МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$
выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№1}$

$$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \cos(2a+2b) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2a+4b)+\sin(2a) = -\frac{2}{17}$$

$$2\underbrace{\sin(2a+2b)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2b = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2b = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \sin 2b = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2a+4b)+\sin(2a) =$$

$$= \underbrace{\sin(2a+2b)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\underbrace{\cos 2b}_{\frac{1}{\sqrt{17}}} + \underbrace{\cos(2a+2b)}_{\pm\frac{4}{\sqrt{17}}}\underbrace{\sin 2b}_{\pm\frac{4}{\sqrt{17}}} +$$

$$+\sin(2a) = -\frac{1}{17} \pm \frac{16}{17} + \sin 2a = -\frac{2}{17}$$

$$\sin 2a = -\frac{2}{17} + \frac{1}{17} \pm \frac{16}{17}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2a = -1 \\ \sin 2a = \frac{15}{17} \end{array}\right.$$

① $\sin 2a = -1$

$2a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$

$a = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

$\operatorname{tg} a = -1$

② $\sin 2a = \frac{15}{17}$

$$\begin{cases} 2\sin a\cos a = \frac{15}{17} \\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin a\cos a = \frac{15}{34} \\ \left[\begin{array}{l} \sin a + \cos a = \frac{8}{\sqrt{34}} \\ \sin a + \cos a = -\frac{8}{\sqrt{34}} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin a = \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \cos a = \frac{5}{\sqrt{34}} \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{3}{5} \\ \begin{cases} \sin a = \frac{5}{\sqrt{34}} \\ \cos a = \frac{3}{\sqrt{34}} \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{5}{3} \\ \begin{cases} \sin a = -\frac{3}{\sqrt{34}} \\ \cos a = -\frac{5}{\sqrt{34}} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{3}{5} \\ \begin{cases} \sin a = -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ \cos a = -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}.$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Пусть $x-1=a \Leftrightarrow x=a+1$

$y-6=b \Leftrightarrow y=b+6$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+6)-6a-6=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+36a^2-12ab=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$36a^2-13ab+b^2=0 \quad :a^2$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2-13\left(\frac{b}{a}\right)+36=0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{b}{a}=4 \\ \frac{b}{a}=9 \end{array}\right.$ $(a\neq 0)$

$\left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=9a \end{array}\right.$

(при $a=0$

$\begin{cases} b^2=90 \\ b=0 \end{cases}$ $\times$)

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=9a \end{array}\right. \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

1) $b=4a$

$$\begin{cases} -2a=\sqrt{4a} \\ 9a^2+16a^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a=2|a| \\ a^2=\frac{90}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a<0 \\ a=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \end{cases}$$

$\Rightarrow b=-\frac{12}{5}\sqrt{10}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ y=6-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}$$

2) $b=9a$

$$\begin{cases} 3a=\sqrt{9a^2} \\ 9a^2+81a^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a=3|a| \\ a^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0 \\ a=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow b=9$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$$

Ответ: $(2;15)$, $\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10};\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

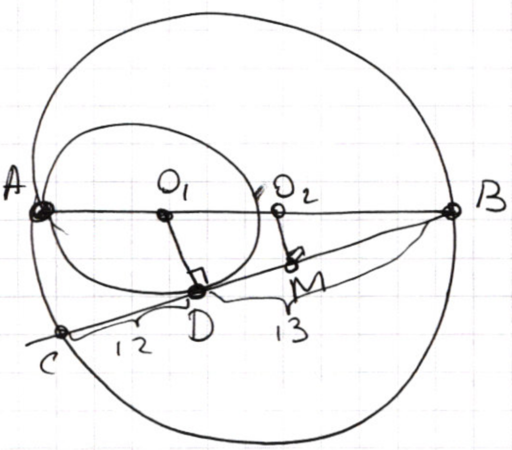
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Пусть:

r - радиус мал. окр.
R - радиус бол. окр.

