МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin\frac{(4\alpha+4\beta)+4\beta}{2} + \sin\frac{(4\alpha+4\beta)-4\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$$

По условию $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, тогда

$$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$$

Тогда $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к. $tg\,\alpha$ определен, тогда

$$4\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$$

$$2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = 0$$

$$\boxed{tg\,\alpha = -\frac{1}{2}}$$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha\,(2\cos\alpha + 1) = 0$

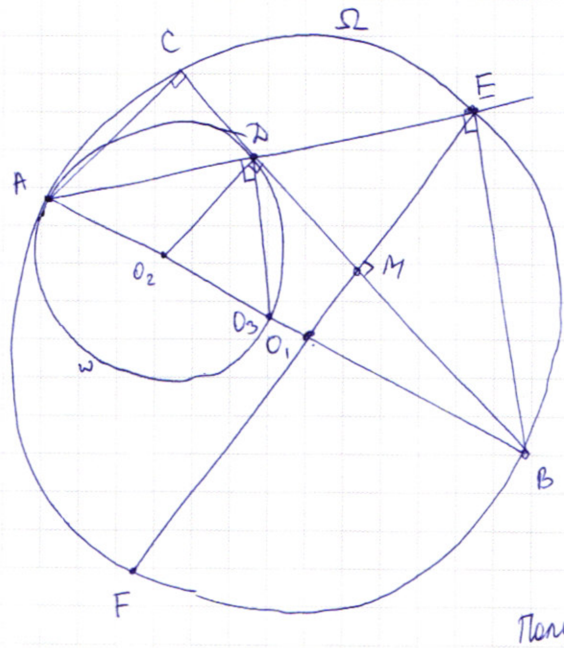
$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Если $\sin\alpha = 0$, то $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 0}$

Если $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, то $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{3}}$

Ответ. $-\frac{1}{2}$; 0; $+\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

Задача №4.



Обозначим радиусы ω и Ω за r и R. А O_2 и O_1 – их центры

По лемме Архимеда E – середина $\smile ACB$, поэтому перпендикуляр из E на BC проходит через M – середину BC и O_1.

Т.к. AE – биссектриса $\angle CAB$ в $\triangle CAB$, то

$$\frac{CD}{DB} = \frac{8}{17} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2R} \qquad (1)$$

Т.к. BC – касат. к ω, то $O_2D \perp BC$.
Т.к. AB – диаметр Ω, то $\angle ACB = 90°$.

Получаем, что $AC \parallel O_2D \parallel O_1M$.

По т. Фалеса: $\frac{BD}{BC} = \frac{r}{AC} = \frac{17}{25}$; $AC = \frac{25r}{17}$; подставим в (1):

$$\frac{25r}{17\cdot 2R} = \frac{8}{17} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{16}{25} \Rightarrow R = \frac{25r}{16}$$

~~По т. Фалеса:~~ $\cancel{\frac{BD}{BC} = \frac{17}{25} = \frac{2R-r}{}}$ $\cancel{\frac{BM}{BD} = \frac{BO_1}{BO_2}}$; $\cancel{\frac{12{,}5}{17} = \frac{25}{34} = \frac{R}{2R-r}}$

По т. Пифагора из $\triangle ACB$:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$; $\quad 25^2 + \frac{25^2 r^2}{17^2} = 4R^2 = \frac{25^2 r^2}{16^2}$

$1 + \frac{r^2}{17^2} = \frac{r^2}{16^2}$; $\quad 1 = r^2\left(\frac{17^2 - 16^2}{16^2\cdot 17^2}\right) = r^2\cdot\frac{33}{16^2\cdot 17^2}$; $\quad r = \frac{16\cdot 17}{\sqrt{33}} = \frac{272}{\sqrt{33}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$R=\frac{25r}{16}=\frac{25\cdot16\cdot17}{16\cdot\sqrt{33}}=\frac{25\cdot17}{\sqrt{33}}=\frac{425}{\sqrt{33}}$$

~~Т.к. AO_3 и AB~~ O_3 – точка пересечения AB и ω (Т.к. A – общ. точка касания, то O_2 лежит на AB, т.к. радиусы обеих окр. перп. касательной)

Т.к. AO_3 и AB – диаметры, то $O_3D\perp AE$ и $BE\perp AE$, т.е. $O_3D\parallel BE$.

По т. Фалеса $\frac{AD+DE}{AD}=\frac{2R}{2r}$; $1+\frac{DE}{AD}=\frac{R}{r}=\frac{25}{16}$; $\frac{DE}{AD}=\frac{9}{16}$; $DE=\frac{9AD}{16}$.

