МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [~~3 балла~~] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [~~4 балла~~] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [~~5 баллов~~] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$ 17

4. [~~5 баллов~~] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Замена:

$\sin 2\alpha = a \quad \sin 2\beta = b$
$\cos 2\alpha = c \quad \cos 2\beta = d$

$a, c, b, d \in [-1; 1]$.

$\operatorname{tg}\alpha = ?$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \cos 2\beta \cdot \sin 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ad + b \cdot c = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ a(d^2 - b^2) + 2 \cdot c \cdot b \cdot d + a = -\frac{2}{5} \quad (2) \end{cases}$$

Заметим, что по основному триг. тождеству:
$a^2 + c^2 = 1$
$b^2 + d^2 = 1$

$bc = -\frac{1}{\sqrt{5}} - ad \quad (1)$

Подставим (1) во (2)

$a + ad^2 - ab^2 - 2ad^2 - \frac{2d}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$

$a + (-a(b^2 + d^2)) - \frac{2d}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$

$a - a - \frac{2d}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \quad d = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{20}}{5} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + c \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Big| : \frac{\sqrt{5}}{5} \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - c \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Big| : \frac{\sqrt{5}}{5} \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2c = -1 \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a - 2c = -1 \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Если $\cos 2\alpha = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не сущ.

$\underline{a = -2c - 1}$ $\quad$ $\underline{a = 2c - 1}$

$c^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 1$ $\quad$ $c^2 + 4c^2 - 4c + 1 = 1$.

$5c^2 + 4c = 0$ $\quad$ $5c^2 - 4c = 0$.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{c} = \pm\frac{3}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 = -\frac{4}{5} \Rightarrow a = \pm\frac{3}{5} \\ c_2 = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} c_3 = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \pm\frac{3}{5} \\ c_4 = 0 \end{array}\right.$$

т.к. по условию известно, что значений $\operatorname{tg}\alpha$ не меньше 3, то оба случая подходят:

1) $3 - 3\operatorname{tg}^2\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha \quad 3\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{8 \pm 10}{6} \quad \operatorname{tg}_1\alpha = 3 \quad \operatorname{tg}_2\alpha = -\frac{1}{3}$

2) $3\operatorname{tg}^2\alpha + 8\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-8 \pm 10}{6} \quad \operatorname{tg}_1\alpha = \frac{1}{3} \quad \operatorname{tg}_2\alpha = -3$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \{-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 3\}$

№ 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90 \end{cases}$$

ОДЗ:
$x-12y \geq 0$

Замена:

$2y-1=a$
$x-6=b$
на ОДЗ:
$b-6a \geq 0$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$ab=b^2-12ab+36a^2$

$b^2-13ab+36a^2=0$

при $a=0$ $b=0$.
при $a\neq 0$. поделим всё на a^2

$\left(\frac{b}{a}\right)^2-13\left(\frac{b}{a}\right)+36=0$

$\frac{b}{a}_1=4$ $\frac{b}{a}_2=9$

$b=4a$ или $b=9a$
не уд. ОДЗ

$a\neq 0$, т.к. тогда во 2 уравнении $0+0=90$ ✗.

$9a^2+81a^2=90$

$a^2=1$

$a=\pm 1$

$b=\pm 9$

$$\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2y-1=-1 \\ x-6=-9 \end{cases}$$

$y_1=1$
$x_1=15$

$x_2=-3$
$y_2=0$

$-3 \geq 0$
ложно
тогда не подходит.

Проверим:

1) $\begin{cases} 3=3 \\ 90=90 \end{cases}$
верно

Ответ: $x=15$; $y=1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ:
$10x - x^2 > 0.$
$x(10-x) > 0$

~~10x + ...~~

Лемма: $a^{\log_b c} = \left(\left(b^{\log_b a}\right)\right)^{\log_b c} = b^{\log_b a \cdot \log_b c}$ на ОДЗ.

~~$10x + 3^{\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$~~

$b^{\log_b a \cdot \log_b c} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$, таким образом $\underline{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$.
на ОДЗ:

$10x - x^2 + 4^{\log_3|x^2-10x|} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$|x^2-10x| > 0$

Замена: $\log_3|x^2-10x| = t = \log_3 10x - x^2$

$10x - x^2 > 0$
$10x - x^2 = |x^2 - 10x|$
т.к. $x \in (0;10)$

$3^t = |x^2-10x| = 10x - x^2$

т.к. $x \in (0;10)$.

$3^t + 4^t \geq 5^t \;\; |:5^t$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1.$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t$ при $t \geq 0$ монотонно $\downarrow$
при $t < 0$ монотонно $\uparrow$

$\frac{3}{5} < 1.$

аналогично для $\left(\frac{4}{5}\right)^t$.

