МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} + 2\,\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \Rightarrow 2\,tg\,\alpha + 2 - 2\,tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha \Rightarrow$$

$(1+tg^2\alpha>0)$

$$\Rightarrow tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 3 = 0 \Rightarrow (tg\,\alpha+1)(tg\,\alpha-3) = 0 \Rightarrow$$

	1	−2	−3
−1	1	−3	0

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$

№3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)} \Rightarrow 10x - x^2 + |10x-x^2|^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$$

Пусть $t = 10x - x^2 \leq (x_0 = 5 \Rightarrow t_0 = 50-25 = 25)$; $t \leq 25 \Rightarrow$

$$\begin{cases} t + |t|^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geq 0 \\ t > 0 \\ t \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 25 \\ t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $f(t) = t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \Rightarrow f'(t) = 1 + \log_3 4\cdot t^{\log_3\frac{4}{3}} - \log_3 5\cdot t^{\log_3\frac{5}{3}}$ на.

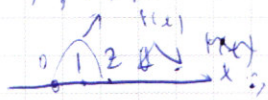
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

$1 + \log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}} + \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}}$. $f''(t) = \log_3 4 \cdot \log_3 \frac{4}{3}\, t^{\log_3 \frac{4}{9}} - \log_3 5 \cdot \log_3 \frac{5}{3} \cdot t^{\log_3 \frac{5}{9}}$ ≥ 0 ...; $\log_3 4 < \log_3 5$, $\log_3 \frac{4}{3} < \log_3 \frac{5}{3}$, $\log_3 \frac{4}{9} < \log_3 \frac{5}{9}$, при $t > 1$

$f''(t) < 0 \Rightarrow$ в какой-то момент $f'(t) < 0 \Rightarrow$  $\Rightarrow$

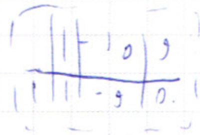
$\Rightarrow$ решений $f(t) = 0$ ≤ 2.

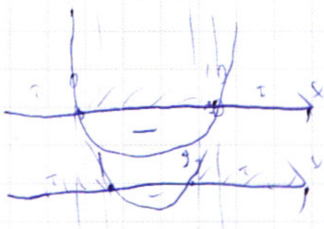
Δ $t = 0$: $0 + 0^{\log_3 4} - 0^{\log_3 5} = 0$ – верно.

Δ $t = 9$: $9 + 9^{\log_3 4} - 9^{\log_3 5} = 9 + 3^{\log_3 16} - 3^{\log_3 25} = 9 + 16 - 25 = 0$ – верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\forall\, 0 < t \leq 9$: $t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$, но $0 < t \leq 25 \Rightarrow$

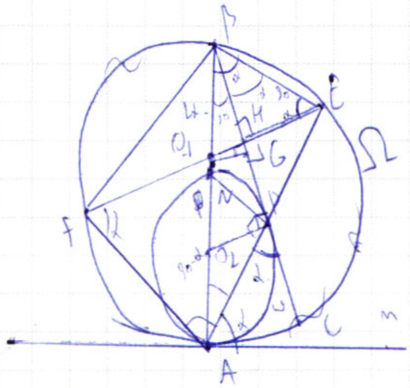
$\Rightarrow 0 < t \leq 9$. Вернёмся к исходной переменной.

$0 < 10x - x^2 \leq 9 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x < 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-10) < 0 \\ (x-1)(x-9) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ 

$\Rightarrow$  $\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$

№ 4.



Дано: $BD = \frac{17}{2}$, $DC = \frac{15}{2}$, Am – кас $(\omega; \Omega)$, BD – кас (ω), AB – D(Ω)

Найти: $R_{\Omega} (R_1) = ?$, $R_{\omega} (R_2) = ?$, $\angle AFE = ?$, $S_{AEF} = ?$

Решение:

O_2A, $O_1A \perp Am \Rightarrow O_2 \in AB$. $O_1G \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow G$ – сер BC ($R \perp$ хорде) $\Rightarrow BG = GC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(BD + DC) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{2} + \frac{15}{2}\right) = 8$.

