МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ (из основ. триг. тожд.)

$\sin(4\alpha+4\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)(\cos 2\alpha+2\beta) = \mp\frac{4}{17}$ ($\mp$ $\pm$ значит, что знаки связаны)

$\cos(4\alpha+4\beta) = \pm\frac{15}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((4\alpha+4\beta)-2\alpha) = \sin(4\alpha+4\beta)\cos2\alpha - \sin2\alpha\cos(4\alpha+4\beta)$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos2\alpha - \sin2\alpha\cos(4\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = -\frac{2}{17} = \cancel{-\frac{2}{17}(\sin^2}$

Зная $\sin(4\alpha+4\beta)$ и $\cos(4\alpha+4\beta)$ всегда можно найти $tg\alpha$;

разберем случаи:

1) $\sin(\underbrace{4\alpha+4\beta}_{x}) = \frac{4}{17}$

$\cos(x) = \frac{15}{17}$

$\frac{4}{17}(2\cos^2\alpha-1)\underbrace{-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{15}{17}+2\sin\alpha\cos\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{2}{17}} = -\frac{2}{17} \Big| : \frac{2}{17}$

$2(2\cos^2\alpha-1)+2\sin\alpha\cos\alpha = -1$

$4\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 0$

$3\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha = 0 \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$ т.к. tg опред.

! $3+2tg\alpha-tg^2\alpha = 0$; $a^2-2a-3=0$ ($tg\alpha = a$); $\underline{a=-1}$; или $\underline{a=3}$

2) $\sin(x) = -\frac{4}{17}$ | $-\frac{4}{17}(2\cos^2\alpha-1)-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{15}{17}+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{17}$ (аналогично 1).

$\cos(x) = \frac{15}{17}$ | $-4\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 0$

| $-\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3\sin^2\alpha = 0 \Big| : \cos^2\alpha$

! $3tg^2\alpha+2tg\alpha-1 = 0$; $\underline{tg\alpha=-1}$ или $\underline{tg\alpha = \frac{1}{3}}$

3) $\sin x = \frac{4}{17}$ | $\frac{4}{17}(2\cos^2\alpha-1)\underbrace{+2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{15}{17}+2\sin\alpha\cos\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{32}{17}} = -\frac{2}{17}$

$\cos x = -\frac{15}{17}$ | $4\cos^2\alpha+32\sin\alpha\cos\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 0$

$3\cos^2\alpha+32\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha = 0$; $tg^2\alpha-32tg\alpha-3 = 0$; $\frac{D}{4} = 16^2+4\cdot3 = 4(64+3) = 4\cdot67$

! $\underline{tg\alpha = 16+2\sqrt{67}}$ или $\underline{16-2\sqrt{67}}$

4) $\sin x = -\frac{4}{17}$ | $-\frac{4}{17}(2\cos^2\alpha-1)+2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{15}{17}+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos x = -\frac{15}{17}$ | $-2(2\cos^2\alpha-1)+32\sin\alpha\cos\alpha+3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 0$

$-\cos^2\alpha+32\sin\alpha\cos\alpha+3\sin^2\alpha = 0$; $3tg^2\alpha+32tg\alpha-1 = 0$; $\frac{D}{4} = 4\cdot67$.

! $\underline{tg\alpha = \frac{-32+2\sqrt{67}}{3}}$ или $\underline{tg\alpha = \frac{-32-2\sqrt{67}}{3}}$. Двукратно подчеркнуто — ответ!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}; \quad (y-6)-6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45; \quad 9x^2-18x+9+y^2-12y+36 = 90; \quad 9(x-1)^2+(y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

Пусть $a = x-1$; $b = y-6$; ОДЗ: $y-6x \geq 0$; $b-6a \geq 0$

$$\begin{cases} b-6a = \sqrt{ab}; \quad b^2-12ab+36a^2 = ab; \quad b^2-13ab+36a^2 = 0 \ (*) \\ 9a^2+b^2 = 90 \end{cases}$$

$(*)$: решим квадр. ур. относ. b: $D = 13^2a^2 - 36\cdot 4a^2 = (169-144)a^2 = 25a^2$

$b_{12} = \dfrac{13a \pm 5a}{2}$; 1) $b = 9a$; 2) $b = 4a$

1) $9a^2+(9a)^2 = 90$; $(9+81)a^2 = 90$; $90a^2 = 90$; $a^2 = 1$; $a = \pm 1$

$b-6a = 9a-6a = 3a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a = 1$; $b = 9$; $a = x-1 \Rightarrow x = a+1 = 2$

