МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{4}{5}$

$\sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{4}{5}$

$\sin 2a \cdot \cos 4b + \cos 2a \cdot \sin 4b + \sin 2a = -\frac{4}{5}$

$\sin 2a\,(\cos 4b + 1) + \cos 2a \cdot \sin 4b = -\frac{4}{5}$

$\cos 4b + 1 = 2\cos^2 2b - 1 + 1 = 2\cos^2 2b$; $\quad \sin 4b = 2\sin 2b \cdot \cos 2b$

$2\cos 2b\,(\sin 2a \cdot \cos 2b + \cos 2a \cdot \sin 2b) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2b \cdot \sin(2a+2b) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2b \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2b = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

~~$\sin 2b =$~~

По основному триг-му тождеству:

$\sin 2b = \pm\sqrt{\frac{5}{5} - \frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) Если $\sin 2b = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2a \cdot \cos 2b + \cos 2a \cdot \sin 2b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sin 2a \cdot 2}{\sqrt{5}} + \frac{\cos 2a \cdot 1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2a + \cos 2a = -1$

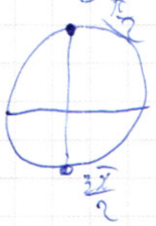
$4\sin a \cdot \cos a + 2\cos^2 a - 1 = -1$

$2\cos a \cdot (2\sin a + \cos a) = 0$

$\cos a = 0$ или $2\sin a + \cos a = 0$

если $\cos a = 0 \Rightarrow \sin a = 0$

$\Rightarrow \cos^2 a + \sin^2 a = 0$, что противоречит основному тригоном. тождеству



$a = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \Rightarrow$

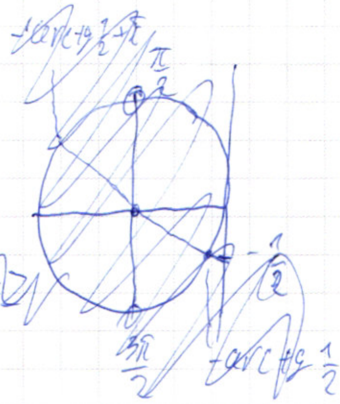
$\Rightarrow tg\, a$ не существует

~~При $\cos a = 0$ равенство не выполняется.~~

При $\cos a \neq 0$:

$2\, tg\, a + 1 = 0$

$tg\, a = -\frac{1}{2}$



~~$a = -arctg \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$~~

$tg\, a = -\frac{1}{2}$

~~$\left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ a = -arctg \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$~~

2) Если $\sin a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, аналогично:

~~$2\cos a$~~ $2\sin 2a - \cos 2a = -1$

$2 \cdot 2\sin a \cos a - 1 + 2\sin^2 a = -1$

$2\sin a\,(2\cos a + \sin a) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin a = 0$ или $2\cos a + \sin a = 0$

$a = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

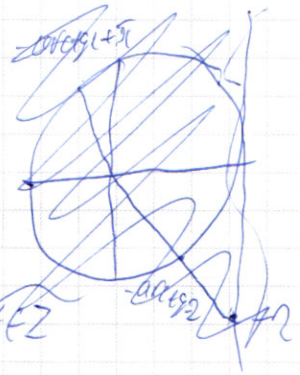
$\Rightarrow \operatorname{tg} a = 0$

Если $\cos a = 0 \Rightarrow \sin a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin^2 a + \cos^2 a = 0$, что противоречит основному триг. тождеству

Если $\cos a \neq 0$

$2 + \operatorname{tg} a = 0$

$\operatorname{tg} a = -2$



~~$a = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$~~

$\left[\begin{array}{l} \cancel{a = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \\ \cancel{a = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = 0 \\ \operatorname{tg} a = -2 \end{array}\right.$

Оба случая вместе:

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} a = 0 \\ \operatorname{tg} a = -2 \end{array}\right.$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

1) Ограничения: $x^2+18x>0$ $\quad x(x+18)>0$

$$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$$

2) 1. $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x \Rightarrow$

~~2. Пусть $x^2=1$~~

$$\Rightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)} \quad \Big| : 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

