МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\quad f(p) = [p/4]$ $\quad$ Заметим $f(1)=0$: $f(2)=[2/4]=0$.

$f(2)=f(2)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=0$ $\quad f(13)=3$
$f(2)=0$ $\quad f(14)=1$
$f(3)=0$ $\quad f(15)=1$
$f(4)=2f(2)=0$ $\quad f(16)=0$
$f(5)=1$ $\quad f(17)=4$
$f(6)=f(3)+f(2)=0$ $\quad f(18)=0$
$f(7)=1$ $\quad f(19)=4$
$f(8)=0$ $\quad f(20)=1$
$f(9)=0$ $\quad f(21)=1$
$f(10)=1$ $\quad f(22)=2$
$f(11)=2$ $\quad f(23)=5$
$f(12)=0$ $\quad f(24)=0$
$f(25)=2$. $\quad f(26)=3$ $\quad f(34)=4$

$f(10/2)=f(5)=f(10)+f(1/2) \Rightarrow$

$f(1/2)=f(10)-f(5)=0$

$f(1/2)=f(2)+f(1/4) \Rightarrow f(1/4)=0$

Аналогично $f(1/6)=f(1/8)=f(1/12)=f(1/16)=$

$=f(1/18)=f(1/24)=0$

$f(1/3)=f(1/6)=f(1/9)=f(1/12)=0$.

$f(1/5)=f(5)-f(25)=-1$. $\quad f(1/7)=-f(14)+f(2)=-1$ Аналогично

$f(1/10)=f(2)-f(20)=-1$ $\quad f(1/11)=-2$ $\quad f(1/13)=f(2)-f(26)=-3$

$f(1/14)=f(1/2)-f(7)=-1$ $\quad f(1/15)=f(2/3)-f(10)=-1$. $\quad f(1/17)=-4$

$f(1/19)=-4$ $\quad f(1/20)=-1$ $\quad f(1/21)=-1$ $\quad f(1/22)=-2$ $\quad f(1/23)=-5$

Итак $f(x/y)=f(x)+\cancel{f(y)}+f(1/y)<0$.

1. $f(x)=0$ $\quad y\in[-1;-5]$ – 13 варианта (5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23)
11 вариантов
$\boxed{11\cdot 13}$

2. $f(x)=1$ $\quad y\in[-2;-5]$ – 6 вариантов (11, 13, 17, 19, 22, 23)
7 вариантов
$\boxed{6\cdot 7}$

Ответ: 198

3. $f(x)=2$ $\quad y\in[-3;-5]$ – 4 варианта (13, 17, 19, 23)
2 варианта
$\boxed{2\cdot 4}$.

4. $f(x)=3$ $\quad y\in[-4;-5]$ 3 варианта (17, 19, 23)
1 вариант
$\boxed{3}$

5. $f(x)=4$ 2 вар. $\quad y\in -5$ ✓ 1 вар. (23) $\quad \boxed{2}$

~~черновик~~ ☑ чистовик $\quad$ Страница № 1
(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (3) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

Возведем в квадрат.

ОДЗ: $(x-2)(y-1)\geq 0$
$x-2y\geq 0$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \\ x^2+4y^2+x+2y-2-5xy=0. \end{cases} \Bigg| -$$

$$\begin{cases} 5y^2-5x-20y-10+5xy=0. & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(1): $\cancel{y^2+y(x-4)-(x+2)=0}$ $\quad y^2+xy-4y-x-2=0.\quad (xy-x-2y+2)+y^2-2y-4=0.$

$\cancel{D=x^2-8x+16}$ $\quad \cancel{x=\frac{2+4y-y^2}{y-1}}$ $\quad \boxed{(x-2)(y-1)+(y-1)^2=3.}$

~~Подставим полученное значение для x в (2)~~:

Подставим полученное значение $(x-2)(y-1)$ в (3)

$x-2y=\sqrt{3-(y-1)^2}$ $\quad x^2-4xy+4y^2=-y^2+2y-4.$

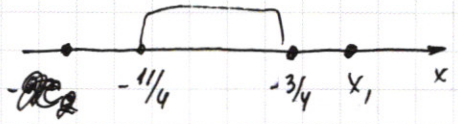
№6

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-17 \qquad x\in[-11/4;\,-3/4].$$