1) r - ? R - ?



Степень точки B отн. ω:

$(2R-2r)2R = 13^2$

Пусть M - осн. перпен. из O_2 на BC

т.к. BO_2C - равн. $\Rightarrow$ M - сер BC $\Rightarrow BM = 12{,}5$

$\triangle O_1DB \sim \triangle O_2MB$ т.к. $O_2M \parallel O_1D$

$\Rightarrow \dfrac{BO_2}{O_2M} = \dfrac{BO_1}{O_1D}$; $\dfrac{O_2M}{\underbrace{O_1D}_{r}} = \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{12{,}5}{13} = \dfrac{25}{26}$

$\dfrac{R}{\frac{25}{26}r} = \dfrac{2R-r}{r}$ $O_2M = \dfrac{25}{26}r$

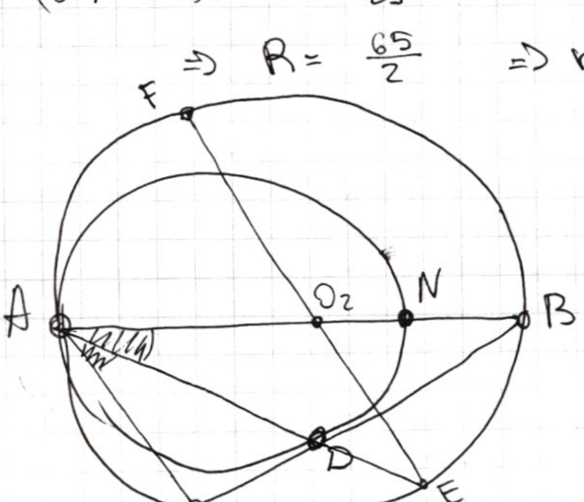
$R = \dfrac{25}{13}R - \dfrac{25}{26}r$

$\dfrac{25}{26}r = \dfrac{12}{13}R$

$r = \dfrac{24}{25}R$

$(2R-2r)2R = \dfrac{4}{25}R^2 = 13^2$

$\Rightarrow R = \dfrac{65}{2} \Rightarrow r = \dfrac{24}{25}\cdot\dfrac{65}{2} = \dfrac{12\cdot 13}{5} = \dfrac{156}{5}$



Пусть пересеч мал. окр. и AB = N

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cos\angle ABC = \frac{BM}{BO_2} = \frac{12{,}5}{65/2} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$

По теор. cos к $\triangle ABD$:

1) $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\cdot AB\cdot BD\cdot \cos\angle ABC$

$AB^2 = 65^2 + 13^2 - 2\cdot 65\cdot 13\cdot \frac{5}{13} = 65^2 + 169 - 650 = 4225 + 169 - 650 =$

$= 3744$

$AD = 12\sqrt{26}$

2) $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot \cos\angle BAE$

$\cos\angle BAE = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB\cdot AD} = \frac{65^2 + 3744 - 169}{2\cdot 65\cdot 12\sqrt{26}} =$

$= \frac{4225 + 3744 - 169}{2\cdot 65\cdot 12\sqrt{26}} = \frac{7800}{2\cdot 65\cdot 12\sqrt{26}} = \frac{300}{60\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

~~$\angle AFE$ опир. на дугу~~ AE $\angle BAE = \frac{\smile BE}{2}$

$\angle AFE = \frac{\smile AE}{2} = \cancel{180}\ 90^\circ - \frac{\smile BE}{2} = \cancel{180}\ 90^\circ - \angle BAE$

~~$\Rightarrow \cos\angle AFE = -\frac{5}{\sqrt{26}}$~~

~~$\angle AFE = \arccos -\frac{5}{\sqrt{26}}$~~

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

Ответ:

$\frac{65}{2}$; $\frac{156}{5}$;

$\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$;

$\frac{1625}{4}$

$\angle ADC = \frac{\smile AD}{2}$ (по св. кас)

$\angle NAD = \frac{\smile ND}{2}$

$\smile AD + \smile ND = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ADC + \angle NAD = 90^\circ$

$\angle ACB = 90^\circ$ т.к. опир. на диаметр.