По т. об отрезках хорд:

$$CD\cdot DB=8\cdot17=AD\cdot DE=\frac{AD^2\cdot9}{16}$$

$$2\sqrt{34}=\frac{3AD}{4};\ AD=\frac{8\sqrt{34}}{3};\ DE=\frac{8\sqrt{34}}{3}\cdot\frac{9}{16}=\frac{3\sqrt{34}}{2}$$

$$AE=AD+DE=\frac{16\sqrt{34}+9\sqrt{34}}{6}=\frac{25\sqrt{34}}{6}$$

По т. синусов: $\frac{AE}{\sin\angle AFE}=2R$; $\sin\angle AFE=\frac{25\sqrt{34}}{6\cdot2\cdot R}=\frac{25\sqrt{34}}{12}\cdot\frac{\sqrt{33}}{425}=\frac{\sqrt{34}\cdot\sqrt{33}}{12\cdot17}=\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{34}\cdot6}=$

$$=\frac{\sqrt{33}}{6\sqrt{34}}$$

$\angle AFE=\arcsin\left(\frac{\sqrt{33}}{6\sqrt{34}}\right)$ (острый, т.к. $\smile AE=\frac{1}{2}\smile AEB$ – меньше половины окр.)

~~$\cos\angle BAE=\frac{AE}{AB}=\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{\sqrt{33}}{2\cdot425}=\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{34}\cdot6}$~~

Т.к. EF – диаметр, то $\angle FAE=90^\circ$, значит $\cos\angle AEF=\sin\angle AFE=\frac{\sqrt{33}}{6\sqrt{34}}$

$$\sin\angle AEF=\sqrt{\frac{36\cdot34-33}{36\cdot34}}=\frac{\sqrt{1191}}{6\sqrt{34}}$$

$$S_{AEF}=\frac{1}{2}\sin\angle AEF\cdot AE\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1191}}{6\sqrt{34}}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{2\cdot425}{\sqrt{33}}=\frac{25^2\cdot17\cdot\sqrt{1191}}{36\sqrt{33}}=$$

$$=\frac{25^2\cdot17\sqrt{397}}{36\sqrt{11}}=\frac{53125\sqrt{397}}{36\sqrt{11}}$$

Ответ. $R=\frac{425}{\sqrt{33}}$; $r=\frac{272}{\sqrt{33}}$; $\angle AFE=\arcsin\left(\frac{\sqrt{33}}{6\sqrt{34}}\right)$; $S_{AEF}=\frac{53125\sqrt{397}}{36\sqrt{11}}$

Задача № 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} ; \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $x-2=a$
$y-1=b$, тогда

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab & (1) \\ a\geq 2b & (2) \\ a^2+9b^2=25 & (3) \end{cases}$$

(1) $a^2-5ab+4b^2=0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=4 \\ \frac{a}{b}=1 \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{ll} a=4b & (4) \\ a=b & (5) \end{array}\right.$$

Подставим в (3):

(4): $16b^2+9b^2=25$

$\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$, тогда $\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-4 \end{array}\right.$

Проверяя (2) получаем, что подходит только $(a;b)=(4;1)$

(5): $10b^2=25$

$b^2=\frac{5}{2}$

$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{2,5} \\ b=-\sqrt{2,5} \end{array}\right.$, тогда $\left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2,5} \\ a=-\sqrt{2,5} \end{array}\right.$

Проверяя (2) получаем, что подходит только $(a;b)=\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4+2=6 \\ y=1+1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \\ y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $(6;2)$; $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2; -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

Заметим, что на ОДЗ $x^2+18x>0$, поэтому модуль можно отбросить.

Пусть $x^2+18x=t$, тогда

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

Пусть $\log_{12}t=a$.

$$5^a+12^a \geq 13^a$$

~~Т.к. $12^a>0$ при любом a, то на 13^a можно поделить~~

$$\cancel{\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1 \quad \left(\frac{5}{12}\right)^a+1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^a}$$

Т.к. $13^a>0$ при $\forall a$, то на 13^a можно поделить

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$$

В левой части монотонно убывающая ф-ция, а в правой – константа. Значит до того как

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a = 1 \quad \text{нер-во выполняется, а после – нет.}$$

Равенство достигается при $a=2$, т.е.

$a \leq 2$.

Обратная замена: $\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$$\log_{12}(x^2+18x) \leq \log_{12}144$$

Т.к. $f(t)=\log_{12}t$ – монотонно возрастает, то

$$0 < x^2+18x \leq 144$$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x^2+18x-144 \le 0 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -24 \le x \le 6 \\ x < -18 ;\ x > 0 \end{cases}$$

$-24 \le x < -18 ;\ 0 < x \le 6$

Ответ. $[-24; -18) \cup (0; 6]$

Задача №5.

- $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$

  $f(1) = 2f(1)$

  $f(1) = 0$

- $f(1) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

  $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Вычислим:

$f(1)=0$	$f(7)=1$	$f(13)=3$	$f(19)=4$
$f(2)=0$	$f(8)=f(4\cdot 2)=0$	$f(14)=f(2\cdot 7)=1$	$f(20)=f(4\cdot 5)=1$
$f(3)=0$	$f(9)=f(3\cdot 3)=0$	$f(15)=f(3\cdot 5)=1$	$f(21)=f(3\cdot 7)=1$
$f(4)=f(2\cdot 2)=0$	$f(10)=f(2\cdot 5)=1$	$f(16)=f(4\cdot 4)=0$	$f(22)=f(2\cdot 11)=2$
$f(5)=1$	$f(11)=2$	$f(17)=4$	$f(23)=5$
$f(6)=f(3\cdot 2)=0$	$f(12)=f(3\cdot 4)=0$	$f(18)=f(2\cdot 9)=0$	$f(24)=f(4\cdot 6)=0$

Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, нужно $f(x) < f(y)$

Если $f(x)=0$ (11 вариантов), то $f(y) = 1,2,3,4$ или 5 (13 вариантов)

Если $f(x)=1$ (7 вар.), то $f(y)=2,3,4$ или 5 (6 вар.)

