МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Ok

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

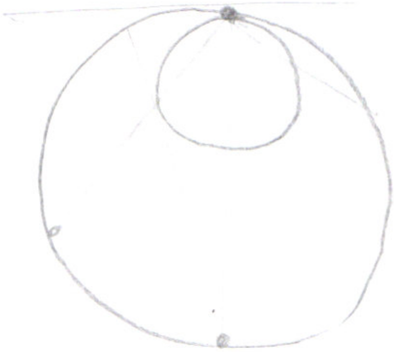
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



$\frac{86}{3}$

$9x^2 + 25x^2 =$

$34x^2 =$

$7,5x^2$

$34x^2 = 4R^2$

$x^2 = \frac{\cancel{2}R^2}{\cancel{34}\,17} \cdot \frac{15}{\cancel{2}} =$

$= \frac{17 \cdot 5^2}{6^2} \cdot 15$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$36 \mid 3$
12

$2R = \sqrt{34}\,x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = +\frac{4\sqrt5}{5\times 2} = \frac{2}{\sqrt5}$. Тогда $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

3) Пусть $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta$; $2\sin(\alpha)\cos(\alpha+2\beta)=0$

Значит, $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$ или $\cos(\alpha+2\beta)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = 0 \Rightarrow \frac{\cos\alpha\cdot 2}{\sqrt5} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 2$

4) Пусть $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(2\beta) = 0 \Rightarrow 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha)=0$

т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ определён, то $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \sin(\alpha+2\beta)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha\,\underbrace{\cos 2\beta} + \cos\alpha\,\underbrace{\sin 2\beta} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\alpha\cdot 2}{\sqrt5} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt5} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

5) Итак, $\operatorname{tg}\alpha$ может быть равен только $0, 2$ и $\frac12$.
Т.к. значений $\operatorname{tg}\alpha$ хотя бы 3, то все эти значения точно являются знач. тангенса.

Ответ: $0, 2, \frac12$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y+4+9=12+4+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy-x-2y+2 \\ \cancel{xy}\ x-2y>0 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \\ x-2y=\sqrt{\cancel{y}(y-1)(x-2)} \end{cases};\quad \begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \\ x-2-2y+2=\sqrt{(y-1)(x-2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \\ (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)} \end{cases}$$

$(x-2)=a$

$(y-1)=b$

$a\times b\geq 0$

$x-2y\geq 0$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a-2b=\sqrt{ab} \end{cases};\quad \begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2+4b^2-2ab=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2-4ab+4b^2=ab \end{cases};\quad -\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2+4b^2=5ab \end{cases};\quad 5b^2=25-5ab;$$

$$b^2=5-ab \Rightarrow ab=5-b^2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{5-b^2}{b}}$$

$$\left(\frac{5-b^2}{b}\right)^2+9b^2=25;\quad \underbrace{25-10b^2+b^4+9b^4=25b^2}; $$

$$\cancel{b^4+9b^3-10b^2-25b+25=0}$$

$$\cancel{b^4-b^3+10b^3-10b^2-25b+25=0}$$

$$\cancel{b^3(b-1)+10b^2(b-1)-25(b-1)=0}$$

$$\cancel{(b-1)(b^3+10b^2-25)=0}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Пусть $b^3 + 10b^2 - 25 = 0$

Заметим, что $a \times b \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{5-b^2}{b}\right) \cdot b \geq 0 \Rightarrow 5 - b^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{5 \geq b^2}$

$\underbrace{b^2}_{\leq 5}(b+10) = 25 \Rightarrow 5(b+10) \geq 25 \Rightarrow b + 10 \geq 5$

$b \geq -5$

$5(b+10)$

$a = x-2$

$b = y-1$

$25 - 10b^2 + \underbrace{b^4 + 9b^4} - 25b^2 = 0$

$10b^4 - 35b^2 + 25 = 0$

$x - 2y \geq 0$

$2b^4 - 7b^2 + 5 = 0$

$(b^2 - 1)(b^2 - 2{,}5) = 0$

$(b-1)(b+1)(b-2{,}5)(b+2{,}5) = 0$

1) $b = 1 \Rightarrow a = \frac{5-b^2}{b} = 4$. $a \times b \geq 0$.