$\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ - \angle ADC = \angle NAD$

$\Rightarrow$ AE - бисс BAC $\Rightarrow$ E - сер. $\smile BC$ $\Rightarrow FE$ - диам. (т.к. $FE \perp BC$)

$\angle AO_2F = 180^\circ - 2\angle AFE$

$\sin\angle AO_2F = \sin(2\angle AFE) = 2\cdot\sin\angle AFE\cdot\cos\angle AFE = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{5}{13}$

$S_{\triangle}AEF = R^2\cdot\sin\angle AO_2F = \frac{65^2}{4}\cdot\frac{5}{13} = \frac{13\cdot 125}{4} = \frac{1625}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $26x-x^2=a$

ОДЗ: $a>0$

$a^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12}+a \geq 5^{\log_5 13\cdot\log_5 a}$

$a^{\log_5 12}+a \geq a^{\log_5 13}$

Пусть $a=5^b$

$5^{b\cdot\log_5 12}+5^b \geq 5^{b\cdot\log_5 13}$

$12^b+5^b \geq 13^b$

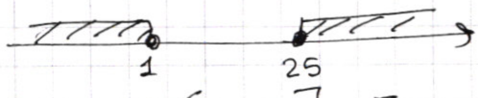
при $b \leq 2$ неравенство выполняется,

при $b>2$ не выполняется.

$\Rightarrow$ $a \leq 25$

$26x-x^2 \leq 25$

$x^2-26x+25 \geq 0$



$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

с учётом ОДЗ:

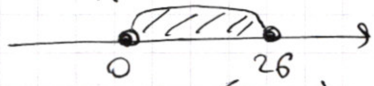
$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$.

ОДЗ:

$26x-x^2>0$

$x^2-26x<0$



$x \in (0; 26)$

~~a_{max} при $x=13$:~~

~~$a_{max}=26\cdot 13-13^2=13^2$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{2}{17}$

$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1

$\sin(2a+4b)\sin 2a$

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos(2a+2b) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+4b) + \sin 2a = \sin(2a+2b)\cos 2b + \sin 2b\cos(2a+2b) + \sin 2a =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2b \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2b + \sin 2a = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2a+2b)\cos 2b = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2b = \frac{2}{17}$

$\cos 2b = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{17} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\frac{16}{17} + \frac{2}{17}$

$\sin 2a\cos 2b + \sin 2b\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2b) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2a \pm 4\cos 2a = -1$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a} = a^{\log_5 13}$

$x: 5^x = a$

$a^x = a^x \ln a$

$a^{\log_5 12} + a \geq a^{\log_5 13}$

$a^{\log_5 12 - 1} + 1 \geq a^{\log_5 13 - 1}$

$144\cdot 12 + 125 \geq 169\cdot 12 + 169$

$a = 5^2$

$12^2 + 25 \geq 13^2$

$144 + 25 \geq 169$

$12^x + 5^x - 13^x \geq 0$

$12^x \ln 12 + 5^x \ln 5$

$\ln 12\, 12^x + \ln 5\, 5^x - \ln 13\, 13^x = 0$

$(\sin a + \cos a)^2 = \frac{32}{17} = \frac{64}{34}$

$\sin(2a+4b)+\sin 2a = -\frac{2}{17}$

$2\sin(\underbrace{2a+2b}_{\pm\frac{1}{\sqrt{17}}})\cos 2b = \pm\frac{2}{17}$

$\frac{\sin}{\cos} \quad \frac{-\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}$

