МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(t) = f(t\cdot 1) = f(t) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$0 = f(1) = f(t\cdot \frac{1}{t}) = f(t) + f(\frac{1}{t}) \Rightarrow f(\frac{1}{t}) = -f(t)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$

Если $f(x)=0$, то $f(y)$ должна ~~рав~~ быть ≥ 1:

1) $f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{2;3;4;6;8;9;12;16;18;24\}$ – ~~ук~~ – 10 элементов

$y \in \{5;7;10;11;13;14;15;17;19;20;21;22;23;25\}$ – 14 элементов

2) $f(x)=1 \Leftrightarrow x \in \{5;7;10;14;15;20;21\}$ – 7 элементов

y принадлежит мн-ву из п. 1 \ множество x из этого пункта – 7 элементов

3) $f(x)=2 \Leftrightarrow x \in \{11;22;25\}$ – 3 элемента

$\exists y$ – 4 элемента

4) $f(x)=3 \Leftrightarrow x=13$

$\exists y$ – 3 элемента

5) $f(x)=4 \Leftrightarrow x \in \{17;19\}$ – 2 элемента

$y=23$

Всего пар $(x;y)$:

$10\cdot 14+7\cdot 7+3\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1=206$

Ответ: 206 пар.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Пусть $t = 10x - x^2$:

$t+|-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ | $\log_3 t$ определён $\Rightarrow t>0$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

Пусть $m = \log_3 t$:

$3^m+4^m \geq 5^m$

При $m=2$ достигается равенство

При $m<2$ неравенство выполняется

~~$m \in (-\infty; 2]$~~

$m \leq 2$

Вернёмся к t:

$\log_3 t \leq 2$

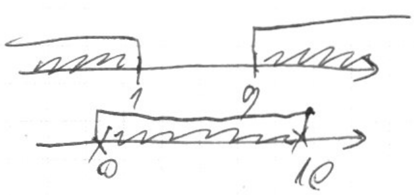
$$\begin{cases} t \leq 9 \\ t > 0 \end{cases}$$

Вернёмся к x:

$$\begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-9) \geq 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

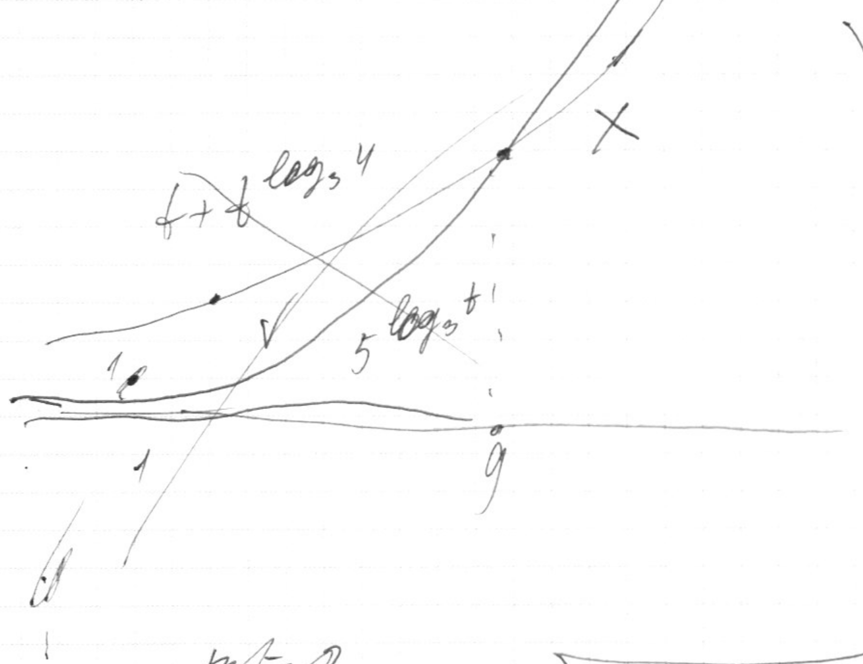
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{f'(t) = 1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 \frac{3}{4}}}$

$\cancel{g'(t) = 5^{\log_3 t}}$?