сумма двух монотонно $\uparrow$ или $\downarrow$ функций
равенство достигается при $t = 2$. монотонно и $\uparrow$ или убывает.
ограничено прямая $y = 1$.

$3^t + 4^t \geq 5^t$

при $t = 0$ $\quad 2 \geq 1$ верно.
при $t = 2$ $\quad 1 = 1$ верно $\quad$ дальше $\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t < 1$

тогда н-во верно при всех $t \leq 2$,

т.к. слева будет $\uparrow 1$. т.к. функция убывает при $t > 2$.

$\log_3|x^2-10x| \leq 2$

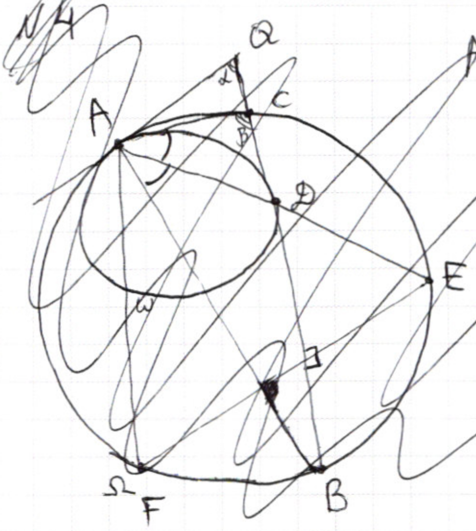
$\log_3(10x - x^2) \leq 2.$

$\log_3(10x - x^2) \leq \log_3 9 \qquad 3 > 1$

$10x - x^2 - 9 \leq 0.$
$x^2 - 10x + 9 \geq 0.$
$x(x-1) - 9(x-1) \geq 0$
$(x-9)(x-1) \geq 0$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$.

~~№4~~



~~AB - диаметр Ω~~

~~BC кас. ω в т. D EF ⊥ BC~~

~~$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$ => BC = 16.~~

~~Докажем, что AE - биссектриса угла CAB.~~

~~Проведем касательную AQ через точку A.~~

~~AQ = QD (как касательные к ω из одной точки)~~

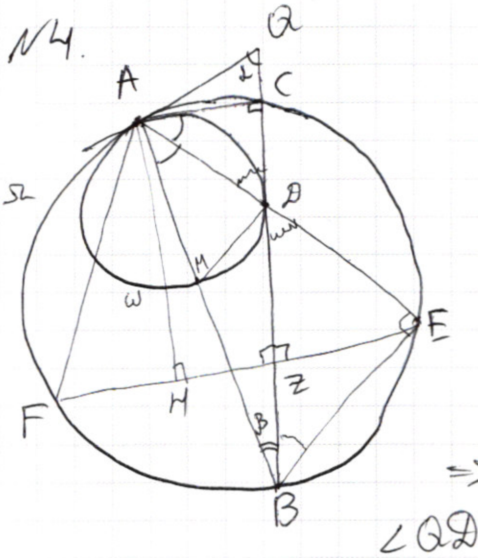
~~=> ΔAQD р/б пусть AQB = α.~~

~~$\angle ACB = \beta$ $\angle QDA = \angle QAD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.~~

~~$\angle CAD = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \beta = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \beta$.~~

~~$\angle ABC =$ $\angle QAD$ $\angle QAB = \beta$ (как угол между кас. и хордой).~~

№4.



AB - диаметр Ω

BC кас. к ω в т. D, EF ⊥ BC

$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$ => CD = 16

~~Докажем~~, что AE - биссектр. ∠CAB

Проведем кас. AQ через точку A

AQ = QD (как касательные из 1 точки к ω).

=> ΔAQD р/б.   Пусть $\angle AQD = \alpha$

$\angle QDA = \angle QAD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ $\angle QBA = \beta$

$\angle ADB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ => $\angle DAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$.

$\angle QAC = \beta$ (как угол между кас. и хордой) => $\angle CAD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$ => $\angle DAB = \angle CAD$ тогда AE-бис. ∠CAB.

по св-ву биссектрисы $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{15}{17}$ пусть CA = 15x, AB = 17x.

т.к. ∠ACB впис. и опирается на диаметр => $\angle ACB = 90^\circ$.

по т. Пифагора из ΔCAB $AC^2 + BC^2 = AB^2$ AC = 30

$225x^2 + 256 = 289x^2$

$AB = 2R_\Omega = 34$ => $R_\Omega = 17$. $64x^2 = 256$ $x^2 = 4$ => $x = 2$.