т.к это показательная ф-ия $13^{\log_{12}(x^2+18x)}>0$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 1$$

$$\left(\frac{5^2}{13^2}\right)^{\frac{1}{2}\log_{12}(x^2+18x)}+\left(\frac{12^2}{13^2}\right)^{\frac{1}{2}\log_{12}(x^2+18x)} \geq 1$$

Пусть $\frac{1}{2}\log_{12}(x^2+18x)=k$

$$\left(\frac{25}{169}\right)^k+\left(\frac{144}{169}\right)^k \geq 1$$

Если $k=1 \Rightarrow \frac{25}{169}+\frac{144}{169}=1$

Если k ~~уменьш~~ увеличить (или же $k>1$), то и $\left(\frac{25}{169}\right)^k$ и $\left(\frac{144}{169}\right)^k$ уменьшатся и их сумма станет меньше 1

(т.к $\frac{25}{169}<1$, $\frac{144}{169}<1$) $\Rightarrow \left(\frac{25}{169}\right)^k+\left(\frac{144}{169}\right)^k<1$

Если $k<1$, то и $\left(\frac{25}{169}\right)^k$ и $\left(\frac{144}{169}\right)^k$ увеличатся и

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{25}{169}\right)^k + \left(\frac{144}{169}\right)^k$ ж. станет больше 1

Из этого следует что неравенство выполняется при $k \le 1$

$\frac{1}{2}\log_{12}(x^2+18x) \le 1$

$\log_{12}(x^2+18x) \le \log_{12}144$

т.к. $y=\log_{12}t$ возрастает на $\mathbb{R}$

$x^2+18x-144 \le 0$

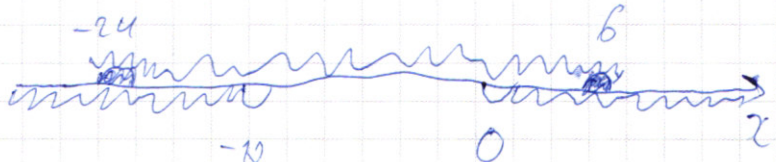
$D_1 = 81+144=225$

$x = \frac{-9 \pm 15}{1} = 6; -24$

$(x-6)(x+24) \le 0$

Учитывая ограничения

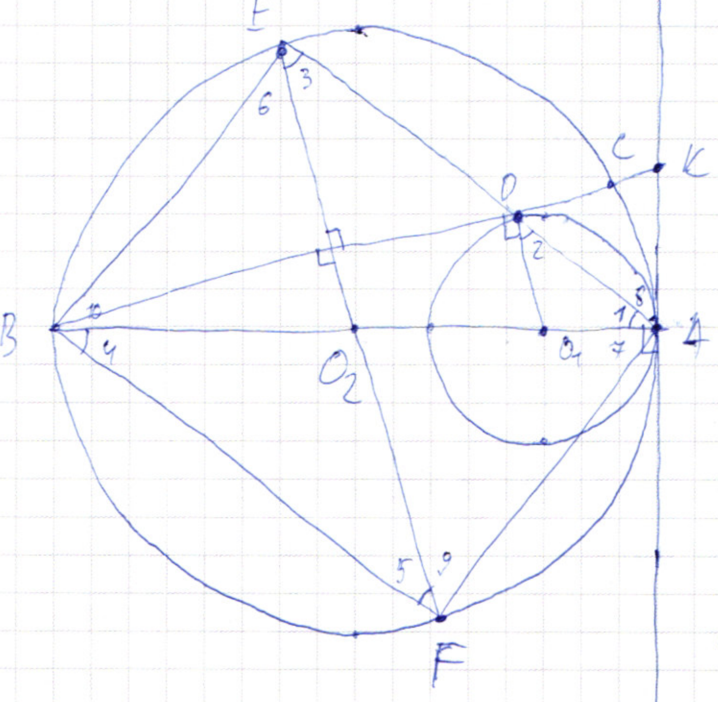
$\begin{cases} (x-6)(x+24) \le 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$



$\left[\begin{array}{l} -24 \le x < -18 \\ 0 < x \le 6 \end{array}\right.$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

№4



1. Пусть O_1 – центр ω т.к BC касается ω и $DO_1 \perp BC \Rightarrow DO_1 \parallel EF$ ~~аналогично~~

2. Проведём касательную AK к этим окружностям, аналогично $BA \perp AK$.