(1) $ax+b\leq -8x^2-30x-17.$

$8x^2+x(a+30)+b+17\leq 0.\quad D=a^2+60a+900-32b-544=a^2+60a+356-32b.$

$$\left[\begin{aligned} x_1&=\frac{-a-30+\sqrt{D}}{16} \\ x_2&=\frac{-a-30-\sqrt{D}}{16} \end{aligned}\right.$$



$$\begin{cases} -11/4\geq x_2 \\ -3/4\leq x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} -44\geq -a-30-\sqrt{D} \\ -12\leq -a-30+\sqrt{D} \end{cases} \quad \begin{cases} -14\leq a+\sqrt{D} \\ 18\leq -a+\sqrt{D} \end{cases}$$

$-32<2a$

$\boxed{a>-16}$

$\Downarrow$

$0<D<4+120+356-32b$

$232-32b>0$

$b<232/32.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

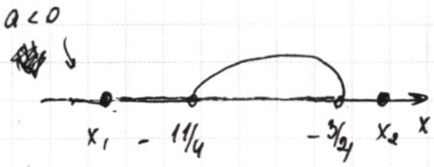
② $ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3}$

$\dfrac{4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11}{4x+3} \geq 0.$ $\quad x \in [-11/4; -3/4) \Rightarrow 4x+3<0.$

$4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11 \leq 0.$

$D = 16b^2+9a^2+144+24ab-96b-72a-16a(3b-11) = 16b^2+9a^2-24ab-96b+$
$+104a+144.$

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4b-3a+12+\sqrt{D}}{8a} \\ x_2 &= \frac{-4b-3a+12-\sqrt{D}}{8a} \end{aligned}\right.$$



$$\begin{cases} x_1 \leq -11/4 \\ x_2 > -3/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-4b-3a+12+\sqrt{D}}{2a} \leq -11 \\ \dfrac{-4b-3a+12-\sqrt{D}}{2a} \geq -3 \end{cases}$$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$

$=\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha.$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha.$

Пусть $2\alpha=a$ $\quad 2\beta=b.$

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$

$\sin(a+2b)=\sin a(2\cos^2 b-1)+2\sin b\cdot\cos b\cdot\cos a=2\sin a\cdot\cos^2 b\ \cancel{\ }-\sin a+2\sin b\cdot\cos b\cdot\cos a$

$=2\cos b\underbrace{(\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a)}_{\sin(a+b)=-\frac{1}{\sqrt5}.}-\sin a$

$\cancel{2\frac{\cos b}{\sqrt5}+\sin a=\frac{4}{5}}$ $\qquad$ $-\frac{2\cos b}{\sqrt5}-\cancel{\sin a}+\cancel{\sin a}=-\frac{4}{5}.$

$\boxed{\cos b=\frac{2\sqrt5}{5}}$ $\qquad$ $\left[\begin{aligned}&b=\arccos\frac{2\sqrt5}{5}+2\pi k\\&b=-\arccos\frac{2\sqrt5}{5}+2\pi k\end{aligned}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$

$\left[\begin{aligned}&\sin\left(2\alpha+\arccos\frac{2\sqrt5}{5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}\\&\sin\left(2\alpha-\arccos\frac{2\sqrt5}{5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}\end{aligned}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{aligned}&2\alpha=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\pm\arccos\frac{2\sqrt5}{5}+2\pi n\quad n\in\mathbb{Z}\\&2\alpha=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\pm\arccos\frac{2\sqrt5}{2}+2\pi n.\\&\cancel{2\alpha}=\end{aligned}\right.$

Заметим, что ~~arcsin~~ $\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2=1..$ $\cancel{\Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)=\arccos\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)}$

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\in\text{IV}$ четв. $\qquad$ $\Rightarrow \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\arccos\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)$

$\arccos\frac{2\sqrt5}{5}\in\text{I}$ четв.