$\begin{cases} x \in (0;10) \\ (x-9)(x-1) \geq 0 \end{cases}$

$x \in (0;1] \cup [9;10)$

$m = 2$

$t = 9$

$m \in [0;2]$

$t \in (0;9]$

$x(10-x) \in (0;9]$

$\cancel{0 < x(10-x) \leq 9}$

$\begin{cases} x(x-10) < 0 \\ x(10-x) \leq 9 \end{cases}$

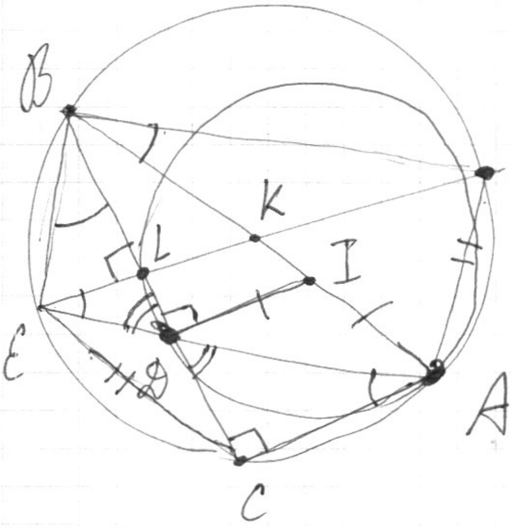
$\begin{cases} x \in (0;10) \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:
Ω, w - окр.
R - рад. Ω
r - рад. w
$R > r$
$\Omega \cap w = A$
AB - диам. Ω
~~BC~~ $C \in \Omega$
$BC \cap w = D$
$AD \cap \Omega = E$
$EF \perp BC$
$F \in \Omega$
$CD = \frac{15}{2}$
$BD = \frac{17}{2}$

$r = ?$
$R = ?$
$\angle AFE = ?$
$S_{AEF} = ?$



1. Д.п.: I - центр. w
2. BA - диаметр. $\Rightarrow \angle BCA = 90°$
3. $\angle B$ - общ.
$\angle BDI = 90°$ (рад. к кас.)
$\angle BCA = 90°$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle IBD$:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BA}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BI + r}$$

$$\frac{17}{32} = \frac{BI}{BI + r}$$

$$BI = \frac{17}{15} r$$

4. $BA = BI + AI$

$$2R = \frac{17}{15} r + r$$

$$R = \frac{16}{15} r$$

5. $\triangle ABC \sim \triangle FBD$:

$$\frac{AC}{FD} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{AC}{r} = \frac{32}{17}$$

$$AC = \frac{32}{17} r$$

6. $\triangle ABC$:

По теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\left(\frac{32}{15} r\right)^2 = 16^2 + \left(\frac{32}{17} r\right)^2$$

$$\left(\frac{32}{15} - \frac{32}{17}\right)\left(\frac{32}{15} + \frac{32}{17}\right) r^2 = 256$$

$$\frac{32 \cdot 2}{15 \cdot 17} \cdot \frac{32^2}{15 \cdot 17} r^2 = 256$$

$$\frac{2^{16} r^2}{255^2} = 2^8$$

$$r^2 = \frac{255^2}{2^8}$$

$$r = \frac{255}{16}$$

7. $R = \frac{16}{15} r = \frac{255}{15} = 17$

8. Д.п.: $BC \cap EF = L$

$EF \cap AB = K$

9. $\left.\begin{aligned} &\angle ADC = \angle LDE \\ &\angle ACD = 90^\circ = \angle ELD \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ELD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle LED$

$$\frac{AD}{ED} = \frac{CD}{LD}$$

10. $\underset{(\text{на 1 дугу})}{\angle FBA = \angle FEA} = \underset{(\text{на 1 дугу})}{\angle CAE = \angle CBE}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11. п.10 $\Rightarrow AF = CE$

12. $\angle ABC = \arccos \frac{BC}{AB} = \arccos \frac{16}{17}$.