3. $DO_1 = O_1A$ (радиусы ω) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

4. $\angle 2 = \angle 3$ – соответственные при $DO_1 \parallel EF$ и AE

5. $\angle 3 = \angle 4$ т.к это вписанные углы лежащие на $\smile AF$

6. Аналогично $\angle 1 = \angle 5$

7. Из ~~всех прошлых~~ пунктов 3-6 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \alpha$

8. $\angle BEA = 90°$ т.к AB - диаметр Ω
$\Rightarrow \angle 6 = 90 - \alpha$

9. $\angle 6 = \angle 7$ т.к лежат на $\smile BF$

10. $\angle EAF = \angle 1 + \angle 7 = \alpha + 90 - \alpha = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow EF$ - диаметр $\Rightarrow$
$\Rightarrow EF$ пересекает AB в точке O_2 – центре Ω
Выходит, что $BEAF$ - прямоугольник

11. $\angle 8 = \smile AE = \angle 9 = \angle 10$, как угол между касательной и хордой

12. Аналогично пункту 8
$\angle 10 = \angle 9 = 90° - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle 6 = \angle 7 = \angle 9 = \angle 10 = \angle 8$

13. $\angle O_1DK = \angle O_1AK = 90° \Rightarrow O_1DKA$ – вписанный $\Rightarrow \angle DKA = \angle DO_1B$

14. $\angle DO_1B = \angle BO_2E$ – соответственные при $O_1D \parallel O_2E$ и AB

15. $\left.\begin{array}{l} \angle DKA = \angle DO_1B = \angle BO_2E \\ \angle 8 = \angle 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta DKA \sim \Delta BO_2E \Rightarrow \angle KDA = \angle 6 = \angle 8$
$\Rightarrow AK = DC = CK + 8$

16. AK - касательная $\Rightarrow$
$\Rightarrow AK^2 = CK(CK + 8 + 17) =$
$CK(CK + 25) = (CK + 8)^2$
$25CK = 16CK + 64$
$CK = \frac{64}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17. $AK = x+8 = \frac{64}{9}+8 = \frac{136}{9}$

$BK = x+25 = \frac{225+64}{9} = \frac{289}{9}$

18. $\triangle AKB$, по т. Пифагора:

$BK^2 = AK^2 + AB^2$

$AB^2 = \frac{17^4}{9^2} - \frac{(17\cdot 8)^2}{9^2} =$

$= \frac{17^2(17^2-8^2)}{9^2} = \frac{17^2\cdot 15^2}{9^2}$

$AB = \frac{17\cdot 15}{9} = \frac{17\cdot 5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ радиус $\Omega = \frac{17\cdot 5}{6}$

19. $\angle ABK$ - общий
$\angle O_1DB = \angle BAK = 90°$ $\Big\}$ $\triangle BAK \sim \triangle BO_2D$

$\Downarrow$

$\frac{O_1D}{AK} = \frac{BD}{AB}$

$\frac{O_1D\cdot 9}{136} = \frac{17\cdot 3}{17\cdot 5} = \frac{3}{5}$

$O_1D = \frac{136}{5\cdot 3} \Rightarrow$ радиус $\omega = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a-2b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$25-9b^2=5ab-4b^2$

$\cancel{a^2+9b^2=5ab+5b^2}$

$5=ab+b^2$

$a^2+9b^2=25$

$b^2+ab=5$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \\ a^2-5ab+4b^2=0 \end{cases}$$

$a^2=25-9b^2$

$D=25-16b^2\geq 0$

$(a+b)^2+10b^2=35$

$25-9b^2-5ab+4b^2=0$

$\cancel{a=5b\pm}$

$b^2+(a-2b)^2=5$

$(a-2b)^2=ab$

$25-5ab-5b^2=0$

$b^2+a^2-4ab+4b^2=5$

$a^2-4ab+5b^2=5$

$5-ab-b^2=0$

$ab+b^2=5$

$b^2+ab=5$

$(a-2b)^2+b^2=5$

$+ab=5-b^2$

$a^2+9b^2=5a^2-20ab+25b^2$

$\cancel{a^2=5}$

$b^2=5-ab$

$4a^2-20ab+16b^2=0$

$a^2-5ab+20-4ab=0$

$-\begin{array}{r}25\\9\\\hline 16\end{array}$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$a^2-9ab+20=0$