$\triangle O_2DB \sim \triangle O_1GB$ (по 2-м $\angle$): $\frac{O_2B}{O_1B} = \frac{BD}{BG}$, по т-ме кас:

$BD^2 = BN \cdot BA \Rightarrow \frac{2R_1 - R_2}{R_1} = \frac{\frac{17}{2}}{8}$, $\frac{17^2}{2^2} = 2R_1(2R_1 - 2R_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 32R_1 - 16R_2 = 17R_1 \\ R_1(R_1 - R_2) = \frac{17^2}{4^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{16}{15} R_2 \\ R_1(R_1 - R_2) = \frac{17^2}{4^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{16}{15} R_2 \\ \frac{16}{15^2} R_2^2 = \frac{17^2}{16} \end{cases} \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{16}{15} R_2 \\ R_2^2 = \frac{15^2 \cdot 17^2}{16^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{16}{15} R_2 \\ R_2 = \frac{15\cdot 17}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 17 \\ R_2 = \frac{15 \cdot 17}{16} \quad \left(= 16 - \frac{1}{16} = 15{,}9375\right) \end{cases}$,

$\angle BO_2D = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{O_2D}{O_2B} = \frac{R_2}{2R_1 - R_2} = \frac{\frac{15\cdot17}{16}}{2\cdot 17 - \frac{15\cdot 17}{16}} = \frac{15}{17} \Rightarrow \angle AO_2D = 180^\circ - \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (по т. косин.) $AD^2 = 2R_2^2 - 2R_2^2\cos(180^\circ - \varphi) = 2R_2^2(1+\cos\varphi) = 2\cdot\frac{15^2\cdot 17^2}{16^2}\left(1+\frac{15}{17}\right) =$

$= \frac{15^2}{2^2}\cdot 17 \Rightarrow AD = \frac{15}{2}\sqrt{17}$. , $\angle FAM = \alpha = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \angle AND = \alpha = \angle AFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(\angle AFE) = \sin\alpha = \sin(\angle AND) = (\angle ADN - \llcorner$ (опир. на $D(\omega)$)) $\frac{AD}{AN} = \frac{\frac{15}{2}\sqrt{17}}{2\cdot R_2} =$

$= \frac{\frac{15}{2}\sqrt{17}}{2\cdot\frac{15\cdot 17}{16}} = 4\frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(4\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$, $\angle AEB - \llcorner$ (опир. на $D(\Omega)$)

$\angle ADC = \overset{\frown}{AD}\cdot\frac{1}{2} = \alpha$, $\angle BAM - \llcorner$ (R к кас.) $\Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha$, $\angle ADB = 180 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABD = 180 - 90 + \alpha - 180 + \alpha = 2\alpha - 90$, $\angle ABE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} = \alpha \Rightarrow \angle HBE = \alpha - 2\alpha + 90 =$

$= 90 - \alpha \Rightarrow \angle FEB = \alpha$ $(\angle BHE - \llcorner) \Rightarrow BE \parallel FA$, и $\Rightarrow \angle FAE = 180^\circ - 90^\circ = 90$

(опирается) $\Rightarrow FE - D(\Omega)$, $\triangle ADN \sim \triangle ABE$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AD\cdot\frac{2R_1}{2R_2} = \frac{15}{2}\sqrt{17}\cdot\frac{17}{\frac{15\cdot 17}{16}} = 8\sqrt{17}$, $\angle FBE = \angle BEA = \angle EAF = \angle AFB = 90^\circ$

(опир. на $D(\Omega)$) $\Rightarrow AEBF - \square \Rightarrow AF = BE$, $=$ (по т. Пиф.) $\sqrt{4R_1^2 - AE^2} =$

$= \sqrt{4\cdot 17^2 - 8^2\cdot 17} = \sqrt{17}\sqrt{68 - 64} = 2\sqrt{17}$, $S_{AFE} = \frac{1}{2}AF\cdot AE \Rightarrow S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot 8\sqrt{17} =$

$= 8\cdot 17 = 136$

Ответ: $R_1 = 17$, $R_2 = 15{,}9375$, $\angle AFE = \arcsin\left(4\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$, $S_{AFE} = 136$.