$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD}$ $AD = \sqrt{AB\cdot AC - CD\cdot DB} = \sqrt{30\cdot 34 - \frac{17\cdot 15}{4}} = \sqrt{\frac{16\cdot 17\cdot 15 - 17\cdot 15}{4}} =$

$= \frac{15\sqrt{17}}{2}$ $\sin\angle CAD = \frac{30\cdot 2}{\cancel{15}\cdot\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\cos\angle CAD = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

~~AM~~ $MB\cdot AB = BD^2$ (по т. о ~~хорде~~ секущ. и кас.)

$MB = \frac{\cancel{289}\,17}{4\cdot\cancel{34}\,2} = \frac{17}{8}$ $AM = 34 - \frac{17}{8} = 34 - 2\frac{1}{8} = 31\frac{7}{8}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение).

$\cos\angle MBD = \frac{CB}{AB} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$.

по т. косинусов из Δ MBD: $MD^2 = MB^2 + DB^2 - 2\cos\angle MBD \cdot MB \cdot DB$

$MD^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - \cancel{2} \cdot \frac{8}{\cancel{17}} \cdot \frac{17}{8} \cdot \frac{17}{\cancel{2}} = \frac{17^2}{64} + \frac{16 \cdot 17^2}{64} - 17 = \frac{17^2 + 16 \cdot 17^2 - 64 \cdot 17}{64} =$

$= \frac{17 \cdot 17^2 - 64 \cdot 17}{64} = \frac{17 \cdot 225}{64}$ $\quad MD = \frac{15\sqrt{17}}{8}$.

$\frac{MD}{\sin\angle DAB} = 2R_\omega$ (по теореме синусов). $\quad \frac{15\sqrt{17}}{8} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = 2R_\omega \quad \frac{15 \cdot 17}{32} = 2R_\omega$

$R_\omega = \frac{255}{64} \quad \frac{15 \cdot 17}{64} = R_\omega$

$\Delta CAD \sim \Delta DZE$ (по 2 углам).

$\angle AEB = 90°$ (т.к. вписс. и опирается на диаметр.)

$\Delta ACD \sim \Delta DBE$ (по 2 углам)

$\frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DE}$. $\quad DE = \frac{\frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 2}{15\sqrt{17}} = \frac{17}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$AE = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{15\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$ $\quad$ по т. синусов: $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R_\Omega$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R_\Omega} = \frac{8\sqrt{17}}{34} = \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\angle AFE < 180°$ т.к. вписс.

$\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$. $\quad \frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DZ} \quad \frac{CD}{DZ} = 15 \quad DZ = \frac{CD}{15} = \frac{1}{2}$.

$\Delta ADE \sim \Delta DEZ$ (по 2 углам) $\quad \frac{DE}{AE} = \frac{DZ}{AH} = \frac{1}{16}$. $\quad AH = 8$.

Из ΔDEZ по т. Пифагора. $\quad DZ^2 + ZE^2 = DE^2$

$\frac{1}{4} + ZE^2 = \frac{17}{4} \quad ZE = 2$

$FZ \cdot ZE = CZ \cdot ZB$ (по т. о пересеч. хордах)

$CZ = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8$.

$FZ \cdot 2 = 64$

$ZB = \frac{17}{2} - 12 = 8$.

$FZ = 32 \quad FE = 34$. $\quad S_{AFE} = \frac{1}{2} AH \cdot FE =$

$= \frac{1}{2} 34 \cdot 8 = 34 \cdot 4 = 136$

Ответ: $\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$; $S_{\Delta AFE} = 136$

$R_\Omega = 34$; $R_\omega = \frac{255}{64}$

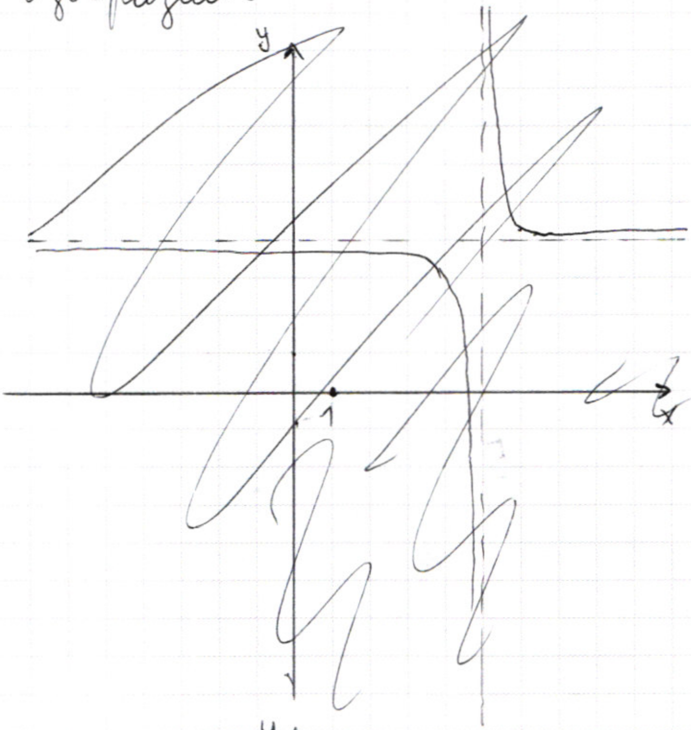
№6

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$

(1) (2) (3)

1) - гипербола 2) - прямая 3) - парабола.