$8x^2+30x+14=0$

$f(x)=f(x)+0$

$5+a^2+ab=(a+b)^2$

$D_1=225$

$\begin{array}{r}17\\ \cdot\ 8\\\hline 136\end{array}$

-136

89

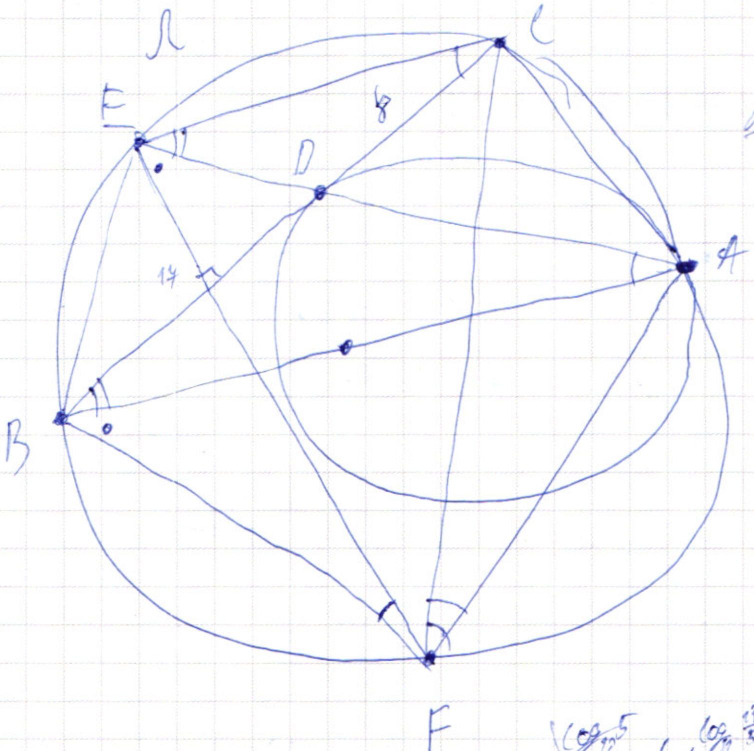
$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)=\left[\frac{x}{y}\right]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

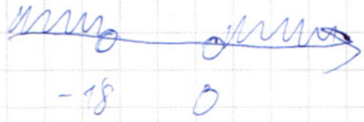
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$



$t^{\log_{12}5}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}+1\right)\geq 0$

$x^2+18x=t>0$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+t\geq 13^{\log_{12}t}$

$12^{\log_{12}t}$

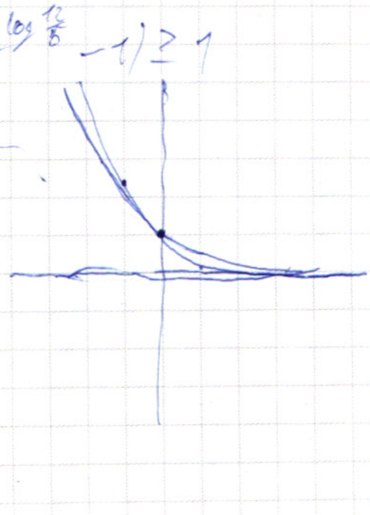
$t^{\log_{12}5}+t^1\geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}}\left(t^{\log\frac{12}{5}}-1\right)\geq 1$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}}+t^{\log_{12}\frac{12}{13}}\geq 1$

$144+81 = 225$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t}\geq 1$



$\left(\frac{5^2}{13^2}\right)^k+\left(\frac{12^2}{13^2}\right)^k\geq 1$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}}+t^{\log_{12}\frac{12}{13}}\geq t^0$