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = [p/4]$ $\quad 2 \le x, y \le 25$ $\quad f(x/y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(p_1p_2) = f(p_1) + f(p_2) \Rightarrow f\left(\frac{p_1p_2}{p_1}\right) = f(p_2) = f(p_1p_2) + f\left(\frac{1}{p_1}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p_1}\right) = -f(p_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$

Δ $\forall z \in P$, $2 \le z \le 25$.

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4$,

$f(19) = 4$, $f(23) = 5$.

Δ z, $2 \le z \le 25$:

$f(z)$:

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(z)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	0	4	0	4	1	1	2	5

24	25
0	2

~~Н~~ ~~Фигат~~ Кол-во $f(y) > f(x)$ рассчитываем следующим образом ($\cancel{A}$ $f(y) = a \Rightarrow$ ~~Н~~ Кол-во = (Кол-во "y" при кот. $f(y) = a$) (Кол-во $f(x)$) $< a$)).

$N = \underset{(\text{для } a=1)}{7 \cdot 10} + \underset{(\text{для } a=2)}{3 \cdot 17} + \underset{\dots}{1 \cdot 20} + 2 \cdot 21 + 5 \cdot 23 = 70 + 51 + 20 + 42 + 115 =$

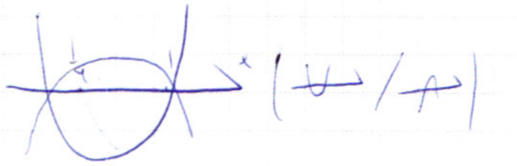
$= 298$

Ответ: 298

№6.

$\frac{16x - 16}{4x - 5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$ $\qquad x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

$\begin{cases} ax + b \ge \frac{16x - 16}{4x - 5} \quad (x \in [\frac{1}{4}; 1] \Rightarrow 4x - 5 < 0) \\ ax + b \le -32x^2 + 36x - 3 \end{cases} \Rightarrow$ ~~a~~ тогда: $\begin{cases} 4ax^2 + (4b - 5a - 16)x - 5b + 16 \le 0 \quad \mathrm{I} \\ \text{~~и~~} \\ 32x^2 - (36 - a)x + 3 + b \le 0. \quad \mathrm{II} \end{cases}$



I: ($\cup$ / $\cap$) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \begin{cases} a \cdot f(\frac{1}{4}) \le 0 \\ a \cdot f(1) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(\frac{1}{4}) \le 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases} \end{cases}$ $(\mathrm{I} - f(x))$ ((г. коэфф.) (4 не влияет)) (При $a < 0$, интересуют параметры, предотвр. решений)* $\Rightarrow$

II: $(\mathrm{II} - g(x))$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

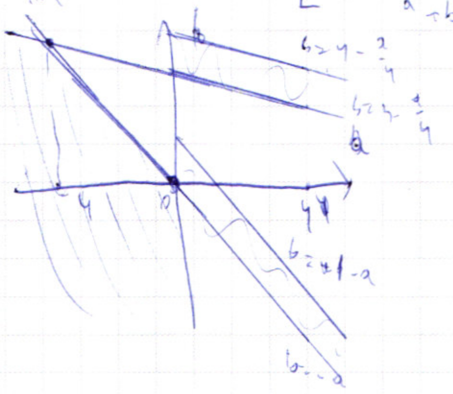
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} a\left(4a^{\frac{1}{16}} + (4b - 5a - 16)^{\frac14}\right) - 5b + 16 \le 0 \\ a(4a + (4b - 5a + 16) - 5b + 16 \le 0 \\ 32^{\frac{1}{16}} - (36 - a)^{\frac14} + 4 + b \le 0 \\ 32 - (36 - a) + 4 + b \le 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a(12 - a - 4b) \le 0 \\ a(a+b) \ge 0 \\ \frac{a}{4} + b \le 4 \\ a + b \le 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a(12 - a - 4b) \le 0 \\ a(a+b) \ge 0 \\ 12 - a - 4b \ge -4 \\ a + b \le 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ 0 \ge 12 - a - 4b \ge -4 \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ 12 - a - 4b \ge 0 \\ a + b \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ 12 \le a + 4b \le 16 \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases} \quad \mathrm{I} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a + 4b \le 12 \\ a + b \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