Если $f(x)=2$ (2 вар.), то $f(y)=3,4$ или 5 (4 вар.)

Если $f(x)=3$ (1 вар.), то $f(y)=4$ или 5 (3 вар.)

Если $f(x)=4$ (2 вар.), то $f(y)=5$ (1 вар.)

Всего: $11\cdot 13 + 7\cdot 6 + 2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 143+42+8+5 = 143+55 = 198$

Ответ. 198 пар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3} & (1) \\ ax+b \leq -8x^2-30x-17 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим каждое неравенство по отдельности:

(1) $ax+b \geq \dfrac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \dfrac{2}{4x+3}$

$ax+b-3 \geq \dfrac{0{,}5}{x+0{,}75}$

Условие выше равносильно тому, что график прямой $y=ax+b-3$ лежит выше графика гиперболы $y=\dfrac{0{,}5}{x+0{,}75}$.

На промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ гипербола убывает

Значит, при $a \geq 0$ достаточно, чтобы прямая была не ниже гиперболы при $x=-\frac{11}{4}$

$a\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+b-3 \geq \dfrac{0{,}5}{-\frac{11}{4}+0{,}75} = 0{,}25$, т.е.

$0 \leq a \leq \dfrac{4b}{11} - 1$

При $a<0$:

$ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3}$

$\dfrac{12x+11-(4x+3)(ax+b)}{4x+3} \leq 0$

$\dfrac{-4ax^2-3ax-4bx-3b+12x+11}{4x+3} \leq 0 \quad |:(-4a)>0$ *

$\dfrac{x^2+0{,}75x+\frac{b}{a}x-\frac{3}{a}x+0{,}75\frac{b}{a}-\frac{11}{4a}}{4x+3} \leq 0$

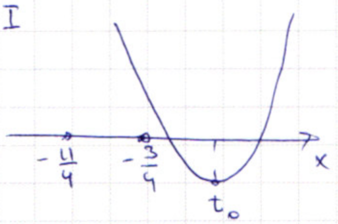
На промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $4x+3<0$, значит, чтобы нер-во имело вид: выполнялось

$$x^2+\frac{3}{4}x+\frac{b}{a}x-\frac{3}{a}x+\frac{3b}{4a}-\frac{11}{4a}\geq 0$$

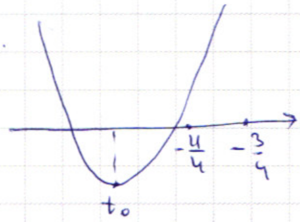
$$x^2+x\left(\frac{3a+4b-12}{4a}\right)+\frac{3b-11}{4a}\geq 0$$

Геометрическая модель, удовл. усл:

I



II.



I. $\begin{cases} t_0\geq -\frac{3}{4} \\ f\left(-\frac{3}{4}\right)\geq 0 \end{cases}$ II $\begin{cases} t_0\leq -\frac{11}{4} \\ f\left(-\frac{11}{4}\right)\geq 0 \end{cases}$

$$t_0=-\frac{3a+4b-12}{8a}$$

I. $\begin{cases} -\frac{3a+4b-12}{8a}\geq -\frac{3}{4} \\ \frac{9}{16}-\frac{3(3a+4b-12)}{16a}+\frac{4(3b-11)}{16a}\geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{3a+4b-12-6a}{8a}\leq 0 \\ \frac{9a-9a-12b+36+12b-44}{16a}\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-3a+4b-12}{8a}\leq 0 \quad |\cdot 8a \ (a<0) \\ \frac{-8}{16a}\geq 0 \ \text{- верно при всех } a<0 \end{cases}$$

$$-3a+4b-12\geq 0$$

$$a\leq\frac{4}{3}b-4$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II. $\begin{cases} -\dfrac{3a+4b-12}{8a} \leq -\dfrac{11}{4} \\ \dfrac{121}{16} - \dfrac{11(3a+4b-12)}{16a} + \dfrac{4(3b-11)}{16a} \geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{3a+4b-12-22a}{8a} \geqslant 0 \\ \dfrac{121a-33a-44b+132+12b-44}{16a} \geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -19a+4b-12 \leq 0 \\ 88a-32b+88 \leq 0 \end{cases}$

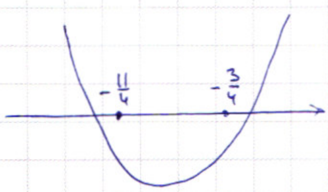
$\begin{cases} a \geqslant \dfrac{4}{19}b - \dfrac{12}{19} \\ a \leq \dfrac{4}{11}b - 1 \end{cases}$

Итак, получили, что

$\begin{cases} a < 0 \\ \left[\begin{array}{l} a \leq \dfrac{4}{3}b - 4 \\ \dfrac{4}{19}b - \dfrac{12}{19} \leq a \leq \dfrac{4b}{11} - 1 \end{array} \right. \end{cases}$