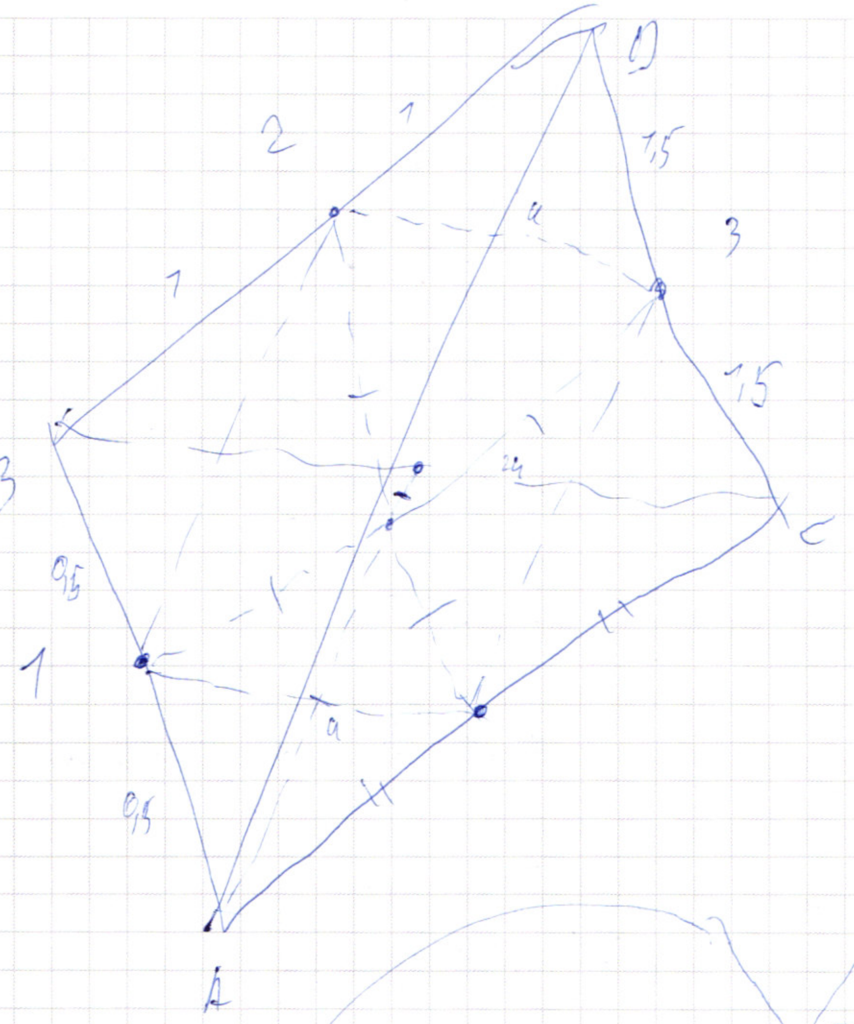
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