$\cancel{①\ \alpha=\pi n}$

$\cancel{②\ \alpha=-\arccos\frac{2\sqrt5}{2}+\pi n.}$

$\cancel{①:\ \alpha=\pi n\Rightarrow\sin\alpha=0\Rightarrow tg\alpha=0.\ -\text{п.к.}}$

$\cancel{②\ \alpha=-\arccos\frac{2\sqrt5}{2}+\pi n.\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{\cos\alpha=\cos\alpha=\frac{2\sqrt5}{2}.}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 (продолжение)

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = \pi n & (1) \\ \alpha = -\arccos\frac{2\sqrt5}{5} + \pi n & (2) \\ \alpha = \pi/2 + \pi n & (3) \\ \alpha = \pi/2 + \arccos\frac{2\sqrt5}{5} + \pi n & (4). \end{array}\right.$$

(1): $\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$ - единств. знач. $\Rightarrow$ п.к.

(2): $\begin{cases} \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos\alpha = \mp\frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow tg\,\alpha = -1/2$ - единств. знач. $\Downarrow$ п.к.

(3): $\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg$ - неопр. $\Rightarrow$ п.к.

(4) ~~$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$~~ ; $tg\,\alpha = \pm 1/2$; ± 2.

~~$\begin{cases} \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} \sin\alpha = \\ \cos\alpha = \end{cases}$~~

Ответ: -2; $-1/2$; $1/2$; 2.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$ ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x^2+18x>0$ по ОДЗ $\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$.

Пусть $t = x^2+18x$, $t>0$.

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13} - t$

1) $t \geq 1$. $f(t) = t^{\log_{12}5}$. $\log_{12}5 < 1 \Rightarrow f(t)$ – убыв. ф-ия.

$g(t) = t^{\log_{12}13} - t$ $\log_{12}13 > 1 \Rightarrow t^{\log_{12}13} > t \Rightarrow g(t)$ – возраст. ф-ия.

$f(t) \geq g(t)$, значит если $f(t) = g(t)$, то такое t – единственное.

$t = 12^2$: $5^{\log_{12}12^2} = 13^{\log_{12}12^2} - 12^2$ – верно.

$t \in [1; 144]$

2) $t<1$: $f(t) = t^{\log_{12}5}$ $\log_{12}5 < 1 \Rightarrow f(t)$ – возраст. ф-ия

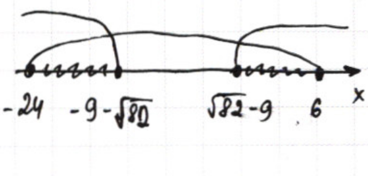
$g(t) = t^{\log_{12}13} - t$ $\log_{12}13 > 1 \Rightarrow t^{\log_{12}13} < t \Rightarrow g(t)$ – убыв. ф-ия

$f(t) \geq g(t)$, значит если $f(t) = g(t)$, то такое t – единств.

$t = 12^2$, но $t<1$ ~~этого~~ значит неравенство не будет выполнено при $t<1$

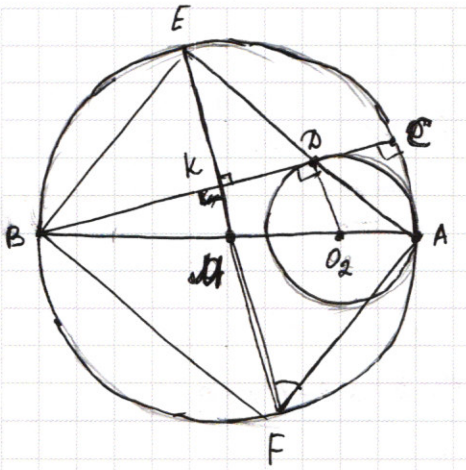
Обратная замена: $1 \leq x^2+18x \leq 144$ $\begin{cases} x^2+18x-1 \geq 0 \\ x^2+18x-144 \leq 0. \end{cases}$ $D = 324+4 = 328.$ $D/4 = 81+144 = 225 = 15^2.$

$\begin{cases} (x+9+\sqrt{82})(x+9-\sqrt{82}) \geq 0 \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in [-24; -9-\sqrt{82}] \cup [\sqrt{82}-9; 6]$

№4



Дано:

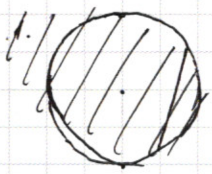
$CD = 8$

$BD = 17$

$r, R, \angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

Решение:



1. $AC = DC$ (отр. касат.) $= 8$.