$\cos 2b = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+4b)+\sin 2a = \underbrace{\underbrace{\sin(2a+2b)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\underbrace{\cos 2b}_{\frac{1}{\sqrt{17}}}}_{-\frac{1}{17}} + \underbrace{\underbrace{\cos(2a+2b)}_{\pm\frac{4}{\sqrt{17}}}\underbrace{\sin 2b}_{\pm\frac{4}{\sqrt{17}}}}_{\pm\frac{16}{17}} +$

$+\sin 2a = -\frac{2}{17}$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2a = -\frac{2}{17}+\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=\frac{15}{17}\\ \sin 2a = -\frac{2}{17}+\frac{1}{17}-\frac{16}{17}=-1\end{array}\right.$$

10 35

$2a = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$a = -\frac{\pi}{4}+\pi k$

$tg a = -\frac{\sqrt2}{2}$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a = \frac{15}{17}$

$2\sin a\sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{15}{17}$

$1-\sin^2 a = \left(\frac{15}{2\cdot 17\sin a}\right)^2 = \frac{225}{34^2\sin^2 a}$

$$\begin{cases}\sin a\cos a = \frac{15}{34}\\ \sin^2 a+\cos^2 a = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin a\cos a = \frac{15}{34}\\ (\sin a+\cos a)^2 = 1+\frac{30}{34}=\frac{64}{34}\end{cases}$$

$\sin a\cos a = \frac{15}{34}$

$\sin a+\cos a = \frac{8}{\sqrt{34}}$

$\sin a\cos a = \frac{15}{34}$

$\sin a = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos a = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$9a^2+16a^2 = 25a^2 = \cancel{90}\ 18$

$a^2 = \frac{18}{5}$

$y-6x=$

$=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9x^2-18x+9+$

$+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$x-1=a \qquad x=a+1$

$y-6=b$

$b+6=6a+6$

$$\begin{cases}b-6a=\sqrt{ab}\\ 9a^2+b^2=90\end{cases}$$

$$\begin{cases}36a^2+b^2-12ab=ab\\ 9a^2+b^2=90\end{cases}$$

$36a^2-13ab+b^2=0$

$36\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+1=0$

$13^2-4\cdot 36 = 169-144$

$\frac{-144}{25}$

$\frac{13\pm5}{72}$

$\frac{18}{72} = \frac{1}{4}$

$9\cdot 8 \qquad \frac{18}{36}$

$\frac{8}{72}=\frac{1}{9}$

1) $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$ 2) $\frac{a}{b}=\frac{1}{9}$

$b=4a \qquad b=9a$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

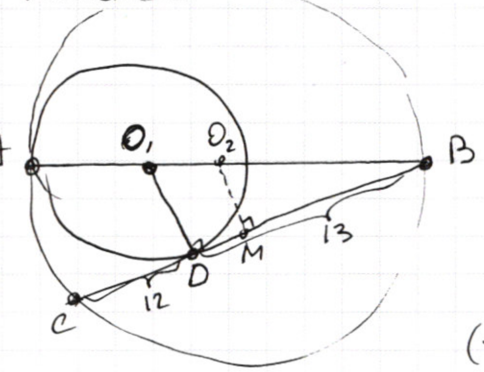
Дано:
AB - диам
A - т. кас.
BC - кас
D - т. кас
$CD = 12$
$BD = 13$

r - ?
R - ?
$\angle AFE$ - ?
$S_{\triangle AEF}$ - ?

Решение:

2

Пусть радиус ω - r, а Ω - R



степень точки B отн ω:
$(2R-2r)2R = 13^2$

серпер. к BC пересек. AB как раз в центре Ω.

(т.к. серпер к хорде - диам.)

Пусть сер. BC - M

$\triangle O_1DB \sim \triangle O_2MB$

т.к. они прям.