$b = y-6 \Rightarrow y = b+6 = 15$

2) $9a^2+(4a)^2 = 90$; $25a^2 = 90$; $a^2 = \frac{18}{5}$; $a = \pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

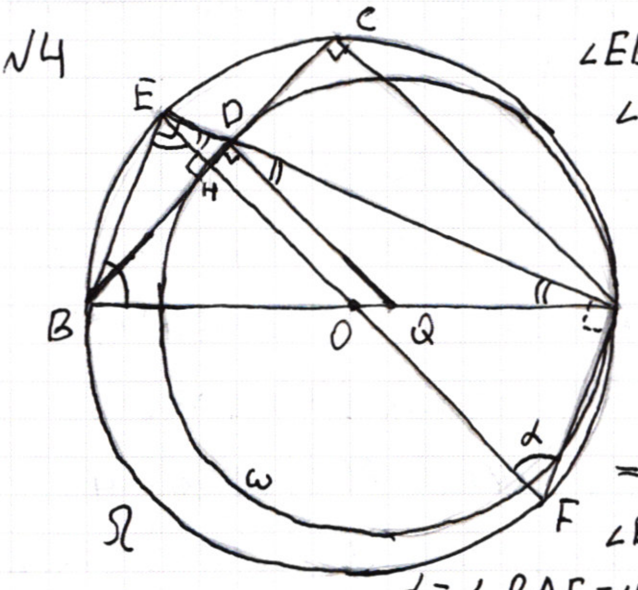
$b-6a = 4a-6a = -2a \geq 0 \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a = -\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow b = -4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$x = a+1 = 1-3\sqrt{\frac{2}{5}}$; $y = b+6 = 6-\cancel{4}12\sqrt{\frac{2}{5}}$

Ответ: $(2; 15)$; $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6-12\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\angle EBA = \angle EFA$ т.к. опир. на EA; пусть $\angle EFA = \alpha$. (отмечен одной дужкой)

$\angle BEA = 90^\circ$ как опир. на диаметр

$\angle BAE = 90^\circ - \alpha = \beta$ (двумя дужками)

O-центр Ω; $Q - \omega$

$DQ = QA = r \Rightarrow \angle QDA = \angle DQA = \beta$

$EF \perp BC$; $QD \perp BC$ (т.к. QD-рад; BC-кас)

$\Rightarrow EF \parallel DQ \Rightarrow \angle FEA = \angle QDA = \beta$;

$\angle BEO = 90^\circ - \angle OEA = 90^\circ - \beta = \alpha$;

$\alpha = \angle BAF = \angle BEF$ как опир. на BF; $\angle EAF = \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ − диам Ω; т.е. E, O, F на одной прямой; Радиус $\Omega - R$; $\omega - r$

$BD = 13$; $DC = 12$; $BC = 13 + 12 = 25$; $BQ = 2R - r$; $BA = 2R$

Из подобия $\triangle BDQ$ и $\triangle BCA$: $\frac{BD}{BC} = \frac{BQ}{BA} = \frac{13}{25} = \frac{2R - r}{2R} \Rightarrow 13 \cdot 2R = 25 \cdot 2R - 25r$

$25r = 24R \Rightarrow R = \frac{25}{24} r$; OE − рад; $OE \perp BC$ − хорда $\Rightarrow BH = HC$

(где $H = EF \cap BC$) $BH = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2}$; Из подобия $\triangle BHO$ и BDQ: $\frac{HO}{r} = \frac{\frac{25}{2}}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow HO = \frac{25}{26} r$; в прямоуг. треуг. BHO: $BH = \frac{25}{2}$; $HO = \frac{25}{26} r$; $BO = R = \frac{25}{24} r$

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{26}\right)^2 r^2 = \left(\frac{25}{24}\right)^2 r^2 \xRightarrow{:\frac{25^2}{2^2}} 1 = \left(\frac{1}{12^2} - \frac{1}{13^2}\right) r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{12^2 \cdot 13^2}{5^2} \Rightarrow r = \frac{12 \cdot 13}{5}$$

$R = \frac{25 \cdot 12 \cdot 13}{24 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 13}{2}$ ($r = 31{,}2$; $R = 32{,}5$)

$\triangle BEA = \triangle EAF$ (по углу и катету) $EH = \cancel{\frac{BQ}{AB}}$ $EO - HO = R - HO = \frac{5 \cdot 13}{2} - \frac{25 \cdot 12 \cdot 13}{26 \cdot 5} =$

$= \frac{5 \cdot 13}{2} - \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{5}{2}$; $BE = \sqrt{EH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25^2}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{26}$; $\cos\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{2R}$