2. $\angle BCA$ - опир. на диам. $AB \Rightarrow \angle BCA = 90°$

3. BC касат. $\omega \Rightarrow O_2D \perp BC$

4. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по 2-м угл.) $\Rightarrow \frac{DO_2}{AC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{r}{8} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{17+8}$ $\boxed{r = \frac{17 \cdot 8}{25}} = \frac{136}{25}$.

$R = \frac{25r}{2(25-17)} = \frac{136}{2 \cdot 8} = \boxed{\frac{17}{2}}$.

~~5. $\angle EKD = 90°$ ($EF \perp BC$)~~

6. BEAF - квадр. $\Rightarrow \angle EFA = 45°$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad x \in \left[-\tfrac{11}{4}; -\tfrac{3}{4}\right)$$

$$\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3} & (1) \\ ax+b \le -8x^2-30x-17 & (2) \end{cases}$$

(1): $\frac{4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11}{4x+3} \geq 0$

$x \in \left[-11/4; -3/4\right) \Rightarrow 4x+3<0$

$4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11 \le 0.$

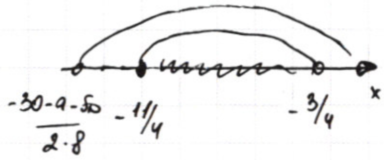
$D = 16b^2+9a^2+144+24ab-96b-72a-16a(3b-11)$

$= 16b^2+9a^2-24ab-96b+104a+144$

(2): $8x^2+x(30+a)+b+17 \le 0.$

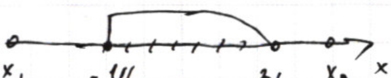
$D = 900+60a+a^2-32b-544 \geq 0. \quad = a^2+60a+356-32b \geq 0.$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-30-a+\sqrt{D}}{8\cdot 2} \\ x_2 = \dfrac{-30-a-\sqrt{D}}{8\cdot 2} \end{cases}$$



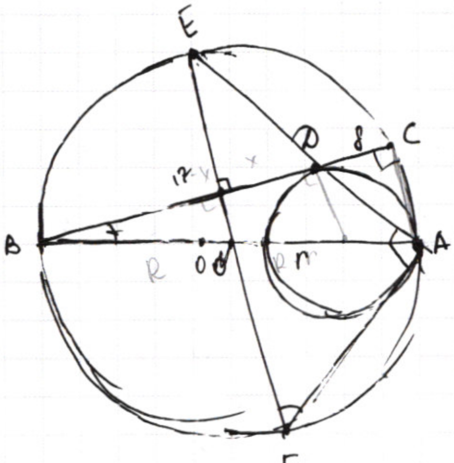
(1): ~~4ax~~ $4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11) \le 0.$

$x_1 =$
$x_2 =$



BEAF - квадр. / прямоуг.

$\frac{17}{17+8} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{r}{8}$



$O_1D \parallel AC$

$CD = 8$

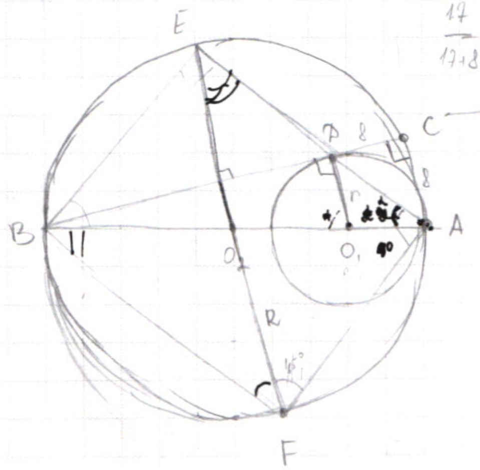
$BD = 17$

$r, R - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$



Эл 25.