Изобразим



$y=-32x^2+36x-3$

ветви вниз $D>0 \Rightarrow 2$ корня

$x_0=+\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$ - вершина.

$y_0=-32\cdot\frac{81}{16\cdot16}+\frac{36\cdot9}{16}-3=$

$=-\frac{81}{8}+\frac{\overset{18}{36}\cdot9}{16_8}-3=\frac{-81+162-3\cdot8}{8}=$

$=\frac{81-24}{8}=\frac{57}{8}=$

$=7\frac{1}{8}.$

$x_1=0 \quad y=-3.$

$x=1 \quad y=-32+36-3=1$

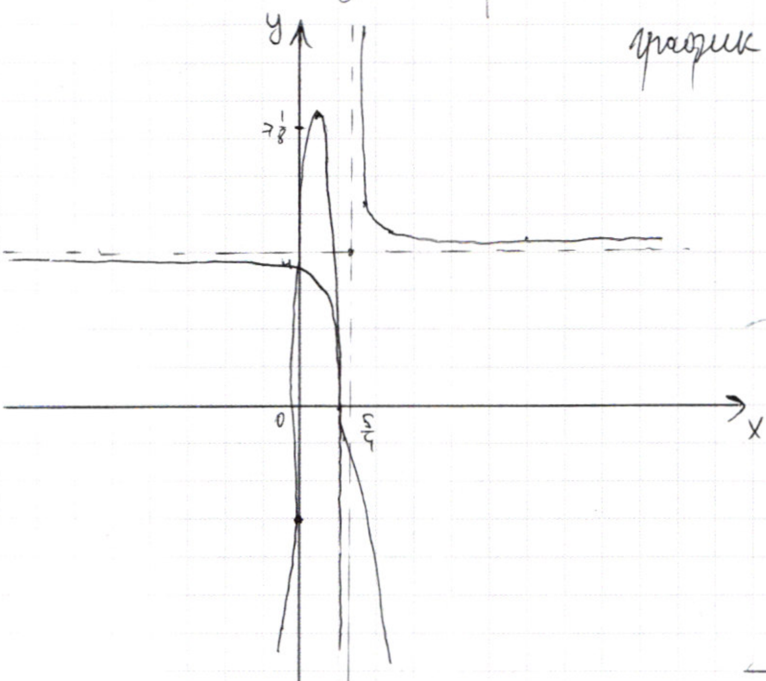
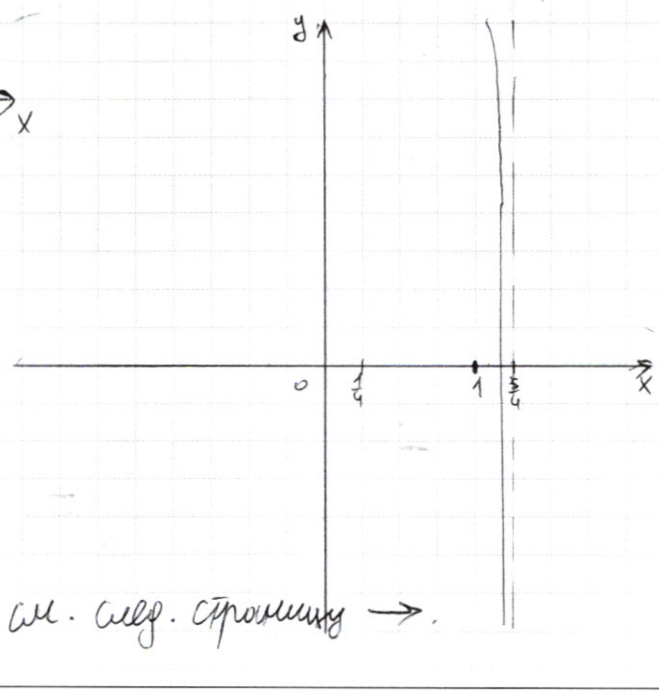


график примерный.

$y=ax+b$ для всех $x\in[\frac{1}{4};1]$.