625

$525-69$

$(R-r)R = \left(\frac{13}{2}\right)^2$ $\quad 500^{25} - 44$

$\frac{25^4}{13^4}$

$\frac{10000}{26^2} r^4$

$\cancel{\frac{10\cdot10\cdot10\cdot10}{169\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}}$

$\cancel{25\cdot100}$

$\left(\frac{25}{13}\right)^{2} \cdot 4$

$\frac{100}{26}\cdot\frac{100}{26} r^4$

$\frac{50}{13}\cdot\frac{50}{13}$

$4\cdot169 \quad 400+240+$
$+36$

$\begin{array}{r}676\\-625\\\hline 21\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}912\\-676\\\hline\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}906\\-\cancel{670}\\\hline 236\end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N6}$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \qquad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$$

1) $ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$$18x^2-(51+a)x+(28-b) \leq 0$$

$$D = 51^2+a^2+102a-72\cdot 28+72b$$

$$x_1 = \frac{51+a-\sqrt{D}}{36} \leq \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{51+a+\sqrt{D}}{36} \geq 2$$

2) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

$$\frac{8-6x-(3ax^2+3bx-2ax-2b)}{3x-2} \geq 0$$

$$\frac{3ax^2+(3b-2a+6)x-(2b+8)}{3x-2} \leq 0$$

$a^{\log_5 12} + a - a^{\log_5 13} \geq 0$

$(\log_5 12) a^{\log_5 12-1} + 1 - (\log_5 13) a^{\log_5 13 - 1}$

$\log_5 12 (\log_5 12 - 1) \quad \log_5 13 (\log_5 13 - 1)$

$12^6 + 5^6 \geq 13^6$

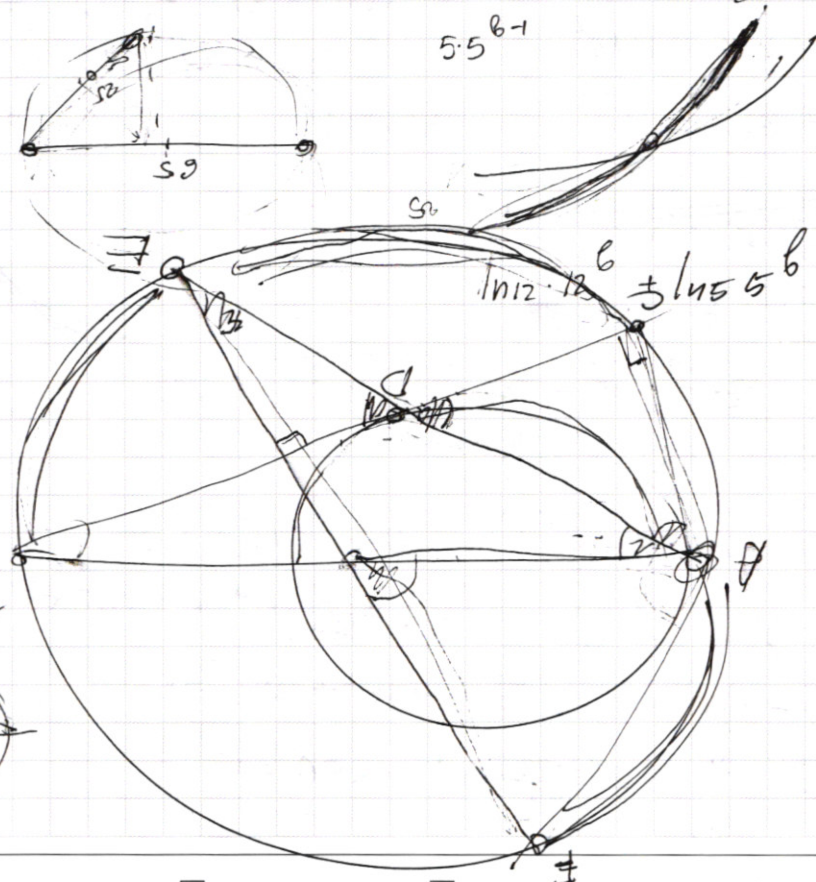
$12 + 5 \geq$

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$12^6 + 5^6 \geq (12+1)^6$

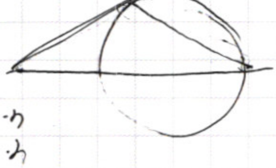
$12^6 + 5^6 \geq 12^6 + \alpha_1 12^{6-1} + \alpha_2 12^{6-2} + \alpha_3 12^{6-3} \dots + \alpha_6$