5) $f(2)=0$ $\quad f(13)=3$ $\quad f(24)=0.$ $\quad f(25)=2.$ $\quad 13,$

$f(3)=0$ $\quad f(14)=1$ $\quad f(1)=0.$

$f(4)=0$ $\quad f(15)=1$

$f(5)=1$ $\quad f(16)=0$

$f(6)=0$ $\quad f(17)=4$

$f(7)=1$ $\quad f(18)=0$

$f(8)=0$ $\quad f(19)=4$

$f(9)=0$ $\quad f(20)=1$

$f(10)=1$ $\quad f(21)=1$

$f(11)=2$ $\quad f(22)=2$

$f(12)=0$ $\quad f(23)=5$

$f(1/2)=f(1/4)=f(3/6)=f(1/8)=f(1/12)=f(1/16)=f(1/18)=\cancel{f}\ 0.$

$f(1/3)=f(1/6)=f(1/9)=f(1/12)=\cancel{1}\ 0$

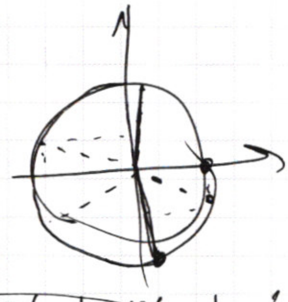
$\cancel{f(\ldots)}=f\left(\frac{25}{5}\right)=f(5)=f(25)+f(1/5) \Rightarrow \boxed{f(1/5)=-1.}$

$\cancel{f(14/7)=\ldots}$

$f(14/7)=f(2)=f(14)+f(1/7) \Rightarrow \boxed{f(1/7)=-1.}$

$f(15/10)=f(3/2)=0=f(15)+f(1/10) \Rightarrow \boxed{f(1/10)=-1}$ $\qquad f(22/11) \Rightarrow f(1/11)=f(2)-f(22)=-2.$

2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2y)^2-4x-18y+4xy+5y^2-12=0. \end{cases}$



$\cancel{x^2-4x-18y+9y^2-12 \mid x-2y}$

$\cancel{5y^2+4xy-18y-4x-12=4x(y-1)+5y(y-1)-13y-12=4x(y-1)+5y(y-1)-13(y-1)}$!

$\cancel{(x-2y)^2=x^2+4y^2-4xy}$

$5y^2+4xy-18y-\cancel{4x}-12=4x(y-1)+5y(y-1)-13y-12=(4x+5y-13)(y-1)-25.$

$-13(y-1)-25$

$\begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2y)^2=(13-5y-4x)(y-1)+25. \end{cases}$ $\quad$ (?) $\qquad \cancel{f(2/13)}=$

$f($

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0. \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0. \end{cases}$ $\quad \cancel{5y^2+5xy-5x}$ $\qquad f(7/14)=f(7)+f(1/14)=f(1/2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$ $\qquad 10/15=f(10)$

$5xy+5y^2-5x-20y-10=0.$

$y^2-4y+xy-x-2=0.$ $\qquad D=x^2-8x+16+4x+8.$

$324 \,|\, 4 \quad 32.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \vee \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\qquad y^2+y(x-4)-(x+2)=0$ $\qquad D=x^2-4x+24.$

$2 \vee 3$

$<$

$t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13}(-t)$ $\qquad 11\cdot13+6\cdot7+2\cdot4+5$

$144=18\cdot8.$

$144=12\cdot12$ $\qquad 143+\underbrace{42+8}_{50}+5.$

$144=9\cdot16.$

$18\cdot8=9\cdot16$

$=6+12$

$15 \times 15 = 225$ $\qquad 18 \times 18 = 144 + 18 = 324$ $\qquad 6$

$D/4=81+1=82$ $\qquad 9$ $\qquad \cancel{1}\ 198.$

$y^2-4y-2.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

6] $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

~~Отв:~~

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2-30x-17$

32 120 68 24 90 51 100+70.

$\frac{4\cdot 8x^3+30\cdot 4x^2+17\cdot 4x+8\cdot 3x^2+3\cdot 30x+17\cdot 3+12x+11}{4x+3} \le 0.$

$\frac{32x^3+144x^2+170x+62}{4x+3} \le 0.$ $\frac{16x^3+72x^2+85x+31}{4x+3} \le 0.$

$\frac{12x+11-4ax^2-4bx+3ax-3b}{4x+3} \le 0.$ $4ax^2$

$\wedge 0$

5] $f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=[p/4]$ $1\le x\le 24$ $1\le y\le 24$. $x,y\in \mathbb{N}$.

простое число!

$f(x/y)<0$ (?)