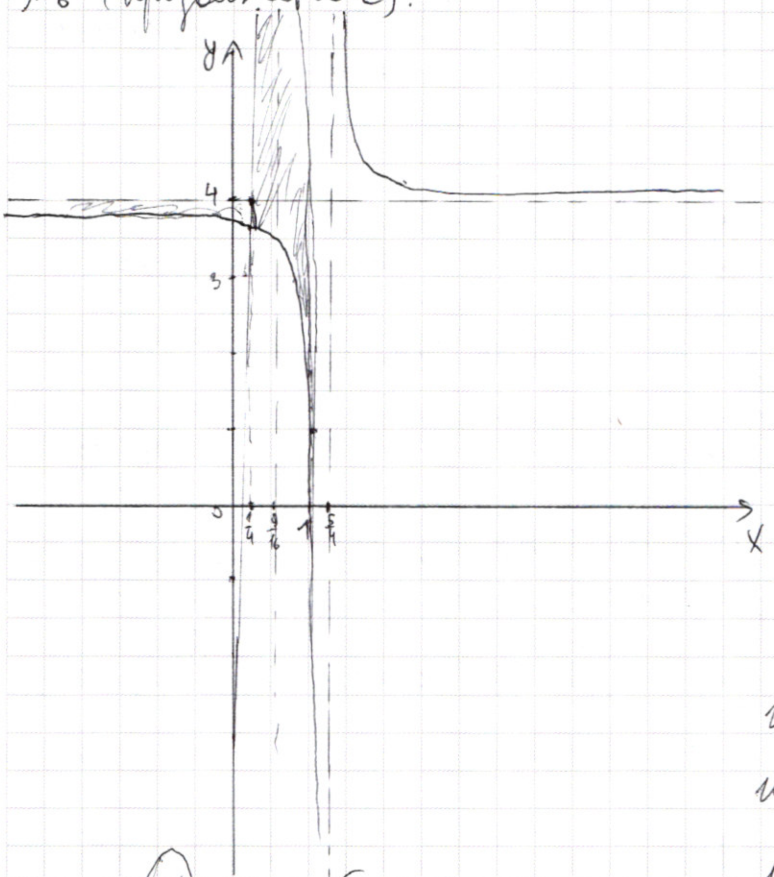
рассмотрим промежуток $x\in[\frac{1}{4};1]$ крупнее



см. след. страницу →.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение).



гипербола при $y=0$ $x=1$.

и парабола при $y=4$ $x=1$.

т. е. все точки прямой лежат выше гиперболы и ниже параболы.

второй раз они пересек. уже за $x=1$ (правее).

для параболы $x=\frac{1}{4}$

$y=-32\cdot\frac{1}{16}+9-3=4$

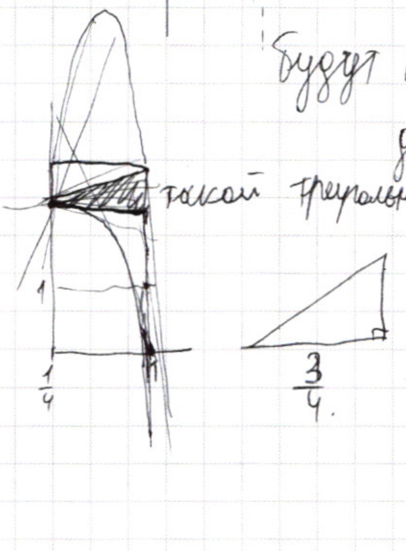
в первый раз они пересекаются левее $x=\frac{1}{4}$.

гипербола в точке $x=\frac{1}{4}$ $y=3$.

гипербола в точке $x=1$ $y=0$.

будут прямые с $x=\frac{1}{4}$

для которых все точки $x\in[\frac{1}{4};1]$ лежат в нужной области.

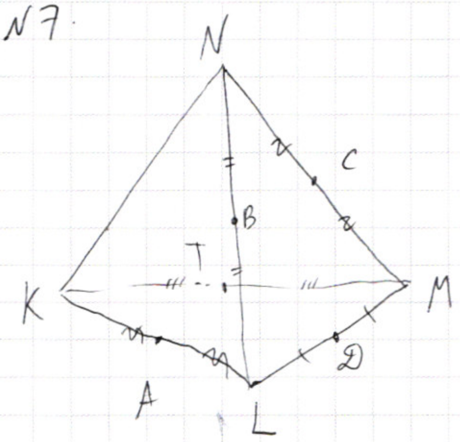


такой треугольник

в т. $x=1$ гипербола $y=0$.

$\frac{3}{4}$.

№7.

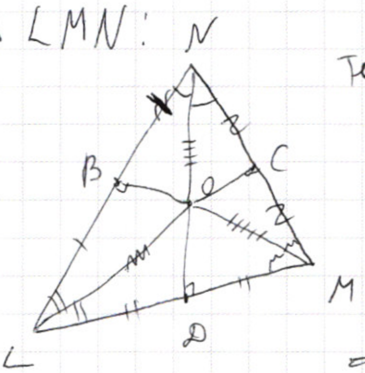


сфера проходит через точки A, D, B, C, N, T
где A, B, C, D, T - середины ребер кроме KN

$KL = 3;\ KM = 1;\ MN = \sqrt{2}$.