I: $\begin{cases} a > 0 \\ b \le 4 - \frac{a}{4} \\ b \ge 3 - \frac{a}{4} \\ b \ge -a \\ b \le 1 - a \end{cases}$



$\Rightarrow$

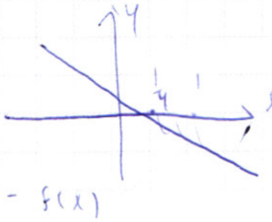
II: $\begin{cases} a < 0 \\ b \le 3 - \frac{a}{4} \\ b \le -a \end{cases}$

$\Rightarrow \left(3 - \frac{a}{4} = -a \Rightarrow \frac34 a = -3 \Rightarrow a = -4\right)$ При $a \le -4$ $b \le 3 - \frac{a}{4}$,

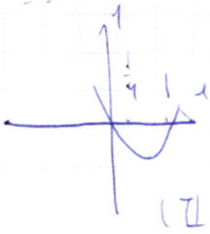
При $-4 \le a < 0$, $b \le -a$ (При $a > 0$ пересечений не является нет $\Rightarrow$ нет решений), но при $*$: при $a \le -4$ $b \ge -a$, при $-4 \le a < 0$: $b \ge 3 - \frac{a}{4}$.

Д $a > 0$:

$\begin{cases} 4a + (4b - 16)x - 5b + 16 \le 0 \quad \mathrm{I} \\ 32x^2 - 36x + 4 + b \ge 0. \quad \mathrm{II} \end{cases}$

I. 

$(\mathrm{I} - f(x))$

II. 

$(\mathrm{II} - g(x))$

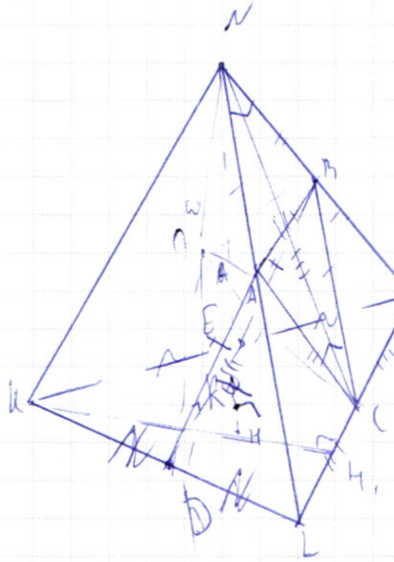
$\Rightarrow \begin{cases} g\left(\frac14\right) \le 0 \\ g(1) \le 0 \\ f\left(\frac14\right) \le 0. \end{cases} \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} b \le 4 \\ b \le 1 \\ (4b-16)\frac{1}{4} - 5b + 16 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \le 1 \\ 12 - 4b \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \le 1 \\ b \ge 3 \end{cases} \text{ - противор.}$$

Ответ: $(a; [-a; +\infty)) \mid a \le -4)$; $(a; [3-\frac{a}{4}; +\infty)) \mid -4 < a < 0)$.

№7.



Дано: $KL = 3$, $KM = 1$, $NM = 2$, A, B, C, D, E – ср. сторон так, на рис., $A, B, C, D, E, N \in \omega$

Найти: LM - ?, $R_{\omega\ min}$ - ?