~~y=1~~ $x = a+2 = 6$, $y = b+1 = 2$ $\quad x - 2y = 2 > 0$

2) $b = -1 \Rightarrow a = \frac{5-1}{-1} = -4$; $ab \geq 0$

$x = a+2 = -2$; $y = b+1 = 0$ $\quad x - 2y = -2 < 0$

не подходит

3) $b = 2{,}5 \Rightarrow a = \frac{(5-6{,}25)2}{5} = -\frac{(1{,}25)\times 2}{5} < 0$, $b > 0 \Rightarrow ab < 0$

не подх.

4) $b = -2{,}5 \Rightarrow a = \frac{(5-6{,}25)}{-2{,}5} = \frac{1{,}25}{2{,}5} = \frac{125}{250} = \frac{5\times5\times5}{5\times5\times10} = \frac{1}{2}$.

$x = a+2 = 2{,}5$; $y = b+1 = -1{,}5$ $\quad x - 2y = 2{,}5 + 2\times1{,}5 > 0$

Ответ: $(x, y) = (6, 2)$; ~~(-2, 0)~~; $(0{,}5; -1{,}5)$.

№ 3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$x^2+18x > 0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

Обозначим $x^2+18x = a$

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$; $5^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13} - a$

$\cancel{\log_a(5^{\log_{12}a} + a) \geq}$. $\log_5(5^{\log_{12}a}) \geq \log_5(a^{\log_{12}13} - a)$

(1) $\underline{\log_{12}a \geq \log_5(a^{\log_{12}13} - a)}$

$\log_{12}a \geq \log_{(12^{\log_{12}5})}(a^{\log_{12}13} - a)$

$\log_{12}a \geq \dfrac{\log_{12}(a^{\log_{12}13} - a)}{\log_{12}5}$

$\log_{12}a \geq \log_{12}a + \log_{12}(a^{\log_{12}13-1} - 1)$

$\log_{12}5$

$\log_{12}a \cdot (\log_{12}5 - 1) \geq \log_{12}(a^{\log_{12}13-1} - 1)$

Из (1): $\log_5 a \geq \log_{12}a \geq \log_5(a^{\log_{12}13} - a)$

$\underset{a>0}{\underline{2a \geq a^{\log_{12}13}}}$ $\underline{2 \geq a^{\log_{12}13-1}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

1) $f(a) = f(a\cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$0 = f(1) = f(x\cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то $f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow \boxed{f(x) < f(y)}$

2) Найдём $f(1), f(2), \dots, f(24)$

$f(1) = 0$, $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$, анал-но $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, ~~$f(9) = 2$~~, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$.

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$, $f(8) = 3f(2) = 0$, $f(9) = 0$, $f(10) = 1$, $f(12) = 0$, $f(14) = 1$, $f(15) = 1$, $f(16) = 0$, $f(18) = 0$, $f(20) = 1$, $f(21) = 1$, $f(22) = 2$, $f(24) = 0$.

n	$f(n)$
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0

Итого у нас 11 нулей, 7 единиц, 2 двойки, 1 тройка, 2 четвёрки и 1 пятёрка.

Будем считать, сколько всего пар (y, x): $f(y) > f(x)$

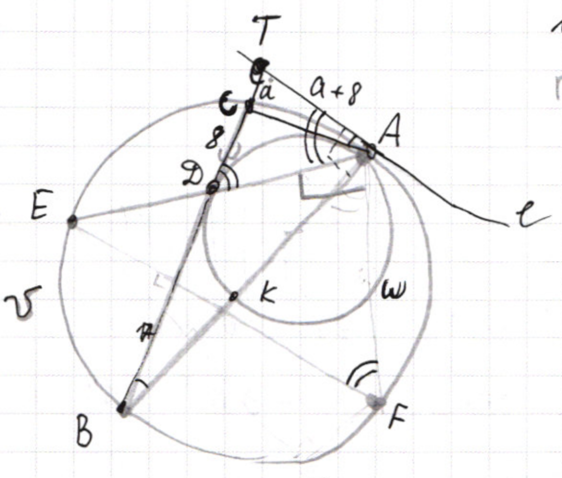
(1 способ выбрать y, 23 способа выбрать x)

1. $f(y) = 5$: таких пар $1 \times 23 = 23$
2. $f(y) = 4$: таких пар $2 \times (24 - 3) = 2 \times 21 = 42$
3. $f(y) = 3$: $1 \times (24 - 4) = 20$
4. $f(y) = 2$: $2 \times (18) = 36$
5. $f(y) = 1$: $7 \times 11 = 77$

Всего: $23 + 42 + 20 + 36 + 77 = 198$

Ответ: 198

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 4

Γ_1 Γ_2

r – радиус ω

R – радиус v

1) Проведём общую касательную l к окружностям в точке A. T – точка пересечения l и BC. TA и TD – касательные из T к ω $\Rightarrow TA = TD$. Пусть $TC = a$. Тогда $TA = a+8$ из подобия $\triangle TAC$ и TBA (т.к. $\angle ABC = \angle CAT$ (т.к. TA – касат.) и $\angle CTA$ – общий) следует равенство $TA^2 = TC \cdot TB$, т.е. $(a+8)^2 = a\cdot(a+25)$;

$a^2+16a+64 = a^2+25a$; $64 = 9a$; $a = \frac{64}{9}$.