(2) ~~Нер-во~~ $8x^2 + x(30+a) + 17b \leq 0$

Геом. модель:



Для этого

$\begin{cases} f\left(-\dfrac{11}{4}\right) \leq 0 \\ f\left(-\dfrac{3}{4}\right) \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -8\cdot\frac{121}{16}+\left(-\frac{11}{4}\right)(30+a)+17+b\le 0 \\ -8\cdot\frac{9}{16}-\frac{3}{4}(30+a)+17+b\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{242}{4}-\frac{330}{4}-\frac{11a}{4}+17+b\le 0 \\ -\frac{18}{4}-\frac{90}{4}-\frac{3a}{4}+17+b\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{11a}{4}\ge 17+b-\frac{572}{4}=17+b-163=b-146 \\ \frac{3a}{4}\ge 17+b-\frac{108}{4}=17+b-27=b-10 \end{cases}$$

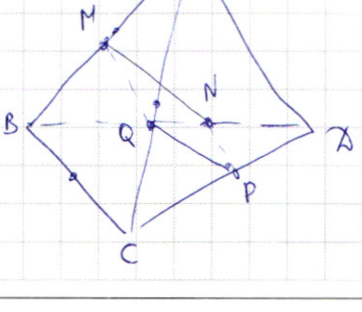
$$\begin{cases} a\ge\frac{4b}{11}-\frac{4\cdot 146}{11} \\ a\ge\frac{4b}{3}-\frac{40}{3} \end{cases}$$

Вернемся в исходную систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge 0 \\ a\le\frac{4b}{11}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} a\le\frac{4}{3}b-4 \\ \frac{4b}{19}-\frac{12}{19}\le a\le\frac{4b}{11}-1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} a\ge\frac{4b}{11}-\frac{584}{11} \\ a\ge\frac{4b}{3}-\frac{40}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, ответом будут числа a и b, удовл. данной системе

Задача 7.



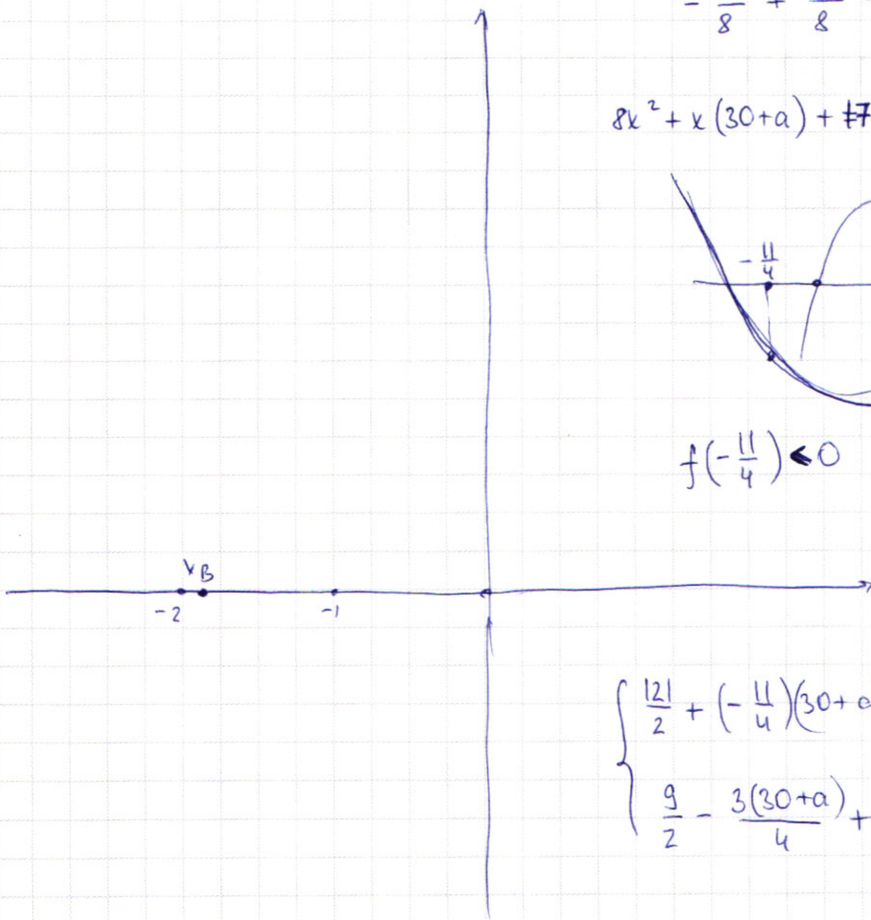
Т.к. M, Q, N, P – середины ребер, то $MQ \parallel BC$ и $NP \parallel BC$, поэтому точки M, N, P и Q лежат в одной плоскости, но $MQ \parallel NP$ и $MN \parallel PQ$, т.е. $MNPQ$ – пар-м, вписанный в окружность, т.е. это прямоугольник.