$\cos\alpha = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{26}}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 13} = \frac{\sqrt{2 \cdot 13}}{2 \cdot 13} = \frac{1}{\sqrt{26}}$; $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$ $\left(\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}\right) \Rightarrow EA = 2R\sin\alpha =$

$= 5 \cdot 13 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{25 \cdot 13}{\sqrt{2 \cdot 13}} = 25\sqrt{\frac{13}{2}}$; $S_{AEF} = S_{BEA} = \frac{EA \cdot BE}{2} = \frac{25\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{13 \cdot 2}}{2} =$

$= \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4} = 406{,}25$. Ответ: $R = 32{,}5$; $r = 31{,}2$; $\angle AFE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$; $S_{AEF} = 406{,}25$

№5

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$; $f(1)=f(a\cdot \frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=0$

$f(a)=-f(\frac{1}{a})$

~~f(2)~~ $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$; нужно найти кол-во пар от 4 до 28 у с различными значениями функции (~~бездат~~ без повторения в обе стороны)

$f(2)=[2/4]=0$; $f(3)=[3/4]=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$

$(f(2^n)=0)$ $f(5)=[5/4]=1$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(7)=[7/4]=1$

$f(8)=0$; $f(9)=f(3)+f(3)=0$ $(f(3^n)=0)$; $f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=[11/4]=2$; $f(12)=f(3)+f(4)=0$ $(f(3^n\cdot 2^m)=0)$ $f(13)=[13/4]=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$; $f(15)=f(5)=1$; $f(16)=0$; $f(17)=[17/4]=4$

$f(18)=0$; $f(19)=[19/4]=4$; $f(20)=f(5)=1$; $f(21)=f(7)=1$; $f(22)=f(11)=2$

$f(23)=[23/4]=5$; $f(24)=0$; $f(25)=f(5)+f(5)=2$; $f(26)=f(13)=3$

$f(27)=0$; $f(28)=f(7)=1$

$f(n)$	$n\in[4;28]$
0	4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 27
1	5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 15 ; 20 ; 21 ; 28
2	11 ; 22 ; 25
3	13 ; 26
4	17 ; 19
5	23

И так все числа и их значения записаны. нужны пары различные

Для группы 5 : 24·1

для 4 : 2·22

для 3 : 2·20

для 2 — 3·17 ; для 1 — 8·9

В сумме пар : 24+44+40+51+72

Парные пересекаются

Ответ: 24+44+40+51+72

№3.

можно заменить

$5 = \sqrt{34 - 12 - 17 + 6} =$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} & 1 \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \Rightarrow \cancel{9(x-1)^2 + (y-6)^2} & 2 \end{cases}$$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

2) $9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$15 - 6 \cdot 2 = \sqrt{15 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 15 + 6}$

1) $y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$ $(y - 6x > 0,\ y > 6x)$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - 13xy + 36x^2 + y + 6x - 6$

$\frac{18}{5} \cdot 9 + \frac{18}{5} = \frac{5 \cdot 18}{5} =$

$5 \cdot 18 = 90$

$= 90$

1) $y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} = \sqrt{x(y-6) - (y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$-6(x-1) = -6x + 6$

$-6(x-1) + (y-6) = y - 6x + 6 - 6 = y - 6x$, $a = (x-1)$; $x = a + 1$

$b = (y-6)$; $y = b + 6$

$a > 6b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \Rightarrow a^2 - 12ab + 36b^2 = ab, \ a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \ * \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$*$: $D = 13^2 b^2 - 36 \cdot 4 b^2 = (169 - 144) b^2 = 25 b^2$

$a_{12} = \frac{13b \mp 5b}{2}$; $a_1 = 9b$; $a_2 = 4b$

1) $a = 9b$

$9(9b)^2 + b^2 = 90$; $729 b^2 + b^2 = 730 b^2 = 90$

$b = \pm\sqrt{\frac{90}{730}} = \pm\sqrt{\frac{9}{73}}$, $a = \pm 9 \cdot \sqrt{\frac{9}{73}} = \pm\sqrt{\frac{729}{73}}$

а) $b = \sqrt{\frac{9}{73}}$; $a = 9\sqrt{\frac{9}{73}}$, $a - 6b = 3b = \sqrt{\frac{9}{73}} > 0$

б) $3b < 0$

2) $a = 4b$

$9(4b)^2 + b^2 = 90$; $145 b^2 = 90$, $b = \pm\sqrt{\frac{90}{145}} = \pm\sqrt{\frac{18}{29}}$