Решение:

AC, BC – ср. л. ($\triangle NLM$) $\Rightarrow$ $AC \parallel NM$, $BC \parallel NL$, $NABC$ – вписан. ($NABC$ – ▱) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BANA = \angle BCA = \angle NAC = \angle NBC = 90°$

AD – ср. л. ($\triangle NKL$), BE – ср. л. ($\triangle KNM$), BA – ср. л. ($\triangle NLM$), ED – ср. л. ($\triangle KML$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{1}{2}ML = ED$, $DA = \frac{1}{2}NK = BE \Rightarrow ABED$ – ▱, $ABED$ – вписан. $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABED$ – ▭ $\Rightarrow$ $NK \perp AD$ ($AD \parallel ML$) $\Rightarrow NK \perp ML$, $KH_1 \perp ML$ $\Rightarrow$, $NH \perp (KML)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow H \in KH_1$, $LM =$ (по т. Пиф) $\sqrt{NL^2 + NM^2} = \sqrt{2 + NL^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$=\frac{1}{\sqrt5}(\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1$

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{2-2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1$

$2tg\alpha+2-2tg^2\alpha=-1-tg^2\alpha$

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=1 \\ tg\alpha=-3 \end{array}\right.$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=$

$tg\alpha=?$

$\cos 2\alpha=\frac{1-\frac{\sqrt3}{3}}{1+\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}$

$\frac{2\frac{\sqrt3}{3}}{1+\frac{\sqrt3}{3}}$

$\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{2\sqrt3}{\sqrt3}}{\frac{4}{\sqrt3}}=\frac{\sqrt3}{2}$

№2

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$x^2-12x+36=36y^2-36y$

$x\geq 12y$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x=6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

№4

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+|10x-x^2|^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)}\geq 0$

$t=10x-x^2$

$t\leq 25$

$t+|t|^{\log_3 4}-5^{\log_3(t)}\geq 0$

$0<t$

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3(t)}\geq 0$

$(x-6)^2+6(y-1)^2=45+36+36-36y=117-36y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t>9$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0$ $\quad f'(t)=1+\log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}}-\log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}}\wedge 0$

$t\left(1+t^{\log_3 \frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}\right)\geq 0$ $\quad \log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}}\wedge \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}}-1$

$1+\log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}}\wedge \log_3 5\, t^{\log_3\frac{5}{3}}$

$0<t\leq 0$

$1+\log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}}\geq \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}}$ $\quad 0<t<0$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0$

$0<t\leq 25$

$1+\log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}}\leq \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}}$ $\quad 0<t\leq 25$

$t=9$

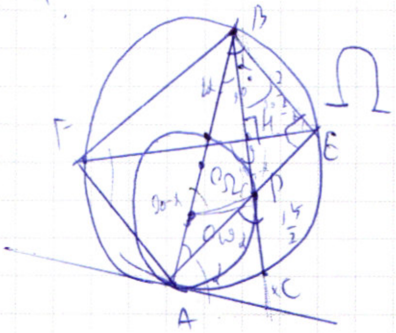
$9+9^{\log_3 16}-5^{\log_3 25}\geq 0$ $\quad 9+16-25=0$ $\quad f(t)\cap 0x$ 1 раз.

$0<t\leq 9$

$9<-x^2+10x\leq 9$ $\quad \begin{cases} x(10-x)>0 \\ -x^2+10x\leq 9\end{cases}$ $\quad \begin{cases} x(x-10)<0 \\ x^2-10x+9\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases} x(x-10)<0 \\ (x-1)(x-9)\geq 0\end{cases}$ $\quad 0 \quad 10 \quad 1 \quad 9$ $\quad x\in(0;1]\cup[9;10)$

№ 4.