Значит, $AD \perp BC$ ($AD \parallel MN$, $BC \parallel MQ$, $MN \perp MQ$)

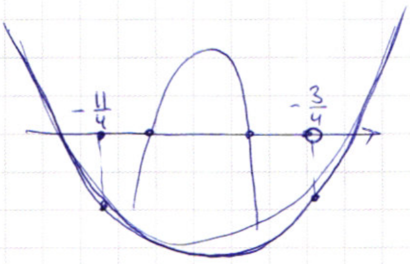
$ax+b \le -8x^2-30x-17$

$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-17=\frac{225}{8}-17=\frac{225-80-56}{8}=$



$8x^2+x(30+a)+17+b \le 0$



$f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0$

$$\begin{cases} \frac{121}{2}+\left(-\frac{11}{4}\right)(30+a)+17+b \le 0 \\ \frac{9}{2}-\frac{3(30+a)}{4}+17+b \le 0 \end{cases}$$

$2-4ax^2-3ax-4bx-3b+12x+9 \ge 0$

При $a<0$:

Поделим на $-4a$

$x^2+\frac{3}{4}x+\frac{b}{a}x+\frac{3}{4}b-3x+\frac{11}{4a} \ge 0$

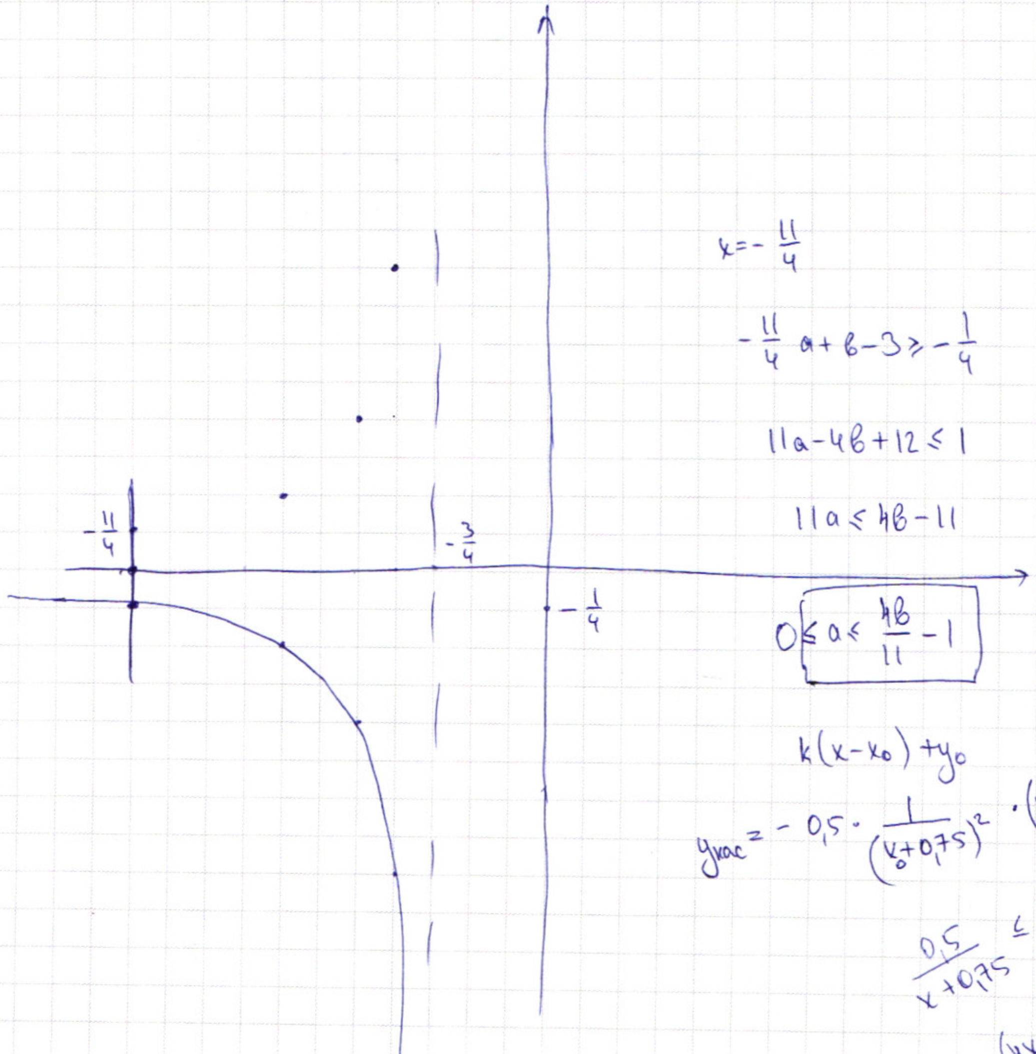
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$ для всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$ax+b \geq \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$