т.к. любое сечение сферы - окружность то в $\triangle LNM$ точки B, C, D - точки касания впис. окружности и сторон

$\triangle LMN$:



Тогда $\triangle LBO = \triangle LOD$ (по двум углам и общей стороне)
$\triangle NOB = \triangle NOC$
$\triangle OCM = \triangle ODM$ О - лежит в т. пересеч биссектр. (центр. впис окр.)

$\triangle BNO = \triangle LBO$
$\triangle NOC = \triangle COM$ (по двум углам и радиусу (т.е. общей стороне),
$\triangle LOD = \triangle ODM$

$\Rightarrow \triangle LBO = \triangle BON = \triangle NOC = \triangle OCM = \triangle ODM = \triangle LOD$ (по транзитивности).

$ABCT$ - параллелограмм, т.к. $AT \parallel LM \parallel BC$, $CT \parallel BA \parallel KN$
$BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$
прямоугольник, т.к. $ABCT$ - ~~окки~~ (по св-ву ср. линии).

Откуда

$LN = NM = LM = \sqrt{2}$.

Ответ: $LM = \sqrt{2}$.

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ и $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ для простого числа p

$p = 4k+1$ или $p = 4k+3$. или $p = 2$. ,т.к. $p = 4k+2 \ \vdots 2$

$f(p) = \frac{p-3}{4}$ или $f(p) = 0$, при $p = 2$ $\quad f(p) = \frac{p-1}{4}$.

$2 \le x \le 25 \quad 2 \le y \le 25 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$. ~~Пр~~ $\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)}$

при $x = 2$ $\quad f(p) = 0 \quad f(xy) = f(2) + f(y) \quad f(2y) = f(y)$.

$f(3) = 0$. ~~$f(4) = 0$~~ $f(5) = 1$.

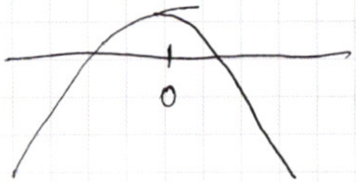
$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$. $\quad f(1) = f(1) + f(1) \quad f(1) = 0$.

$f(6) = f(2 \cdot 3) = 0$. $\quad f(7) = 1 \quad f(8) = f(2 \cdot 4) = 0$ для всех четных

для всех ~~составных~~ четных чисел $x \cdot y \le 625$ $\quad f(xy) = 0$.

~~$x \cdot y$ - простое, если $x \cdot y$ x или $y = 1$~~ Из такого ряда

~~$f(xy) =$~~ $\quad xy = 2^{i} \cdot p_i \Rightarrow f(xy) = 0$.



$3^t + 4^t \geqslant 5^t.$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t = a$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t = b.$

$a + b$

$a^t + b^t \geq 1$

$a^2 + b^2 = 1.$

$a^{t-2} + b^{t-2} \geq 0.$

$\overline{x - \frac{5}{4}}$

$x = 1.$

$y = 4 + (-4)$

$x \neq 5.$

$4 + \frac{4}{119} \approx \frac{1}{5}$

$\frac{1}{x - \frac{5}{4}}$

$4x - 5 = 2.$

$x = \frac{7}{4}.$

$x \neq \frac{5}{4}.$

$x = \frac{5}{4}$

$y = 8.$

-81

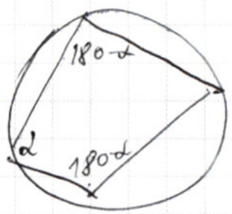
$18 \times 9 = 162$

-81

$81 - 24$

$81 - 24 = 57$

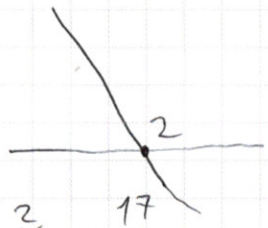
$\frac{-12}{-4}$



$2\alpha = 90^\circ$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^t_{\downarrow} + \left(\frac{4}{5}\right)^t_{\downarrow} \geq 1$



$a > 0$ $\quad t \leq 2$.

$\frac{3}{5} +$

$\cos^t\alpha + \sin^t\alpha \geq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

$\underset{\geq 0}{\sin^2}(\underset{\leq 0}{\sin^{t-2} - 1}) + \underset{\geq 0}{\cos^2}(\underset{\leq 0}{\cos^{t-2} - 1}) \geq 0$.

≤ 0 $\quad \cos^{t-2} = \cancel{1}$

$\cancel{34x}$ $\quad x \cdot 34^2 = \frac{289^{17}}{2}$.