~~13. В $\triangle ACD$:~~
~~По теореме Пифагора:~~

13. $\angle CAD = \operatorname{arctg} \frac{DC}{AC} = \operatorname{arctg} \frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 32 \cdot 5}$ $=$

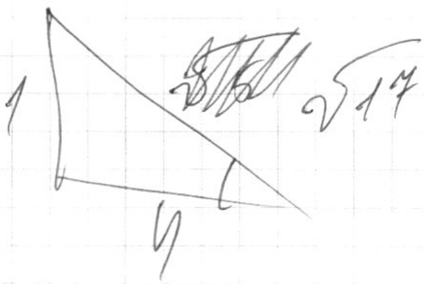
$= \operatorname{arctg} \frac{255}{4 \cdot 255} = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$

14. $\underset{(\text{на 1 дугу})}{\angle EFA =} \angle EBA = \angle EBC + \angle ABC =$

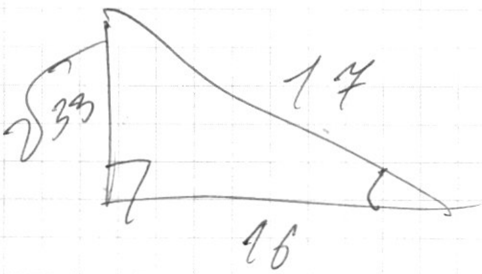
$= \angle CAD + \angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arccos \frac{16}{17} =$

$= \arccos \frac{4\sqrt{17}}{17} + \arccos \frac{16}{17} = \arccos \frac{(64-\sqrt{33})\sqrt{17}}{289}$.

Ответ: $\frac{255}{16}$; 17; $\arccos \frac{(64-\sqrt{33})\sqrt{17}}{289}$.



arccos $\frac{4\sqrt{17}}{17}$



~~cos~~

$\cancel{4\sqrt{17}\cdot 16}$

$$\frac{4\sqrt{17}\cdot 16}{17^2} - \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{\sqrt{33}}{17} =$$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

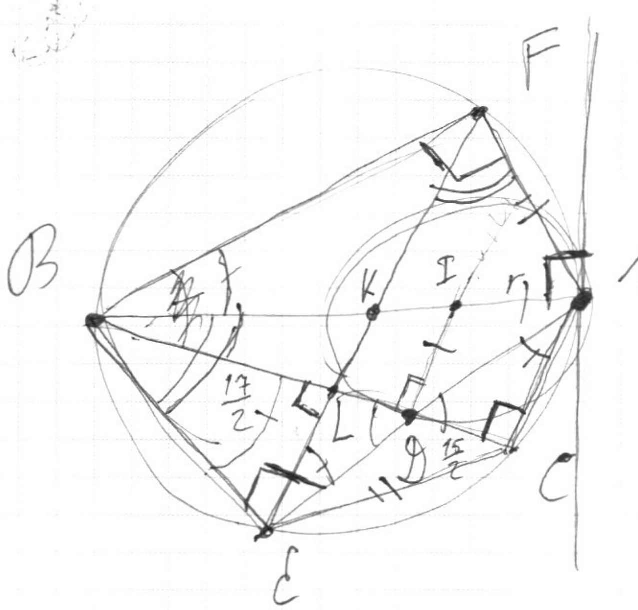
$$\frac{255}{1\cancel{2}6}\cdot\frac{32}{17} =$$ $15\cdot 2 = 30?$

$$\sqrt{289-256} = \sqrt{33}$$

$$= \frac{4\sqrt{17}\cdot 16 - \sqrt{33}\cdot\sqrt{17}}{17^2} = \frac{(64-\sqrt{33})\sqrt{17}}{289}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\triangle BAC \sim \triangle BID$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BI+r}$$

$$\frac{17}{32} = \frac{BI}{BI+r}$$

$$17BI + 17r = 32BI$$

$$BI = \frac{17}{15}r$$

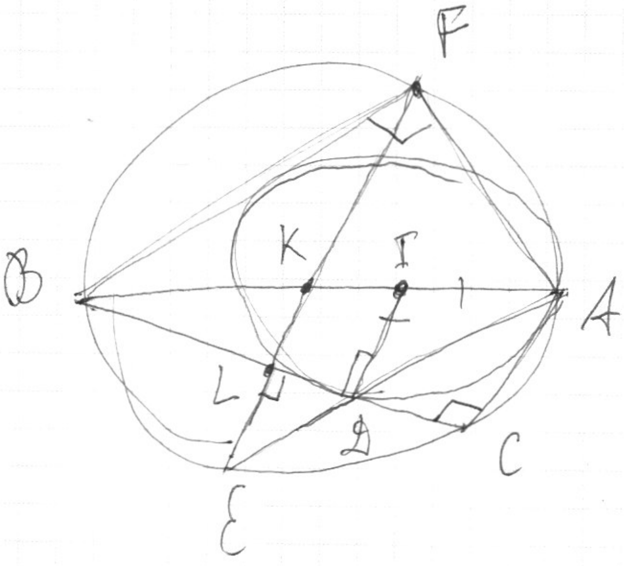
$$2R = r + \frac{17}{15}r = \frac{32}{15}r$$