2) $\triangle TAB$ прямоуг, т.к. диаметр $AB \perp$ касательной l.

$\Rightarrow AB^2 + AT^2 = TB^2 \Rightarrow AB^2 = TB^2 - TA^2 = (TB-TA)(TB+TA) = BD\cdot\left(25+8+\frac{128}{9}\right)$

$AB^2 = 17\left(33+\frac{128}{9}\right) = \frac{17\cdot 425}{9} = \left(\frac{17\cdot 5}{3}\right)^2 \Rightarrow AB = \frac{17\times 5}{3} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{17\times 5}{6} = \frac{85}{6}$

3) Обозначим K – перес AB и ω. $BD^2 = BK\cdot BA \Rightarrow 17^2 = (2R-2r)2R$

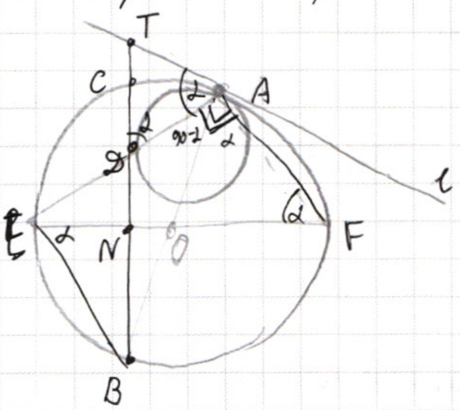
$17^2 = 4R^2 - 4Rr \Rightarrow \cancel{r = \frac{4R^2-17^2}{4R} = \frac{4\cdot\frac{17^2\cdot 5^2}{3^2}-17^2}{4\cdot\frac{17\cdot 5}{3}}} =$

$\cancel{= \frac{17^2\left(\frac{4\cdot 5^2}{3^2}-1\right)\cdot 3}{17\cdot 4\cdot 5} = \frac{17\cdot 3}{20}\cdot\frac{(100-9)}{9} = \frac{17\times 3\times 91}{20\times 9} = \frac{17\times 91}{20\times 3} = \frac{1547}{60}} = r$

$17^2 = 2R\cdot(2R-2r)$; $17 = \frac{17\times 5}{3}(2R-2r)$; $\frac{17\times 3}{5} = \frac{17\times 5}{3} - 2r$; $2r = \frac{17\times 5}{3} - \frac{17\times 3}{5} =$

$\Rightarrow 2r = \frac{17(5^2-3^2)}{15} = \frac{17\times(2)(8)}{15} \Rightarrow r = \frac{17\times 8}{15} = \frac{136}{15}$.

Ответ на первый вопрос: $R=\frac{85}{6}$, $r=\frac{136}{15}$.



N – точка перес. EF и CB.

Пусть $\angle EFA=\alpha$. Тогда $\angle EAT=\alpha$ $(=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EA})$ $=$
$=\angle TDA$ (равнобедр $\triangle TDA$) $\Rightarrow$ $NDAF$ – вписанный.
(т.к. $\angle NFA=\angle TDA$). Это значит, что $\angle DAF=180^\circ-\angle DNF=$
$=90^\circ$. $\Rightarrow$ EF – диаметр $\Rightarrow$ перес EF и $AB=O$ – центр ω.

$\Rightarrow$ $AFBE$ – прямоугольник, $\angle BEF=\alpha$. $\quad \angle BEF = 90^\circ-\angle BAF$

Найдем α.

В $\triangle ADB$: $\frac{AB}{\sin(\angle BDA)}=\frac{BD}{\sin(\angle DAB)}$ $\Rightarrow$ $\frac{2R}{\sin\alpha}=\frac{17}{\sin(90^\circ-\alpha)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{17\times 5}{3\sin\alpha}=\frac{17}{\cos\alpha}$; $\frac{5}{3\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{3}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$.