$ax+b \leq -8x^2$

$ax+b-3 \geq \frac{2}{4x+3} = \frac{0{,}5}{x+0{,}75}$



$x=-\frac{11}{4}$

$-\frac{11}{4}a+b-3 \geq -\frac{1}{4}$

$11a-4b+12 \leq 1$

$11a \leq 4b-11$

$0 \leq \boxed{a \leq \frac{4b}{11}-1}$

$k(x-x_0)+y_0$

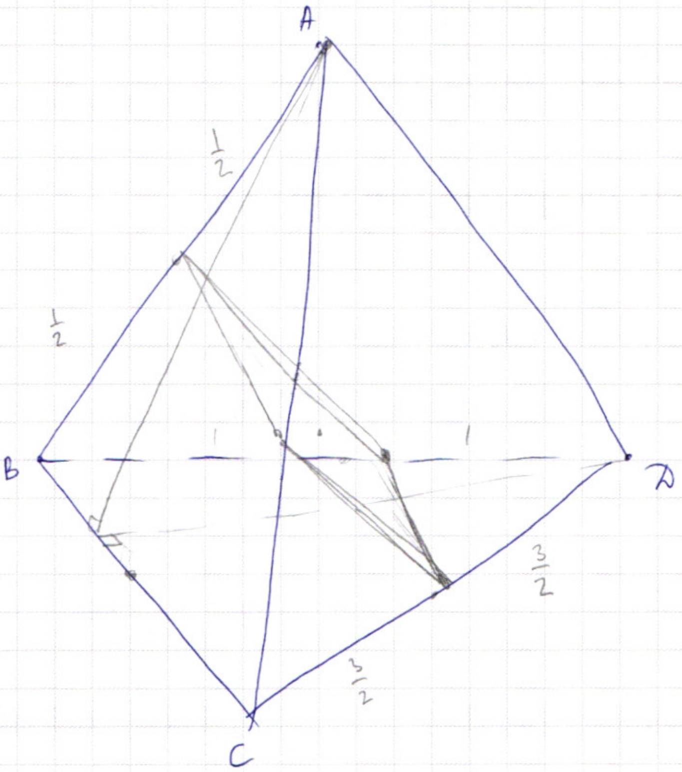
$y_{кас} = -0{,}5 \cdot \frac{1}{(x_0+0{,}75)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{0{,}5}{x_0+0{,}75}$

$\frac{0{,}5}{x+0{,}75} \leq ax+b-3$

$\cancel{\frac{2-(4x+3)(ax+b-3)}{4x+3} \leq 0}$

$\frac{2-(4ax^2+3ax+4bx+3b-12x-9)}{4x+3}$

$2-4ax^2-3ax-4bx-3b+12x+9$



$1191 \mid 3$
$29 \quad 397$

опр.
f на $\mathbb{Q}_+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \qquad f(1) = 0$

$\cancel{f(2) = f(2) + 0}$

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = f(2\cdot 2) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) - f(y) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = -f(y) + f(x)$

$$\begin{array}{r} \times\ 3125 \\ 17 \\ \hline 21875 \\ 3125 \\ \hline 53125 \end{array}$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x=t$

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$t>0$ не нужен

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t=12^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}13}=\left(12^{\log_{12}t}\right)^{\log_{12}13}$

$13^{\log_{12}t}$

$\log$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 12^{(\log_{12}t\cdot\log_{12}13)}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}+1 \geq 12^{\log_{12}t(\log_{12}13-1)}$

$\log_{12}t=a$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{a}+1 \geq 12^{a\left(\log_{12}\frac{13}{12}\right)}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{a}+1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^{a}$

убыв. возр

$-24 \mid 6$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{a}+1=\left(\frac{13}{12}\right)^{a}$

$5^a+12^a=13^a$ $a=2$ – корень

$a\leq 2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\begin{cases} \sin 2\beta\cos 2\alpha + \cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

1) $$\begin{cases} \cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha\left(\frac{4\cdot 2}{5} - 1\ \cancel{)} + 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -1 \\ \frac{8\sin 2\alpha}{5} + \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\cancel{2}$

$$\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -1$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy = xy - x - 2y + 2; \quad x \geq 2y \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$5y^2 - 4x - 18y + 5xy = 12 + x + 2y - 2$$