$a = \pm 4\sqrt{\frac{18}{29}}$, $a - 6b = -2b > 0$; $b < 0$; $b = -\sqrt{\frac{18}{29}}$, $a = -4\sqrt{\frac{18}{29}}$

$13 \cdot 13 = 39 \ldots 169$; $36 \cdot 4 = 144$; $81 \cdot 9 = 729$; $16 \cdot 9 = 144$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ → 26

$\cancel{(x-y)}=a \quad a=26x-x^2: a>0$

$|a|^{\log_5 12} \pm a-13^{\log_5(a)}=0$

$a=5^n;\ n=\log_5 a,\quad a=5^{\log_5 a}$

$|5^{\log_5 a}|^{\log_5 12}=(5^{\log_5 12})^{\log_5 a}=12^{\log_5 a}+a-13^{\log_5 a}=0$

~~1) $a>5$: $12^{\log}\ \log_5 a>1,\ 12^{\log_5 a}>12;\ 13^{\log_5 a}>13$~~

$a^{\log_5 12}=12^{\log_5 a};\quad a^{\log_5 12}+a-a^{\log_5 13}=0$

$a<1: a^{\log_5 12}>a^{\log_5 13}$

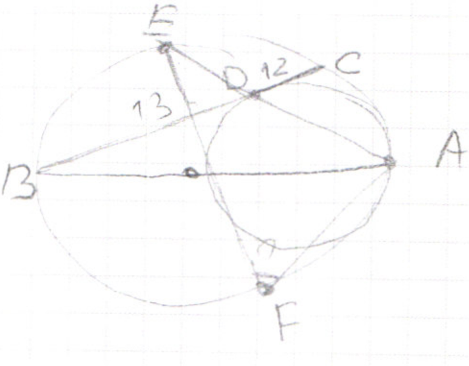
нет корней.

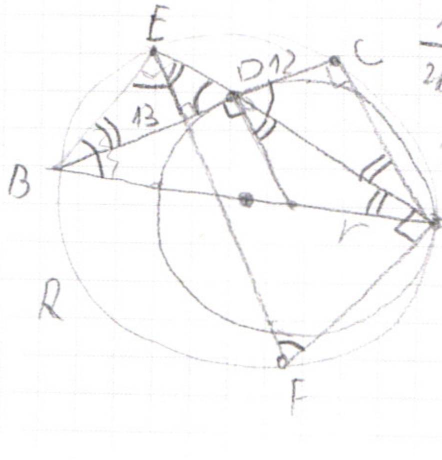
$a>1;\quad a=26x-x^2$; макс в верш.: $x_в=\frac{-26}{-2}=-13$

$a_{max}=26\cdot 13-13^2=13^2=169;\ a_{min}$

$a=1:\ 1+1-1=1>0$

$(a^{\log_5 12}+a-a^{\log_5 13})'=\log_5 12\, a^{\log_5 12-1}+1-\log_5 13\, a^{\log_5 13-1}$





$\frac{13}{2R-r}=\frac{25}{2R}$

$2R\cdot 13=25\cdot 2R-25r$

$r=\frac{25\cdot 2R-2R\cdot 13}{25}=$

$=\frac{2\cdot 12R}{25}=\frac{24}{25}R$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{4-6x}{3x-2}+\frac{8}{3x-2}=\frac{\frac{8}{3}}{x-\frac{2}{3}}-2$$

$18x^2-51x+28$

$x_B=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$y_B=18\cdot\frac{17^2}{12^2}-51\cdot\frac{17}{12}+28=$

$=\frac{2\cdot17^2}{16}-\frac{17\cdot17}{4}+28$

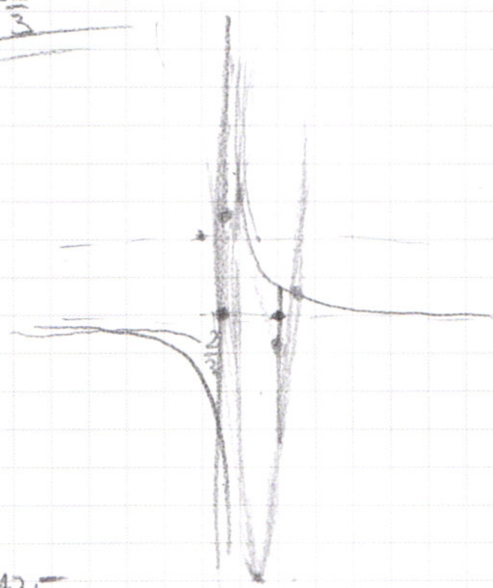
$28-\frac{17^2}{8}=$

$=\frac{224-289}{8}=-\frac{65}{8}=-8{,}425$

$28\cdot8=224$

$17\cdot17=289$

$289-224=65$

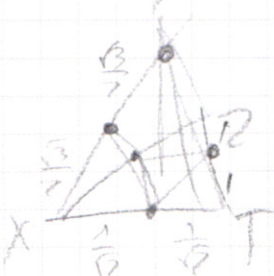


$$18\cdot\frac{4}{9}-\frac{5\cdot2}{3}+28=\frac{12-10+28\cdot3}{3}=28\frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{8}{3}}{x-\frac{2}{3}}-2=18x^2-51x+28$$