$$R = \frac{16}{15}r$$

$\triangle BAC \sim \triangle BID$:

$$\frac{AC}{r} = \frac{32}{17}$$

$$AC = \frac{32}{17}r$$



$$\left(\frac{\cancel{16}\,32}{15}r\right)^2=\left(\frac{32}{2}\right)^2+\left(\cancel{32}\,\frac{32}{17}r\right)^2$$

$$\left(\frac{\cancel{16}\,32}{15}r\right)^2-\left(\frac{32}{17}r\right)^2=\frac{\cancel{32}\,1024}{4}$$

$$\left(\frac{\cancel{16}\,32}{15}r\right)^2-\left(\frac{32}{17}r\right)^2=256$$

$$\left(\frac{\cancel{16}\,32}{15}-\frac{32}{17}\right)\left(\frac{\cancel{16}\,32}{15}+\frac{32}{17}\right)r^2=256$$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 15 \\ \hline +\,85 \\ 170 \\ \hline 255 \end{array}$$

$$\frac{32\cdot 2}{15\cdot 17}\cdot\frac{32\cdot 32}{15\cdot 17}\cdot r^2=256$$

$$\frac{2^{16}\,r^2}{255}=2^8$$

$$r^2=\frac{255}{2^8}$$

$$\boxed{r=\frac{\sqrt{255}}{16}}$$

$$\boxed{R=\frac{\sqrt{255}}{15}}$$

$$AC=\sqrt{BA^2-BC^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{256}{225}\cdot 4-256}=$$

$$=$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$2 \le x \le 25$ $\frac{1}{25} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) + f(1)$$

$\Downarrow$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$ $\Rightarrow$ $f(2x) = f(x)$
$f(3) = 0$ $\quad f(3x) = f(x)$
$f(5) = 1$ $\quad f(5x) = f(x) + 1$
$f(7) = 1$ $\quad f(7x) = f(x) + 1$
$f(11) = 2$ $\quad \vdots$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$ $\quad f(23x) = f(x) + \cancel{2}5$

если $x \in \mathbb{N}$
$f(x)$ можно посчитать, разложив на пр. мн.

~~$f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = f(1)$~~ ~~$f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2)$~~

~~$0 = f(1) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$~~

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$0=f(1)=f(y\cdot\frac{1}{y})=f(y)+f(\frac{1}{y})\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{y})=-f(y)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$ при $f(y)>f(x)$