$\frac{15}{2}+\frac{17}{2}=16.$

$D_\Omega\cdot(D_\Omega-D_\omega)=BD^2$ $\quad \begin{cases} 2R_1(R_1-R_2)=\frac{289}{4} \\ \frac{17}{16}=\frac{2R_1-R_2}{R_1}\end{cases}$

$\frac{\frac{17}{2}}{8}=\frac{D_\Omega-R_\omega}{R_\Omega}$

$FB\parallel AE$ $\quad \begin{cases} 4R_1(R_1-R_2)=\frac{289}{16} \\ 17R_1=32R_1-16R_2.\end{cases}$ $\quad \begin{cases} R_1(R_1-R_2)=\frac{289}{16} \\ 16R_2=15R_1\end{cases}$ $\quad R_1=\frac{16}{15}R_2.$ $\quad \frac{16}{15\cdot 225}R^2=\frac{289}{16}$

$AC\perp BE$

$AC=AD\cdot\frac{R_1}{R_2}$ $\quad R_2=\frac{15\cdot 17}{16}\cdot\frac{1}{16}$ $\quad R_1=17$ $\quad R^2=\frac{289\cdot 225}{16^2}$

$\cos(2\angle BOD)$ $\quad \left(\frac{D_\Omega-R_\omega}{R_\omega}\right)=\frac{15\cdot 17}{16}$

$AE=\frac{15}{2}\sqrt{17}\cdot\frac{R_2}{R_1}=\frac{15}{17}$ $\quad AD^2=2\frac{15^2\cdot 17^2}{16^2}+2\cdot\frac{15^2\cdot 17^2}{16^2}\cdot\frac{15}{17}=2\frac{15^2\cdot 17}{16^2}(17+15)=2\cdot\frac{15\cdot R_1}{16}=$

$=\frac{15^2\cdot 17}{4}$ $\quad AD=\frac{15}{2}\sqrt{17}.$

$\alpha=\arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$ $\quad \sin\alpha=\frac{AD}{2R_\omega}=\frac{\frac{15}{2}\sqrt{17}}{2\cdot\frac{15\cdot 17}{16}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$17\cdot 4=68$ $\quad BE=\sqrt{4289-64\cdot 17}=\sqrt{17}\sqrt{42}=\sqrt{714}.$ $\quad S=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot\sqrt{714}.$

$\frac{68}{156}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/4]$ $\quad 2 \leq x, y \leq 25$

$f(x/y) < 0$.

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$ $\quad f(2) = 0$. $\quad f(3) = 0$. $\quad f(5) = 1$ $\quad f(7) = 1$

$f(11) = 2$ $\quad f(13) = 3$ $\quad f(17) = 4$ $\quad f(19) = 4$ $\quad f(23) = 5$.

$x : y = 1$ $f(x/y) > 0$. $\quad f(\frac{2}{4}) = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{4}{4})$

$f(10) = 1$ $\quad f(\frac{10}{5}) = f(10) + f(\frac{1}{5})$ $\quad 0 = 1 + f(\frac{1}{5})$ $\quad f(\frac{1}{5}) = -1$

$f(\frac{10}{2}) = f(10) + f(\frac{1}{2})$ $\quad f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(\frac{1}{3}) = 0$ $\quad f(\frac{1}{7}) = -1$ $\quad f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) + f(p_2)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$ $\quad f(p_2) = f(p_1 \cdot p_2) + f(\frac{1}{p_1})$ $\quad f(\frac{1}{p_1}) = -f(p_1)$

$f(y) > f(x)$

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0

19	20	21	22	23	24	25
4	1	1	2	5	0	2

$N = 7 \cdot 10 + 3 \cdot 17 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 5 \cdot 23 = 70 + 51 + 20 + 42 + 115 =$

$= 141 + 157 = 298$.