$$\frac{8}{3x-2}=18x^2-51x+30$$

6 17 10



$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+4\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = 2\cdot\sin\cdot\cos = \mp\frac{8}{17}$; $\cos(4\alpha+4\beta) = \pm\frac{15}{17}$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin\beta$

$\sin(30+60) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+4\beta)\cos 2\alpha + \cos(2\alpha+4\beta)\sin 2\alpha$

$\sin(a-b) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos a$

$\sin(90-30) = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$17^2 = 289$

$\sin(2\alpha-4\beta) = \sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha(\cos(4\alpha+4\beta))$

$17 \cdot 17 = 119 + 170 = 289$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$16 \cdot 16 = 96 + 160 = 256$

$289 - 64 = 225 = 15^2$

$256 + 12 = 268 = 2\sqrt{67}$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 0$

$2\sqrt{91+3}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$; p-прост

$4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(2) = [2/4] = 0$

$f(3) = [3/4] = 0$

$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [5/4] = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(7) = [7/4] = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{2}) + f(2) = ;\ f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0$; $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

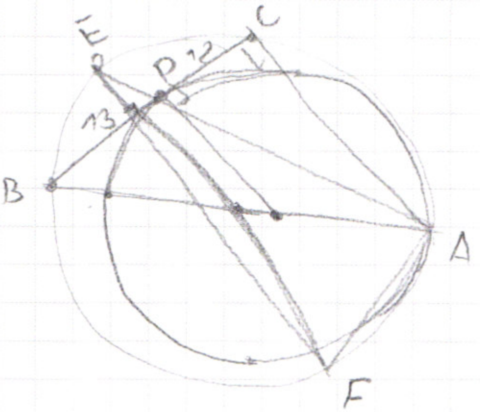
(Нумеровать только чистовики)

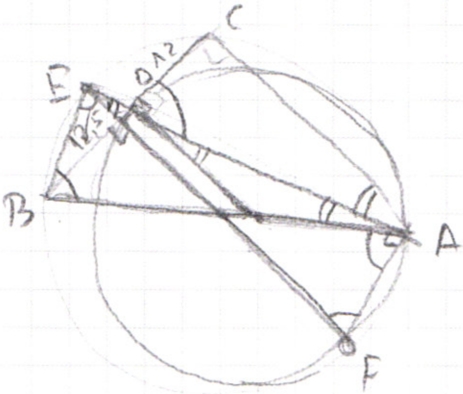
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

196
218
245
7 169
7 12





749
144
36
85

$R^2 = 12{,}5^2 + a^2$; $a = \frac{12{,}5}{13} r$ $\quad r = \frac{24}{25} R$; $R = \frac{25}{24} r$

$R^2 = 12{,}5^2 + \frac{12{,}5^2}{13^2} r^2 =$

$\frac{25^2 R^2}{24^2} = 12{,}5^2 + \frac{12{,}5^2}{13^2} r^2 = 12{,}5^2 + \left(\frac{25}{26}\right)^2 r^2$

$r^2\left(\frac{25^2}{24^2} - \frac{25^2}{26^2}\right) = 12{,}5^2$, $25^2 r^2\left(\frac{1}{12^2} - \frac{1}{13^2}\right) = 25^2$

$r^2 = \frac{12^2 \cdot 13^2}{13^2 - 12^2} = \frac{12^2 \cdot 13^2}{25} = \left(\frac{12 \cdot 13}{5}\right)^2$, $r = \frac{12 \cdot 13}{5}$

$\frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2$ $\quad R = \frac{25}{24} r = \frac{25 \cdot 12 \cdot 13}{24 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32{,}5$ 65

$169 - 144 = 25$

$\frac{125 \cdot 13}{24} =$

$125 \cdot 13 = 375 + 125\_ = 1625$

$1625 : 4 = 406{,}25$ (16, 25, 24, 10, 8, 20)

$11 \cdot 13 = 36$, 12, 156