$5 \cdot 5^{6-1}$



$\ln 12 \cdot 12^6 + \ln 5\, 5^6$

$\ln 13\, 13^6$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

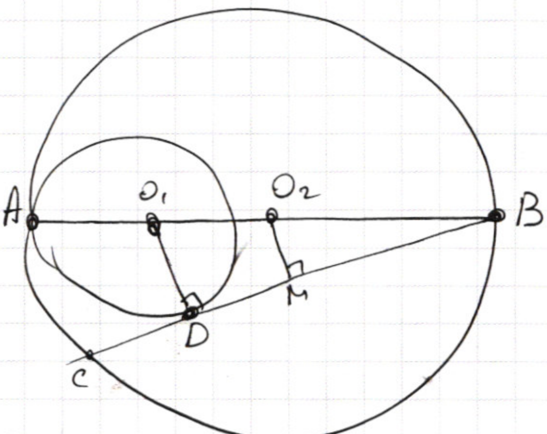
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Пусть:
r – радиус мал. окр.
R – радиус бол. окр.



① r–? R–?

Степень т. B отн. ω:

(1) $(2R-2r)2R = 13^2$

Пусть M – осн. перпен. из O_2 на BC

т.к. BO_2C – равн., то M – сер. BC $\Rightarrow BM = \frac{25}{2}$

$\triangle O_1DB \sim \triangle O_2MB$ т.к. $O_2M \parallel O_1D$

$\Rightarrow \frac{O_2M}{O_1D} = \frac{BM}{BD} = \frac{12{,}5}{13} = \frac{25}{26}$ ($r \to O_1D$)

$O_2M = \frac{25}{26}r$

По теор. Пиф:

$BO_2^2 = O_2M^2 + BM^2$

(2) $\left(\frac{25}{26}r\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = R^2$

$R = 25\sqrt{\left(\frac{r}{26}\right)^2 + \frac{1}{4}}$

$4R^2 - 4Rr = \left(\frac{25}{13}r\right)^2 + 25^2 - 100r\sqrt{\left(\frac{r}{26}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 169$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^2 + 456 = 100r\sqrt{\left(\frac{r}{26}\right)^2 + \frac{1}{4}}$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^4 + 456^2 + 2\cdot 456\cdot\left(\frac{25}{13}r\right)^2 = 10^4 r^2\left(\left(\frac{r}{26}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^4 + 912\cdot\left(\frac{25}{13}r\right)^2 + 456^2 = \frac{2500}{169}r^4 + 2500r^2$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2\left(\frac{625}{169} - 4\right)r^4 + 625\left(\frac{912}{169} - 4\right)r^2 + 456^2 = 0$

$-\frac{625\cdot 21}{13^4}r^4 + \frac{625\cdot 236}{169}r^2 + 456^2 = 0$

130

144
12

$\frac{R}{\frac{25}{26}\cancel{r}} = \frac{2R-r}{\cancel{r}}$

$Rr = \frac{25}{13}Rr - \frac{25}{26}r^2$

$\frac{25}{26}r^2 = \frac{12}{13}Rr$

$f(2) = 0$

$\cancel{f(4) = 0}$ $f(2^n) = 0$

$f(3) = 0$ $f(3^n) = 0$

$f(5) = 1$ $f(2^n \cdot 3^k) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

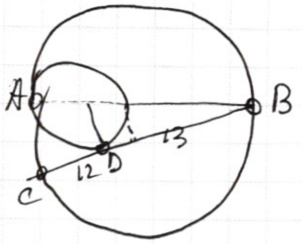
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