$25x^2+9x^2=34x^2=4R^2$

Пусть $AE=5x$, тогда (т.к. $\operatorname{tg}\angle AFE=\frac{5}{3}$) $AF=3x$. Тогда $EF=\sqrt{25x^2+9x^2}=$
$=x\sqrt{34}=2R=\frac{17\times 5}{3}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{17\times 5\cdot\cancel{\sqrt{34}}}{\sqrt{34}\;3}$

$S_{\triangle EAF}=\frac{AE\cdot AF}{2}=\frac{3x\cdot 5x}{2}=\frac{15}{2}\cdot x^2=\frac{15}{2}\cdot\frac{\cancel{34}\cdot 17^2\cdot 5^2}{34\cdot 3^2}=$
$=\frac{15}{2}\cdot\frac{17^2\cdot 5^2}{2\cdot 17\cdot 9}=\frac{5^3\cdot 3\cdot 17}{36}=\frac{5^3\cdot 17}{12}=\frac{2125}{12}$.

Ответ: $R=\frac{85}{6}$, $r=\frac{136}{15}$, $\angle AFE=\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$, $S_{\triangle EAF}=$
$=\frac{2125}{12}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

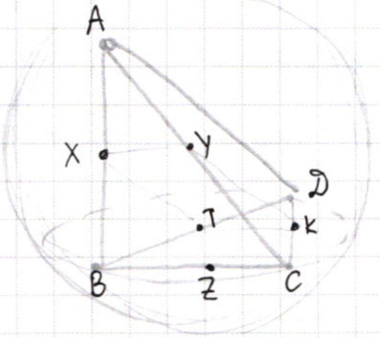
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

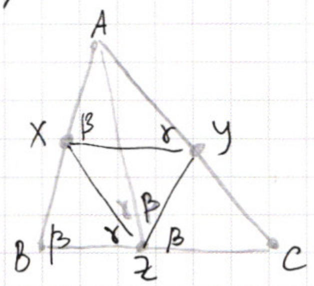
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.



X, Y, Z, T, K – середины рёбер, как показано на рисунке.

1) По условию A, X, Y и Z лежат на 1 сфере. Также они лежат все в плоскости ABC ⇒ они лежат в сечении сферы этой плоскостью, т.е. на окружности, т.е.

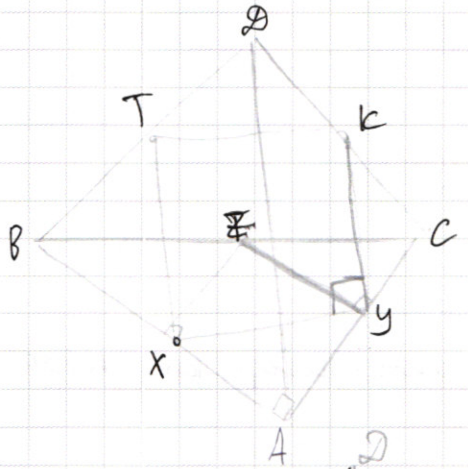


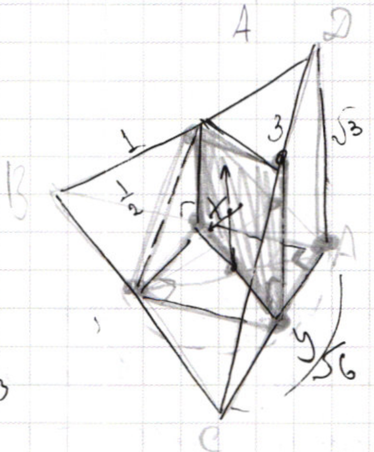
XA~~X~~YZ – вписанный. XY ср. линия ∠ABC ⇒ XY ∥ BC. Обозначим углы ABC как α, β и γ. Тогда ∠AXY = ∠ABC = β = = ∠YZC (т.к. YZ тоже ср. линия) = = ∠AZY (опир. на $\overset{\smile}{AY}$, как и ∠AXY) ⇒

⇒ ∠AZC = 2β. Аналогично, ∠BZA = 2γ ⇒ ∠BZC = 180° = 2(β+γ) ⇒ ⇒ β + γ = 90° ⇒ α = 90°. XZ ∥ AC ⇒ ∠AXZ = 90° Аналогично ∠AYZ = 90° ⇒ ~~AXY~~ XAYZ – прямоугольник.