$$5y^2 - 5x - 20y + 5xy = 10$$

$$y^2 - x + y\cdot x - 4y = 2$$

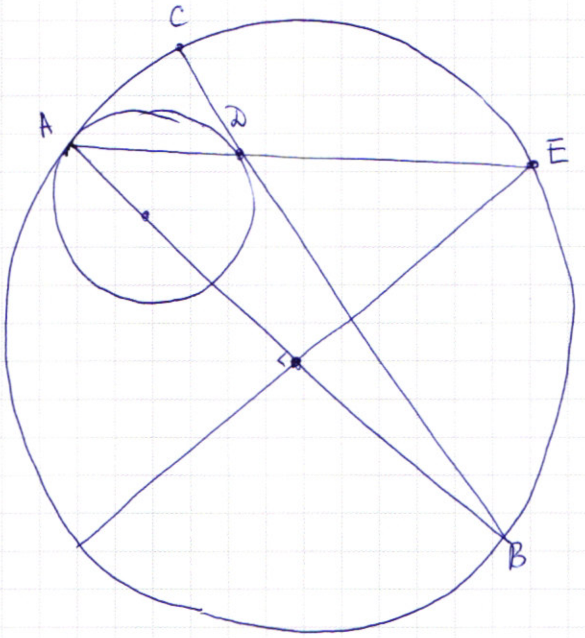
$$x(y-1) = -y^2 + 4y + 2$$

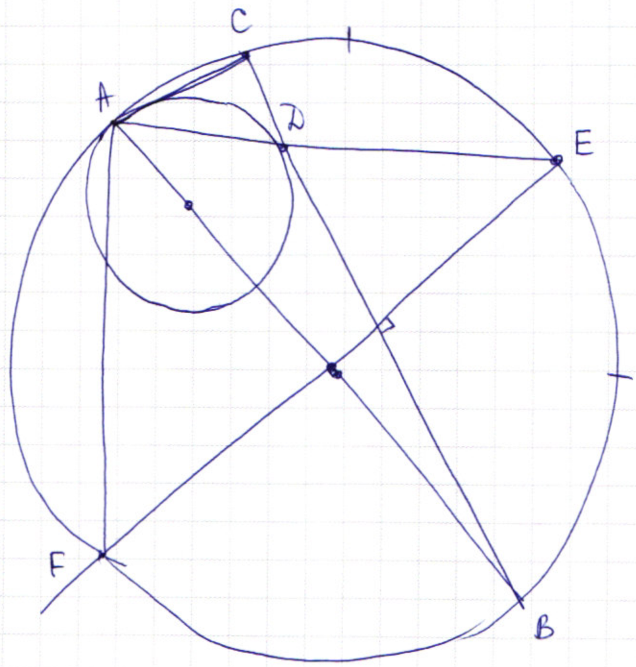
~~Если~~ $y \neq 1$

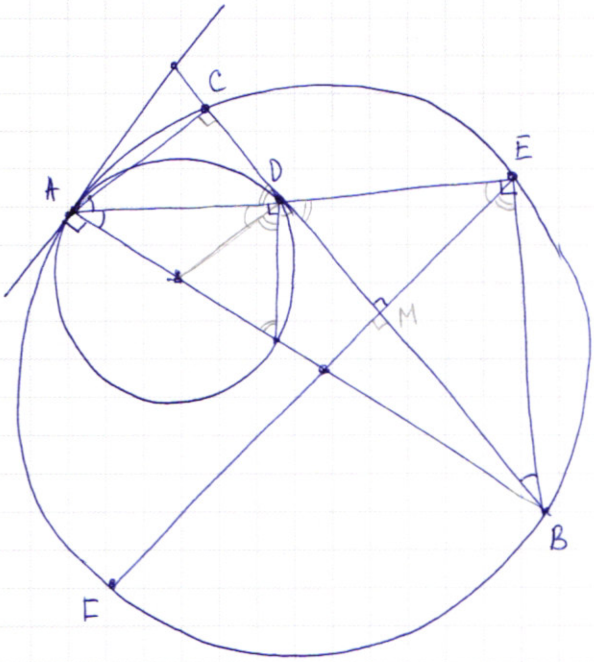
$$x = \frac{-y^2 + 4y + 2}{y - 1}$$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)


C
A
D
E
B


C
A
D
E
F
B



$CD = 8 ;\ BD = 17$

$\frac{AC}{2R} = \frac{8}{17}$

$\frac{BD}{BC} = \frac{17}{25} = \frac{r}{AC} \quad AC = \frac{25r}{17}$

$\frac{25r}{34R} = \frac{8}{17}$

$\frac{r}{R} = \frac{16}{25}$

$CD \cdot DB = AD \cdot DE$

$\cancel{\frac{AD}{DE} = \frac{r}{R}} \quad \frac{AD}{AD+DE} = \frac{r}{R} = \frac{16}{25}$

$\cancel{8 \cdot 17 = DE^2 \cdot \frac{r}{R} = DE^2 \cdot \frac{16}{25}}$

$\cancel{2\sqrt{34} = DE \cdot \frac{4}{5}}$

$\cancel{DE = \frac{5\sqrt{34}}{2} \quad AD = \frac{16}{25} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} = \frac{8\sqrt{34}}{5}}$

$25^2 + AC^2 = 4R^2$

$25^2 + \frac{25^2 r^2}{17^2} = 4 \cdot \frac{25^2 r^2}{16^2}$

$1 + \frac{r^2}{17^2} = \frac{r^2}{64}$

$1 + \frac{AD}{DE} = \frac{25}{16}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{9}{16}$

$8 \cdot 17 = DE^2 \cdot \frac{9}{16}$

$\frac{3}{4} DE = 2\sqrt{34}$

$DE = \frac{8\sqrt{34}}{3} ;\ AD = \frac{8\sqrt{34}}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$

$\frac{BM}{BD} = \frac{12{,}5}{17} = \frac{25}{34} = \frac{R}{2R - r} \qquad \frac{r}{R} = \frac{16}{25}$

$\cancel{\frac{34}{25} = \frac{2R}{R} - \frac{r}{R} = 1}$

16×16

16^2

$2^8 = 256 + 16 = 272$

36×34: 144, 108, 1224, -33, 1191

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$x^2+18x=t$ $\qquad$ $t \geq 81 - 18\cdot 9 = -81$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

$$t = 12^{\log_{12}t}$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq |t|^{\log_{12}13}$$

$\cancel{\frac{AE}{\sin\angle AFE}=2R}$

$\cancel{\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R}}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=$
$=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2$
$-4 \qquad -9$

$x-2=a$
$y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$a \geq 2b$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=4 \qquad a=4b \\ \frac{a}{b}=1 \qquad a=b \end{array}\right.$$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