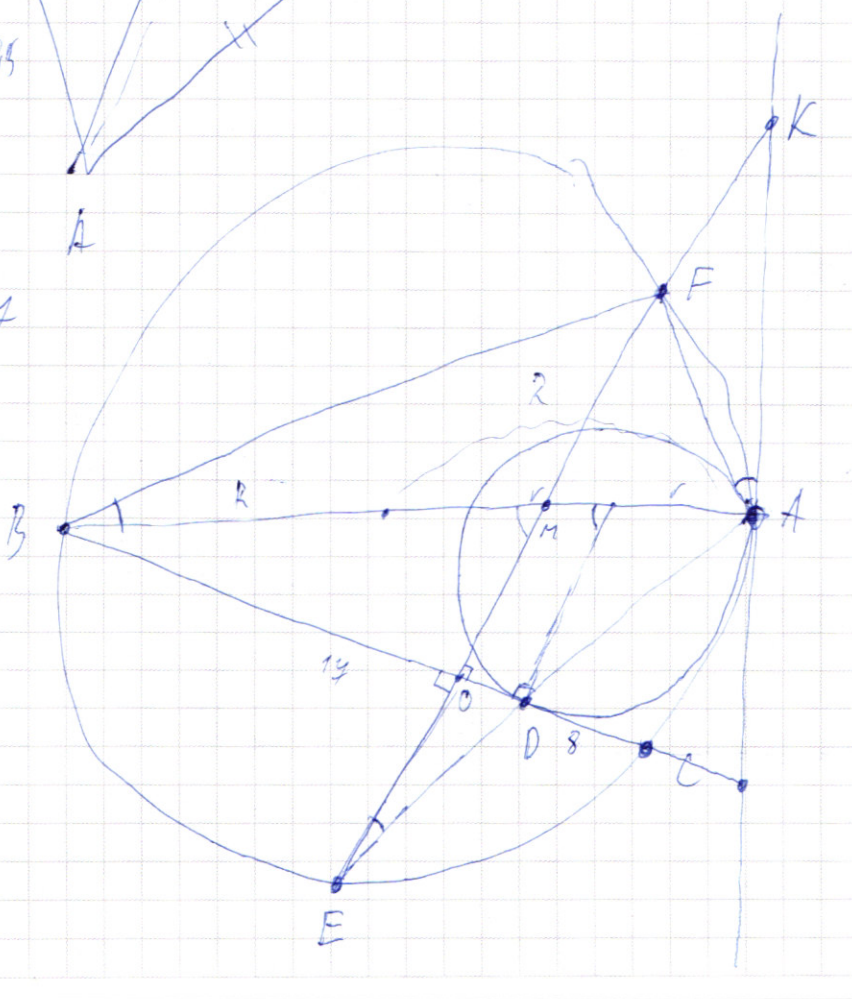


$$2R(2R-2r)=14$$

$$\frac{2R-r}{2R-2r}=\frac{r}{OM}$$

$$\frac{AK}{KE}=\frac{AF}{AE}=\frac{FK}{AK}$$

$$AK^2=FK\cdot KE$$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$\log_{12^2} 13^2 - \log_{12^2} 5^2$

$a \geq t$ $\quad 169 - 144 = 25$

$\log_{12^2} 12^2$

$a^b \geq a^c$

$(a-1)(b-c) \geq 0$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^a + t^b \geq t^c$

$t \geq t^{\log_{12^2} 13^2} - t^{\log_{12^2} 5^2}$

$(t-1)($

$t^b (t^{a-b} + 1) \geq t^c$

$t \geq t^{\log_{12} 5} (t^{\log_{12} \frac{13^2}{5^2}}$

$t^{b-c} (t^{a-b} + 1) \geq 1$

$5 = \sqrt{13^2 - 12^2}$

$t^{a+b} \geq -1$

$(13^2 - 12^2)^{\frac{1}{2}\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq (5^2 + 12^2)^{\log_{12^2} t}$

$a^t + b^t \geq c^t$

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

$a^k + b^k \geq c^k$

$c^2 = a^2 + b^2$

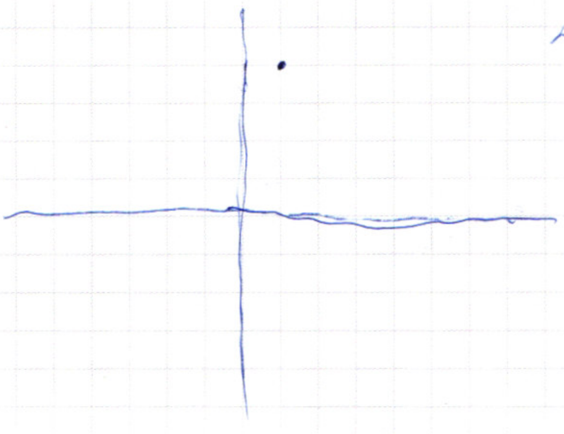
$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$25^k + 144^k \geq 169^k$

$$\begin{cases} (x-2) - 2(y-1) = \sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$x - 2 = a, \; y - 1 = b$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\,136 \\ \hline 253 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 289 \\ +\,136 \\ \hline 425 \end{array}$$