2) Заметим, что YK ср. лин △CAD ⇒ YK ∥ AD. Аналогично, XT ∥ AD. ⇒ YK ∥ XT ⇒ Y, K, X, T ~~в~~ 1 плоскости и они на 1 сфере ⇒ они на 1 окружности. Т.к. XY ∥ BC и TK ∥ BC, то XY ∥ TK, YK ∥ XT ⇒ YKTX – параллелограмм. Он вписанный ⇒ это прямоугольник.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)





$AB=1$
$BD=2$
$CD=3$

$AD \parallel KY$, $KY \perp XY \Rightarrow AD \perp XY$
и $AD \perp BC$

Посмотрим на точку C.
~~Опа~~ Пусть σ – сфера, где лежат A и почти все середины.
Тогда CA пересекает σ в точке Y и в точке A.

Центр σ лежит на прямой, перпендикулярной XY.

$$\frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{13}$$

$BC = \sqrt{7}$.

Ответ: ~~$\sqrt{7}$~~. $BC = \sqrt{7}$

$R = \frac{17\times5}{6}$

$17^2 = \cancel{2r}\ 2R(2R-2r)$ №6

$\cancel{17^3 = \frac{2\cdot17\times5}{3}}$ $17^2 = \frac{\cancel{17}\times5}{3}\left(\frac{17\times5}{3}-2r\right)$

$\frac{17\times3}{5} = \frac{17\times5}{3}$ $\frac{17\times5}{3}-2r = \frac{17\times3}{5}$

$\frac{17\times5^2}{3\cdot5} - \frac{17\times3^2}{5} = 2r$

$\frac{17(\cancel{2})(8)}{15} = r$

$\frac{136}{15}$

$\log_a x^b =$

$\log_a(a\ \log$

$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_2 8 = 3$

$5 = 12$

5^x

$\log_a 2 = \log_a(a^x)$

$\log_2 8 = 3$

2a?

1ОС

$17^2 = (2R-2r)\,2R$

$3\times17 = \frac{17\times5^2}{6\cdot2} - 5r$

$5r = \frac{17\times5^2}{12} - \frac{17\times3\times12}{12}$

425

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Воспользуемся формулой $\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$:

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt5}}\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$$

$$2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac45;\quad \cos2\beta=\frac45\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{2}{\sqrt5}.$$ Отсюда

$\sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin(x)-\sin y=2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

1) Пусть $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\beta)\Rightarrow 2\sin(\alpha)\cos(\alpha+2\beta)=0$

$tg\,\alpha\geq3\Rightarrow$ т.к. $tg(\alpha)\neq0$, то $\sin(\alpha)\neq0$

Заметим, что ~~$\sin2\beta\neq0\Rightarrow2\sin\beta\cos\beta\neq0\Rightarrow\sin\beta\neq0$~~ $\Rightarrow\cos(\alpha+2\beta)=0$

$\Rightarrow\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta=0\Rightarrow\cos\alpha\cos2\beta=\sin\alpha\sin2\beta\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\cos2\beta}{\sin2\beta}=\frac{2}{\sqrt5}:\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{-2}{\sqrt5}\sqrt5=-2<3$. Не подходит

2) Пусть $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin2\beta=0\Rightarrow2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha)=0$

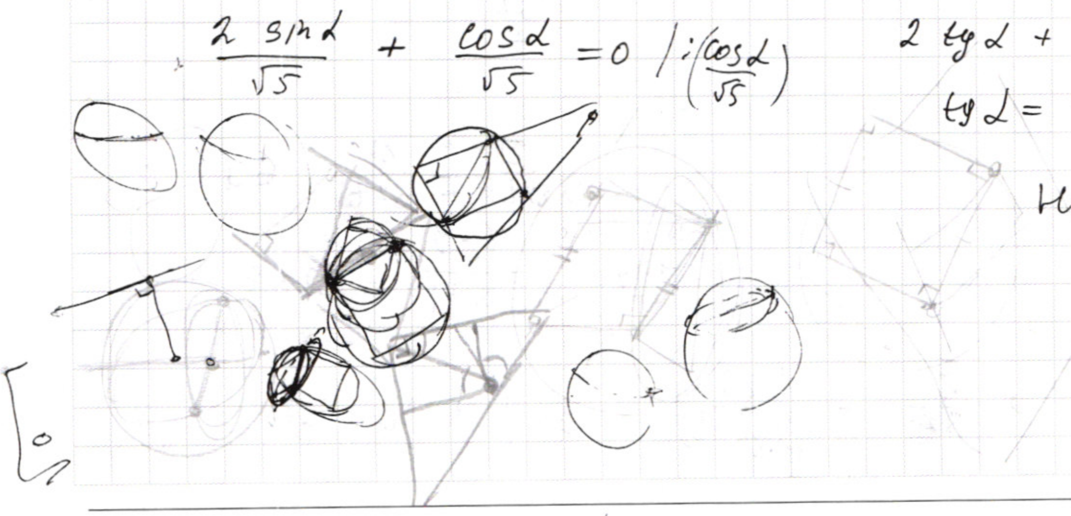
Т.к. $tg\,\alpha$ определён, то $\cos\alpha\neq0\Rightarrow\sin(\alpha+2\beta)=0$