$x = \frac{17^2}{4}$. $\quad \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$17 + \frac{x}{15} \; 289 + 16$; 17^2

17

$289 + 16$

$17 \cdot 17^2$

AM. $\quad$ DM

MD.

AM-.

$\cos\beta =$

$\sin\beta = \frac{\cancel{CB}\, AC}{AB} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$.

$\cos\beta = \frac{8}{17}$.

$34 + 4 = 136$

$\sqrt{34 \cdot 30 - \frac{17 \cdot 15}{4}}$

$\frac{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 15 - 17 \cdot 15}{4}$

$180 - \frac{\alpha}{2}$. $\quad 90 - \frac{\alpha}{2} - \beta$. $\quad \alpha + \beta$.

$90 - \frac{\alpha}{2} - \beta$

$180 - \frac{\alpha}{2} - \beta - \beta$

$90 - \frac{\alpha}{2}$.

$90 - \frac{\alpha}{2} - \beta$. $\quad 90 - \frac{\alpha}{2} - \beta$. $\quad 90 + \frac{\alpha}{2}$

$180 + \frac{\alpha}{2} - 90 + \beta - \beta$ $\quad 180 - 90 + \frac{\alpha}{2}$ $\quad \alpha + \beta$.

$\frac{\alpha}{2} + 90$. $\quad 90 + \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{\alpha}{2} + \beta$

$180 - \frac{\alpha}{2} - \beta$ $\quad 180 +)$

sin

$\sin 2\varphi = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$. $\quad 180 - \frac{\alpha}{2}$. $\quad 90 + \frac{\alpha}{2}$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad tg\,\alpha$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$f(ab) = f(a)+f(b)$.

$\sin 2\alpha = a \quad \cos 2\alpha = c$

$\sin 2\beta = b \quad \cos 2\beta = d$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $+a$

$a^2+c^2=1$

$b^2+d^2=1$.

$a\cdot d + b\cdot c = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad bc = -\frac{1}{\sqrt5} - ad$.

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$b = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$.

$a\cdot(d^2-b^2) + 2\cdot b\cdot d\cdot c + a = -\frac{2}{5}$

$ad^2 - ab^2 + 2d\left(-\frac{1}{\sqrt5} - ad\right) = -\frac{2}{5}$

$-ad^2 - ab^2 - \frac{2d}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$

$-a + \frac{2d}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$ $\quad \frac{2d}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$ $\quad d = \frac{\sqrt5}{5}$

$a(d^2-b^2) + 2bdc + a = -\frac{2}{5}$ $\quad a\cdot\frac{\sqrt5}{5} \pm c\cdot\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{\sqrt5}$

$a \pm 2c = -1$.

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$. $\quad 6\cdot2\cdot3$

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$.

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$.

$\overset{\shortparallel}{a} \quad \overset{\shortparallel}{b}$.

$2y(x-6) - (x-6)$

$a^2+b^2=90$

$a-2b=$

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$a^{\log_c b} = \left(a^{\log_c a}\right)^{\log_c b} = a$

$c^{\log_c a\cdot\log_c b}$.

$9+16$

$\frac{-3\pm5}{4}$.

$2\,tg^2\alpha - 3\,tg\,\alpha - 2 = 0$

$3\,tg\,\alpha = 2 - 2\,tg^2\alpha$.

$4-4$

$\frac{3}{4} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$64+36$

$a = \pm\frac{3}{5} \quad a=1$

$c=-\frac{4}{5}$

$c = 0$ или $c = -\frac{4}{5}$

$c = \frac{4}{5}$

$a = (2c+1)$

$(2c+1)^2 + c^2 = 1$.

$5c^2+4c=0$

$c(5c+4)=0$

$\frac{3}{4} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

$3\,tg^2\alpha + 8\,tg\,\alpha - 3 = 0$

$\log_3 (10x - x^2) = t$.

$3^t = 10x - x^2$

$3^t + 3^{t\cdot\log_3 4} \geq 5^t$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

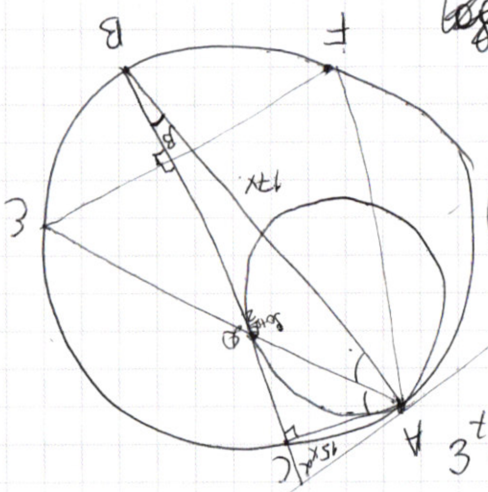
(Нумеровать только чистовики)