$425 \cdot 253$

$$\begin{array}{r|l} 425 & 5 \\ 40 & 85 \\ 25 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ 5 & 17 \\ 35 & \end{array}$$

$$\frac{17 \cdot 25 \cdot 11 \cdot 23}{9^2} = AB = \frac{5}{9}\sqrt{17 \cdot 11 \cdot 23}$$

$$\begin{array}{r|l} 253 & 17 \\ 17 & 1 \\ \hline 73 & \end{array}$$

$2a^2 - 2a^2 \cdot \cos\alpha = 2r^2 + 2r^2 \cdot \cos\alpha$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot\, 9 \\ \hline 153 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \cdot\, 4 \\ \hline 68 \\ +\,17 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 253 & 11 \\ 22 & 23 \\ 33 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ -\,8 \\ \hline 176 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

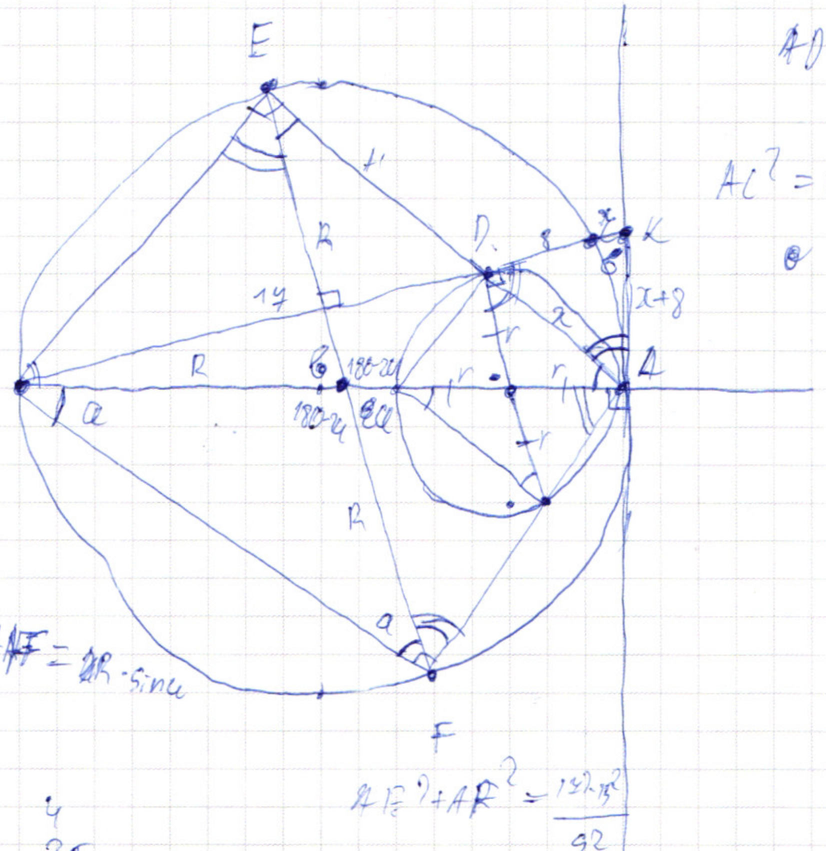
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AD \cdot DE - 8\sqrt{36}$ $DE^2 = \frac{9}{2(1+\cos\beta)} =$