$\sin\alpha\,\underline{\cos2\beta}+\cos\alpha\sin2\beta=0$

$\frac{2\sin\alpha}{\sqrt5}+\frac{\cos\alpha}{\sqrt5}=0\ \Big|:\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt5}\right)$ $\qquad 2\,tg\,\alpha+1=0$

$tg\,\alpha=\frac{-1}{2}<3$.

Не подходит



☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$25 - 9b^2 + 4b^2 = 5ab$

$5 - b^2 = ab$

$a(a-5b)$ $\quad 5b^2 = 25 - 5ab$

$b^2 = 5 - ab$

$\sin(x) - \sin(y) = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) =$

$= \cancel{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} + 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$

$+ \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

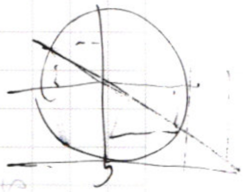
$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5}$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) =$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$

$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) +$

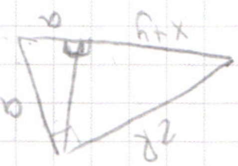
$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$



$\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

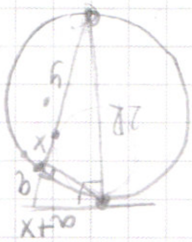
$= 2\sin(2\alpha + 2\beta)$

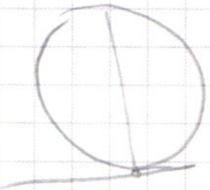


$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)$

$2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt5} \cos 2\beta = 4$





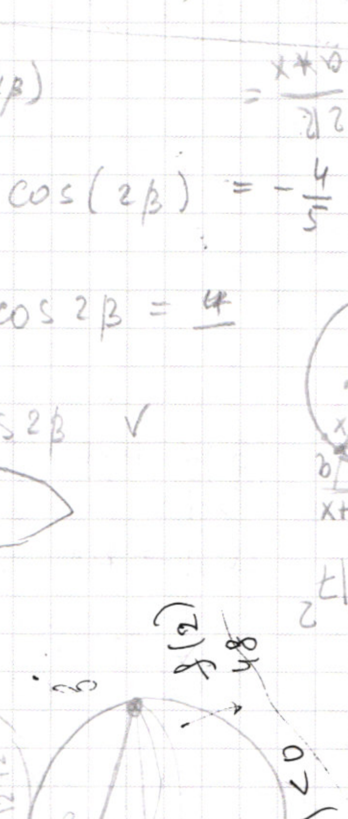
$\cos 2\beta \ \vee$

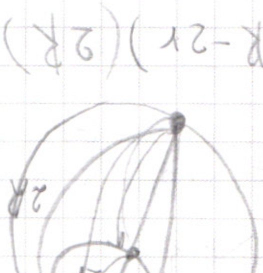
ну и всё

$5 - b^2 > 0$

$5 > b^2$

$\left(\frac{5-b^2}{b}\right)$





$b^2(b+10) = 25$

$25 < 5(b+10)$

$5 < b+10$

$b^2 < 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) - \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$\log_2 a = 3$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$3 + \frac{1}{2x+1.5}$

$5^{1+\log_{12}13 - \log_{12}12}$ $\quad a = 12$

$= \log_{12}\frac{13}{12}$

$f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

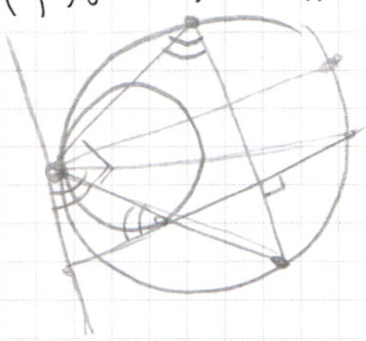
$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$f(x) < f(y)$

$f(x) - f(y) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = 0$

$\sin 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$ $\quad \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)