№ 6. $\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$ $\quad x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$ax + b \geq \frac{16x - 16}{4x - 5}$. $\quad x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$-32x^2 + (36 - a)x + 3 + b \leq 0$

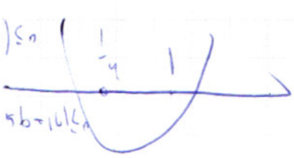
$4ax^2 + 4bx - 5ax - 5b \leq 16x - 16$.

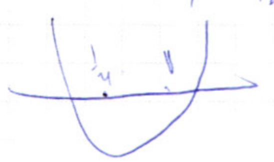
$f(\frac{1}{4}) = 2 - 9 + \frac{a}{4} + 3 + b < 0$

$4ax^2 + (4b - 5a - 16)x - 5b + 16 \leq 0$.

$f(1) = 32 - 36 + a + 3 + b \leq 0$

$\begin{cases} a(\frac{a}{4} + b - \frac{5}{4}a - 4 - 5b + 16) \leq 0 \\ a(4a + 4b - 5a - 16 - 5b + 16) \leq 0 \end{cases}$





$\begin{cases} \frac{a}{4} + b \leq 4 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a(-a - 4b + 12) \leq 0 \\ a(-a - b) \leq 0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \frac{a}{4}+b \le 4b \\ a+b \le 1 \\ a(12-a-4b) \le 0 \\ a(a+b) \ge 0 \end{cases}$$

$4b \ge -4$

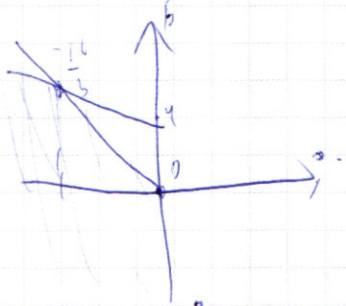
$12-a-4b \le 0$

$a \le 0$

$$\begin{cases} a+b \le 0 \\ \frac{a}{4}+b \le 4 \\ a<0 \end{cases}$$

$b \le -a$

$$\begin{cases} b \le -a \\ b \le 4-\frac{a}{4} \\ a<0 \end{cases}$$

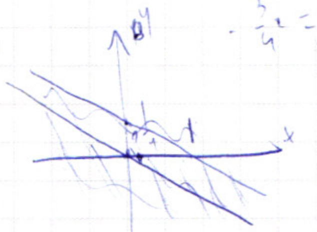


$4-\frac{a}{4}=-a$

$a=0$

$$\begin{cases} 4ba-5b-16x+16 \le 0 \\ b \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4b-16)x-5b+16 \le 0 \\ b \le 1 \end{cases}$$



$\frac{3}{4}a=4 \quad a=-\frac{16}{3}$

$f(\frac{1}{4}) \le 0$

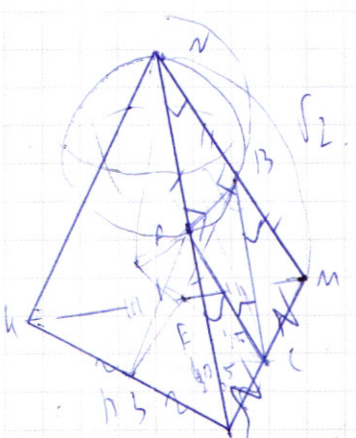
$(4b-16)\frac{1}{4}-5b+16 \le 0 \quad b-4-5b+16 \le 0$

$12-4b \le 0$

$b \ge 3$

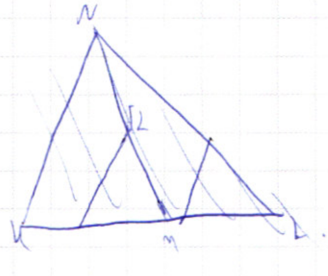
Отв: $\left[a;\ (-\infty;\ 4-\frac{a}{4}] \right| a \le -\frac{16}{3} \Big] \cup \left(a;\ (-\infty;\ -a] \right| -\frac{16}{3} \le a < 0 \Big)$

$a^2\ 2$



$\sqrt{2}$

$LM=\sqrt{2+NL^2}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)