$f(x/y)=f(x)+f(1/y)$ ~~$f(x)=[x/4]\ge 0$ Для всех $x\in[1;24]$.~~

Значит $f(x/y)=$ ~~$f(x)+f(1/y)$~~ <0 ~~При~~ $[1/4y] < -f(x)$

~~$[1/4y] = 0$ При всех $y\in[1;24]$.~~ $\Rightarrow [x/4]=0.$ $(xy-x-2y+2)+y^2-2y-4.$

$f(1)=0$

$f(2)=0$ ~~$f(2x)$~~ ~~$=(x-1)$~~!

$f(3)=0$ $y^2+xy-4y-x-2=0.$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$ $f(x/y)=f(x)+f(1/y)$ ~~$(y-2)^2+xy-x-6$~~. ?

$f(5)=1$

$f(6)=f(3)+f(2)=0.$ ~~$f(1/2)=f(2/4)=f(2)+f(1/4)=f(1/4)$~~ $=f(3/6)=f(3)+f(1/6)$

$f(7)=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=2f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1.$ $f(10/2)=f(5)=1=f(10)+f(1/2).f(1/4)$ ~~$(x-2)(y-1)+(y-2)^2$~~ $=8.$

$f(11)=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

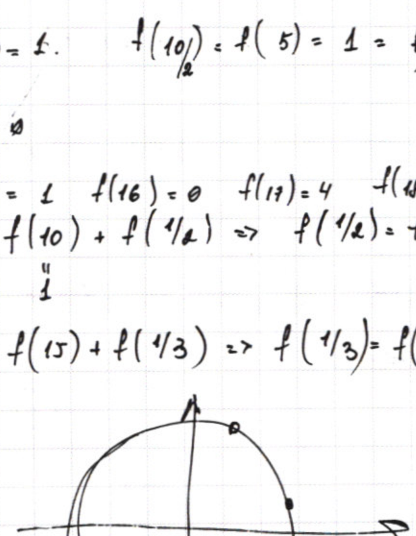
$f(13)=3$

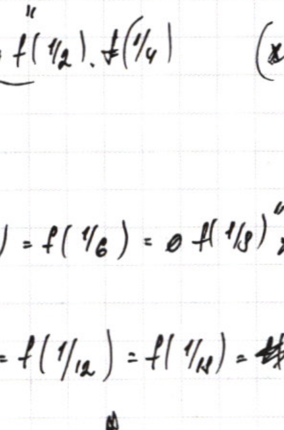
$f(14)=1$ $f(15)=1$ $f(16)=0$ $f(17)=4$ $f(18)=0$

$f\left(\frac{10}{2}\right)=f(5)=f(10)+f(1/2) \Rightarrow f(1/2)=f(1/4)=f(1/6)=0$ $f(1/8)$

$f\left(\frac{15}{3}\right)=f(5)=f(15)+f(1/3) \Rightarrow f(1/3)=f(1/9)=f(1/12)=f(1/18)=0$

$f($





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha = \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot$

$\cdot\cos 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta\underbrace{(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha)}_{\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}} - \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha$

$6\cdot 12$ $\quad 12\cdot 8$

$$\begin{array}{r} 16\\ \times\ 11\\ \hline 176\\ -\ 72\\ \hline 104\end{array}$$

$\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

№ 2

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \ (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \ (2)\end{cases}$ Возведем в квадрат (1)

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geq 0$
$x-2y\geq 0$
$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$
$(x-2)(y-1)\geq 0$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2\\ x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y=2\\ x^2+9y^2-4x-18y=12.\end{cases}$ $\quad 4b+3a-12$

$\begin{cases}(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)\end{cases}$

$8x^2+x(30+a)+17+b\leq 0.$

$D = 900+60a+a^2-17\cdot 8\cdot 4-4\cdot 8\cdot b.$

№ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$ $\quad$ ОДЗ: $x^2+18x>0$

По ОДЗ $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x.$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}.$ Пусть $t=x^2+18x$ $\boxed{t>0}$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$ $\quad \log_{12}(12\cdot5\cdot13)$

$$\begin{array}{r} 17\\ \times\ 32\\ \hline 34\\ +\ 51\\ \hline 544\end{array}$$

$t=12^2$ $\quad 5^2+12^2\geq 13^2.$ $\quad \boxed{t\leq 12^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)