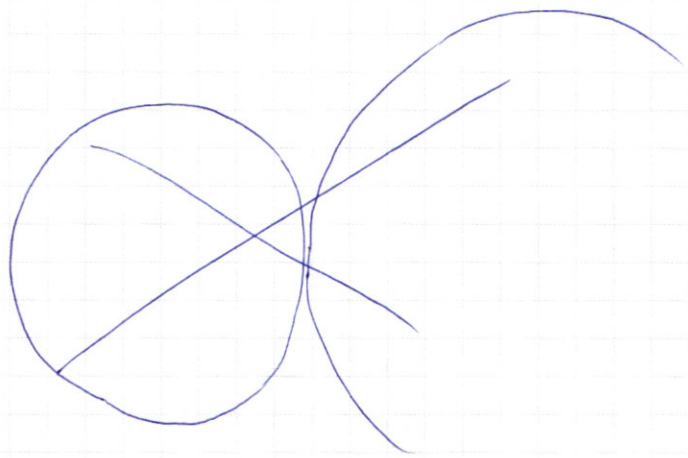
$$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$$
$$x\geq 2y$$

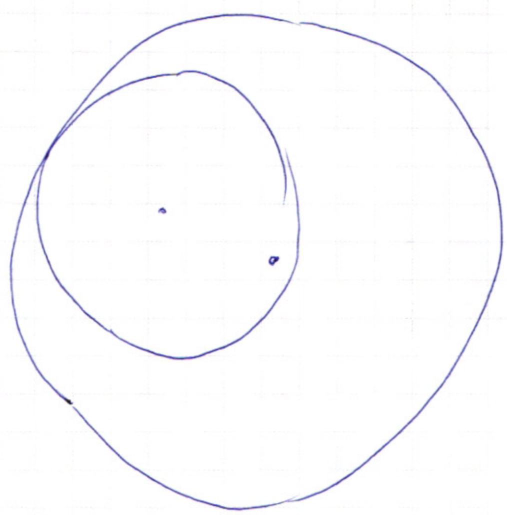
$$(x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=13$$

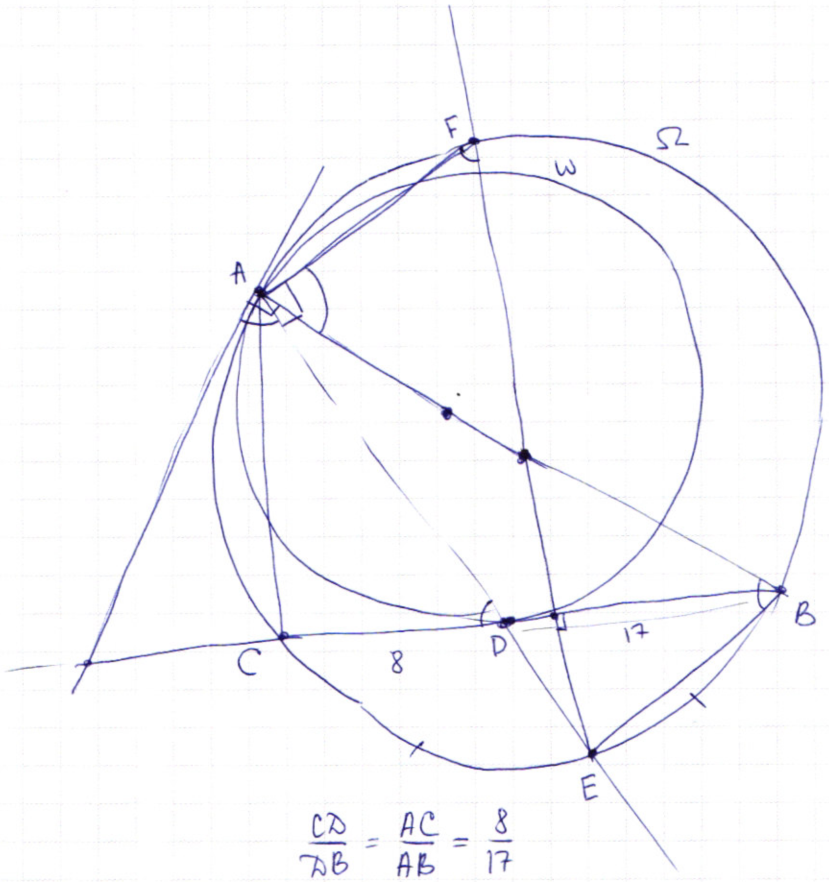
$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

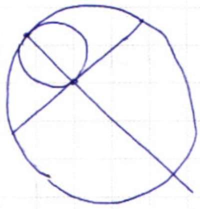
$\cancel{\sin x+\sin y}$

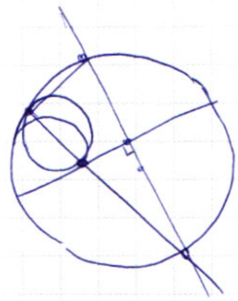
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$$











$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1 $\quad \frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

~~sin x + sin y~~

$\sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{x-y}{2} =$

$= \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} \ldots$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$

$\sin\frac{(4\alpha+4\beta)+4\beta}{2} + \sin\frac{(4\alpha+4\beta)-4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)