□ черновик □ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$(2R-2r)\cdot 2R = 13^2$

$\left(\frac{25}{26}r\right)^2 + (12{,}5)^2 = R^2$

$\left(\frac{r}{26}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{R}{25}\right)^2$

$\begin{array}{r} 625 \\ -169 \\ \hline 456 \end{array}$

$4R^2 - 4rR = 169$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^2 + 625 - 4r\sqrt{\quad} = 169$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^2 + 456 = 4r\sqrt{\quad}$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^4 + 456^2 + 2\cdot 456\cdot\left(\frac{25}{13}r\right)^2 =$

$= 16r^2\left(\left(\frac{25}{26}r\right)^2 + (12{,}5)^2\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

Дано: $\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin(2a+4b)+\sin(2a) = -\frac{2}{17}$

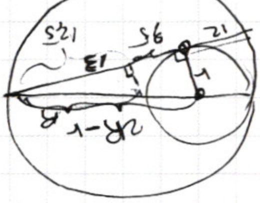
$\sin(2a+4b$

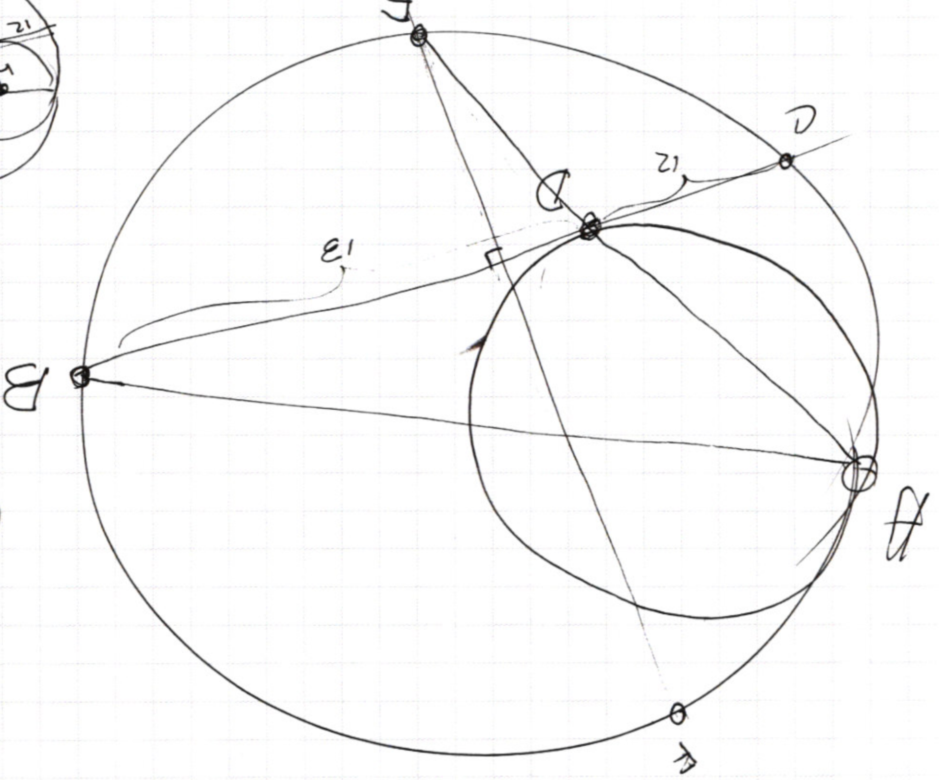
$9 \quad +36$

$10 \quad +35=45$

$(2R-2r)2R = 13^2$

$4R^2-4rR = 13^2$





$12^x+5^x-13^x=0$

$\ln 12\cdot 12^x+\ln 5\cdot 5^x-\ln 13\cdot 13^x=0$

$(\ln 12)^2 12^x+(\ln 5)^2 5^x-(\ln 13)^2 13^x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)