(x-1)=a \ ; (y-6)=b$

$y=b+6$

$x=a+1$

$\begin{cases}9a^2+b^2=90\\ \sqrt{ab}=b-6a\end{cases} ; \ b^2+36a^2-13ab=0$

$b=0 \Rightarrow a=0 \ (x)$

$\frac{2\cdot 9}{8\cdot 4\cdot 2}$

$169 \qquad 36\cdot 4 = 144$

$36t^2-13t+1=0$

$\frac{b}{a} \qquad 36\frac{a}{b}$

$D=25 \qquad t=\frac{13\pm5}{72}$

$\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{1}{4} \rightarrow b=4a\\ \frac{a}{b}=\frac{1}{9} \Rightarrow b=9a\end{array}\right.$

$a \qquad b-6a\geq 0$

$6a\leq b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$2\alpha = a \quad 2\beta = b$

$$\cos 2(\alpha+\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{cases} \sin a \cos b + \cos a \sin b = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin a \cos 2b + \cos a \sin 2b + \sin a = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 \end{cases};\quad y-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$9(x-1)^2+(y-6)^2 = 45+36+9 = 90$$

$(3x)^2 - 3\cdot 3\cdot 2$

$$\begin{cases} (y-6x) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$3\cancel{x} = a+3$

$3(x-1) = a$

$(y-6) = b$

$y = b+6$

$y-6x = b+6-2a-6 =$

$= \underline{b-2a}$

$$\begin{cases} b-2a = \sqrt{\frac{1}{3}ab} \\ a^2+b^2 = 90 \end{cases};\quad b \geq 2a;\quad b^2+4a^2-4ab = \frac{1}{3}ab$$

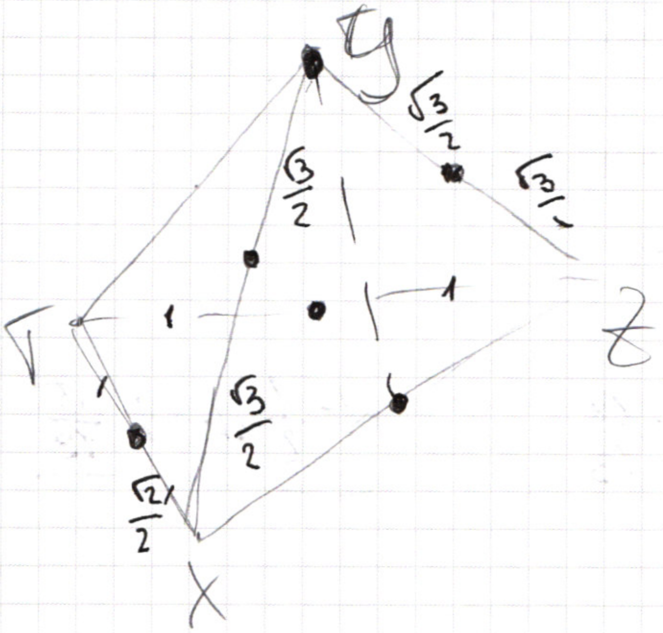
$3b^2+12a^2-13ab = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)


y
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt{3}/$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1
1
1
1
z
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
x

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(90-2\alpha)=\frac{25\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 13\cdot \cancel{5}}=\frac{5}{13}$$

$$\sin 2\alpha=\frac{5}{13}\to \cos 2\alpha=\frac{12}{13}$$

$$\underline{\alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}}$$

$$1-2\cos^2\alpha=\frac{12}{13}$$

$$13-26\cos^2\alpha=12$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{26}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)