$\log_3|10x-x^2|=t$

$t^3 = f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] = \frac{p-1}{4} = \frac{p-3}{4}$

$t^3 \; f(ab)=f(a)+f(b)$

$3^t=10x-x^2$



$3^t(1+$

$3^t+3^{t+\log_3 4} \geq 5^t$

$81a^2+8b^2$

$800^2=80$

$a=\pm1$

$b=\pm4$

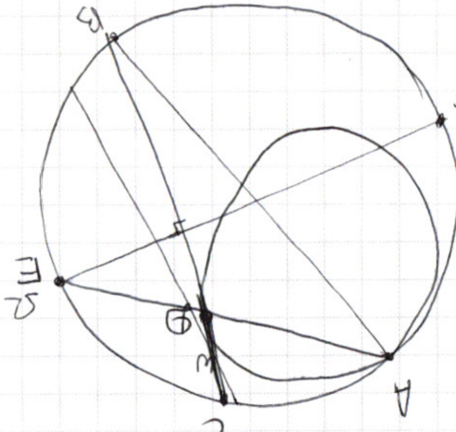
$8+16$

$8+16$

$16+8$

$y=0$

$x=15$



$80-\frac{\alpha}{2}$

$80-80+\frac{\alpha}{2}+\beta$

$t^2-13t+36=0$

$t_{1,2}=\frac{169-144}{2}=\frac{13\pm5}{2}$

$36^2 \cdot 4 = 144$

$\boxed{4}\;\boxed{8}$

$f(2)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$R=\boxed{17}$

$x=2$

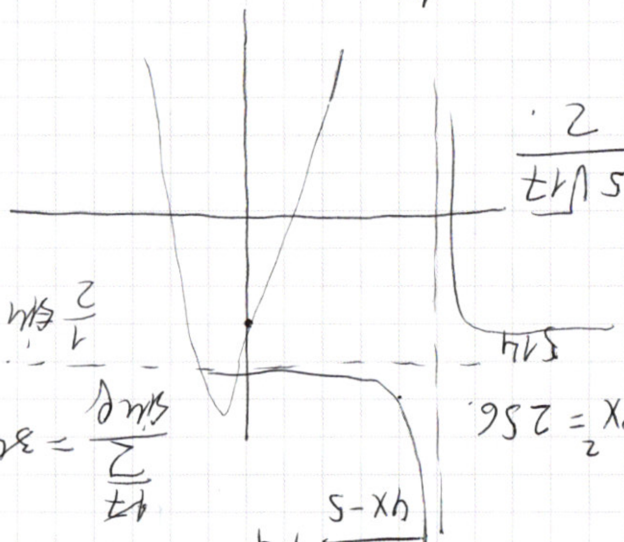
$64x^2=\frac{15\sqrt{17}}{2}$

$\frac{288}{225}$
514

$22 \quad 225x^2+289x^2=256$

$15x^2$

$\frac{32}{2}=16$



$\frac{4}{4x-5}+4$

$\frac{17}{2}\sin\varphi=34$

$\frac{1}{2}\sin\varphi=1$

$36^2-3\cdot4\cdot32$

$32 \cdot 12 = 64 + 32 = 384$

$36 \cdot 36 = 216 + 108 = 1296$

$1296 - 384 = 912$

$MD=$

$x_0=$

$x_0=\frac{-36}{-32\cdot2}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$

$32x^2+36x+3=0$

$\frac{16x-20}{4}+\frac{4}{4}$

$k+1$
$4k+3$

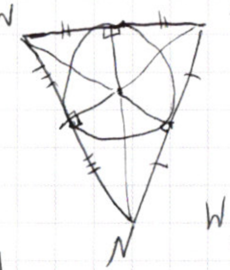
$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

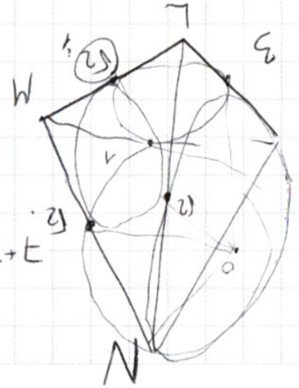
$f(ab)=f(a)+f(b)$

$\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4}$

$-\frac{81}{8}+\frac{81}{16}$

$-32\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2+36\cdot\frac{9}{16}-3$





$-4x^2+136x=289$

KLMN $\quad x(34-x)=\frac{289}{4}$

$34 \cdot 4 = 136$

AD

$-32x^2+36x-3$

$7+20+6$

$CD=\frac{15}{2} \quad BD=\frac{17}{2}$

$MD=\left(\frac{17}{8}\right)^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2$