$AC^2 = x(x+25) = 2R^2(1+\cos\beta)$

$AD^2 = \frac{136}{9} \cdot 2(1-\cos\beta)$

$\frac{r}{AC} = \frac{2R}{17} =$

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{2R} = \frac{2R-2r}{x+25}$

$\frac{r}{x(x+25)}$ $\frac{r}{x} = 2R-2r$

$x = \frac{r}{2R-2r}$

$AE \cdot AF = 2R \cdot \sin a$

$AE^2 + AF^2 = \frac{17^2 \cdot 8^2}{9^2}$

$(x+8)^2 = x(x+25)$

$x^2 + 16x + 64 = x^2 + 25x$

$9x = 64$

$x = \frac{64}{9}$

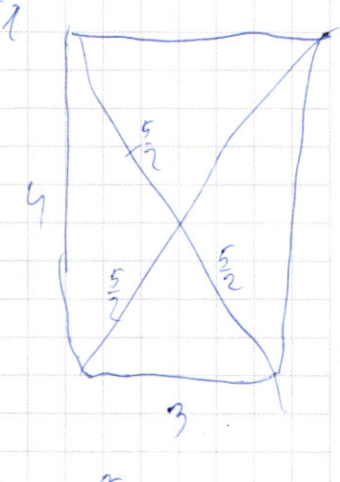
$25 \cdot 9 = 225$, $225 + 64 = 289$

$\frac{289}{9}$ $\frac{136}{9}$

$64 + 72 = 136$

$\frac{9r}{136} = \frac{17}{2R}$

$289 - 64 = 225$



$AE^2 = 2R^2 + 2R^2\cos a$

$AF^2 = 2R^2 - 2R^2\cos a$

$\frac{17}{2R} = \frac{2R-2r}{289} \cdot 9$

$\frac{AE}{AF} = \frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a} = tg(90-a)$

$\frac{17^2 - (17 \cdot 8)^2}{9^2} = \frac{17^2(17^2-8)^2}{9} =$

6 $\frac{5}{2}\sqrt{15}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$2\sin(a+b)\cos(a+b)$

$$\frac{\sin 2a\cdot 2}{\sqrt{5}} - \frac{\cos 2a\cdot 1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2a\cdot\cos 2b+\cos 2a\cdot\sin 2b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2a-\cos 2a=-1$$

$$\sin 2a\cdot\cos 4b+\cos 2a\cdot\sin 4b+\sin 2a=-\frac{4}{5}\qquad 2\sin 2a$$

$\cos 4b = 2\cos^2 2b-1$, $\sin 4b = 2\sin 2b\cos 2b$

$$\sin 2a(2\cos^2 2b-1+1)\ldots=-\frac{4}{5}$$

$$2\sin 2a\cos^2 2b+2\cos 2a\cdot\sin 2b\cdot\cos 2b=-\frac{4}{5}$$

$$2\cos 2b(\sin 2a\cos 2b+\cos 2a\cdot\sin 2b)=-\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a}$$

$$2\cdot\cos 2b\,\sin(2a+2b)=-\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

$$2\cdot\cos 2b\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos 2b=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sin 2a\cdot 2}{\sqrt{5}}+\frac{\cos 2a\cdot 1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2b=\pm\sqrt{\frac{5}{5}-\frac{4}{5}}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2 2b=\frac{1}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l}2\sin 2a+\cos 2a=-1\\ 2\sin 2a-\cos 2a=-1\end{array}\right.$$

$$2\sin a+\cos a=0$$

$$2\sin 2a+2\cos^2 a-1=0-1$$

$$2\operatorname{tg} a-1=0$$

$$2\sin a\cdot\cos a+\cos^2 a=0$$

$$\operatorname{tg} a=\frac{1}{2}$$

$$\cos a(2\sin a+\cos a)=0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$x(y-1) - 2(y-1)$

$x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$x - 2y = x - 2 \overset{-2y+2}{-2(y-1)}$

$x - 2 = a$

$y - 1 = b$

$\begin{cases} a^2 + 9b^2 = 25 \\ a - 2b = \sqrt{ab} \end{cases}$

$ab \geq 0$

$\begin{cases} a \geq 2b \\ a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \end{cases}$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

$(3y-3)^2 = 9y^2 -$

$12 + 9 + 4 = 25$

$(x-2) - 2(y-1) = x - 2y$ ($-2y+2$)

$9y^2 - 18y + 9 =$

$= 9(y^2 - 2y + 1)$

$x^2 + 18x = t \qquad t > 0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$\frac{5}{5} \quad 5 \cdot 5^{-1}$

$t^{\log_{12} 5 - \log_{12} 13} + t^{1 - \log_{12} 13} = 1$

$t^{\log \frac{5}{13}} + t^{\log \frac{12}{13}} = 1$

$t^{\log \frac{5}{13}} (t^{\log \frac{12}{5}} - 1) = 1$

$\cancel{25 - b^2 - 5ab + 4b^2 = 0}$

$\cancel{25 - 5ab + 3b^2 = 0}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_{12} t}$

$\cancel{\log_{12} t \cdot \log_{12} 5}$

$\cancel{5ab - 3b^2 = 25}$

$\cancel{2a^2 - 5ab + 5b^2 = 25}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)