~~$x=2$ | $y\in\{5;7;10;11;13;14;15;17;19;20;21;22;23;25\}$~~

~~$x=3$ | $y\in$ то же самое~~

~~$x=4$ | так же~~

~~$x=5$ | $y\in\{11;13;17;19;22;23\}$~~

~~$x=6$~~

$f(x)=3$ 1

~~$y\in x\in\{13$~~ $x=13$

$y\in\{17;19;23\}$ 3

$f(x)=4$ 2

$x\in\{17;19\}$

$y=23$ 1

дальше нет

$10\cdot 14+7\cdot 7+$

$+3\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1=$

$=140+49+12+3+2=$

$=208$

10

Если $f(x)=0$ ($x\in\{2;3;4;6;8;9;12;16;18;24\}$),

то $y\in\{5;7;10;11;13;14;15\ldots25\}$ 14

Если $f(x)=1$ ($x\in\{5;7;10;14;15;20;21\}$) 7, то

$y\in\{11;13;17;19;22;23;25\}$ 7

Если $f(x)=2$ ($x\in\{11;22;25\}$) 3

$y\in\{13;17;19;23\}$ 4

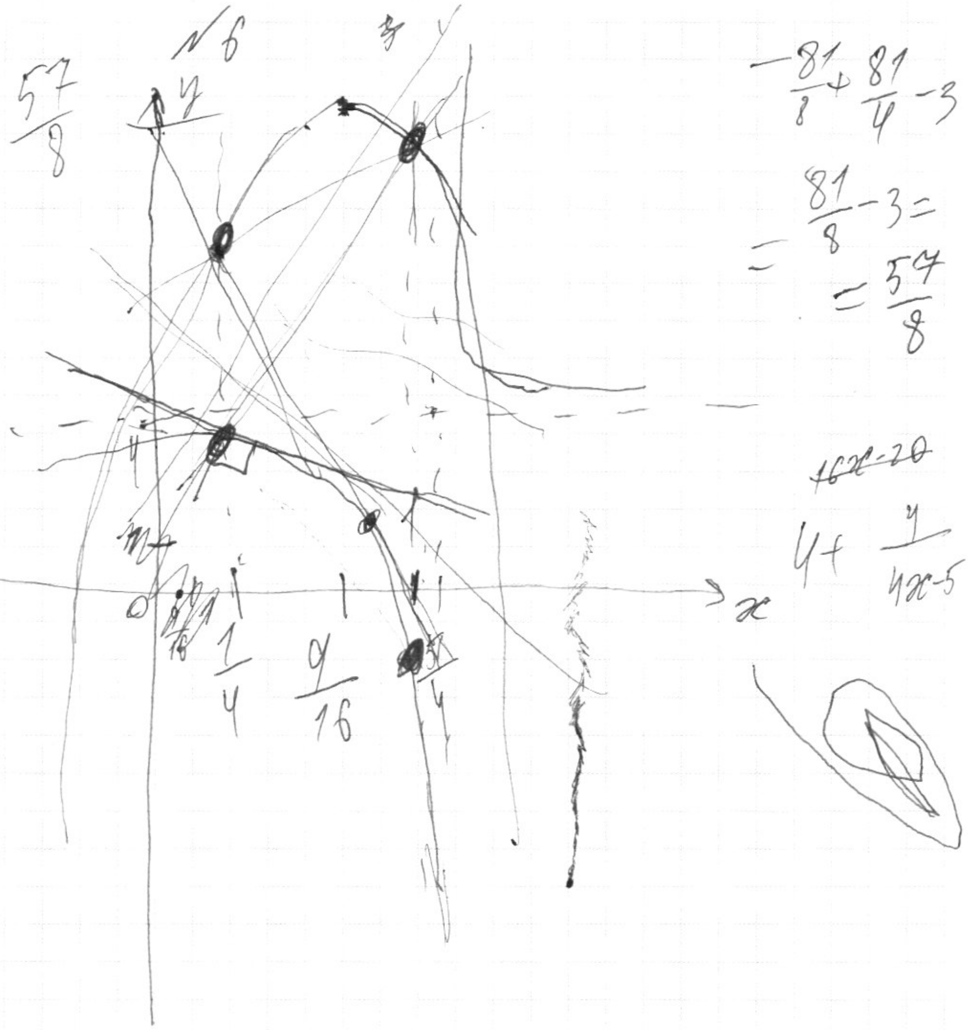
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6



$-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3=$

$=\frac{81}{8}-3=$

$=\frac{57}{8}$

$\cancel{\frac{1}{9}+\frac{1}{16} \vee \frac{1}{25}}$

~~$16x-20$~~

$4+\frac{7}{4x-5}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$

$=\frac{7}{12} \vee \frac{1}{5}$

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\cancel{\log}\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $t=$ ~~$10x-x^2$ x^2-10x~~ $10x-x^2$

~~$-t+|t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(-t)}$~~

$t+|-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \longrightarrow t>0$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

при $t=9$ равно

~~$t(1+t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq 5^{\log_3 t}$~~

~~$f(t)=t+t^{\log_3 4}$~~

~~$g(t)=5^{\log_3 t}$~~

Пусть $t=3^m$

$m=\log_3 t$:

$3^m+4^m \geq 5^m$ – 1 пересеч.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

1:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\cos 2\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta +$

$+ 2\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha - 2\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha =$

$= 2\cos\beta\cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) -$

$- 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\sin\beta + \cancel{\sin\beta}\cos\beta\sin\alpha) =$

$= 2(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) -$

$= 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)