МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (2) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} & (1) \end{cases}$

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \sin2\alpha\cos4\beta + \sin4\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha = \sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\sin4\beta\cos2\alpha =$

$= \sin2\alpha(\cos^2 2\beta - \cancel{\sin^2 2\beta} + \cos^2 2\beta + \cancel{\sin^2 2\beta}) + \sin4\beta\cos2\alpha =$

$= 2\sin2\alpha\cos^2 2\beta + \sin4\beta\cos2\alpha = 2\sin2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha =$

$= 2\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha) = 2\cos2\beta\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5};$

$\cos2\beta\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}.$

2) $\begin{cases} \cos2\beta\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{2}{5};$

$\cos2\beta = \frac{2\cdot\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}. \Rightarrow \sin2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

а) $\begin{cases} \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5};$

$\frac{2\sin2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1;$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha};$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 - \text{tg}\,\alpha \text{ не определен} \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha \end{array}\right.$

$2\text{tg}\,\alpha + 1 = 0;$

$\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}.$

б) $\begin{cases} \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2\sin2\alpha}{\sqrt5} - \frac{\cos2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5};$

$2\sin2\alpha - \cos2\alpha = -1;$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha};$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \text{tg}\,\alpha = 0 \\ \text{tg}\,\alpha + 2 = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \text{tg}\,\alpha = 0 \\ \text{tg}\,\alpha = -2 \end{array}\right.$

3) Получаем: $\left[\begin{array}{l} \text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2} \\ \text{tg}\,\alpha = 0 \\ \text{tg}\,\alpha = -2 \end{array}\right.$

Ответ: $\text{tg}\,\alpha \in \{-\frac{1}{2}; 0; -2\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

1) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\boxed{\text{I}}$ $x-2y>0;$
$x>2y.$

$\boxed{\text{II}}$ $x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2;$

$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0;$

$D=(1-5y)^2-4(4y^2+2y-2)=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=3^2(y-1)^2$

$x_1=\frac{-1+5y+3y-3}{2}=4y-2 \quad (а)$

$x_2=\frac{-1+5y-3y+3}{2}=y+1. \quad (б)$

2) а) $\begin{cases} x=4y-2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0;$
$16y^2-16y+\cancel{4}+9y^2-16y+\cancel{8}-18y-\cancel{12}=0;$
$25y^2-50y=0;$
$y(y-2)=0;$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=-2 \quad (\text{не уд. усл. } x>2y) \\ y=2 \Rightarrow x=6 \end{array}\right.$

$\begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=y+1 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y-12=0;$
$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0;$
$10y^2-20y-15=0;$
$2y^2-4y-3=0;$
$D=16+24=40$

не уд. усл. $x>2y$

$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y_2=\frac{4-2\sqrt{10}}{4}=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

3) Получаем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{2{,}5} \\ y=1-\sqrt{2{,}5} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\{(6;2);\ (2-\sqrt{2{,}5};\ 1-\sqrt{2{,}5})\}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x;$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

Пусть $y = x^2+18x$, тогда

$5^{\log_{12} y} + y \geq |y|^{\log_{12}13};$

$5^{\log_5 y \cdot \frac{1}{\log_5 12}} + y \geq |y|^{\log_{12}13};$

$y^{\log_{12}5} + y \geq |y|^{\log_{12}13};$

№5. $p \in \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$

$f(p)$: 0 0 0 1 1 2 3 4 4 5

$f(1) = 0$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 0$; $f(5) = 1$; $f(6) = 0$; $f(7) = 1$; $f(8) = 0$;

$f(9) = 0$; $f(10) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$; $f(13) = 3$; $f(14) = 1$; $f(15) = 1$; $f(16) = 0$;

$f(17) = 4$; $f(18) = 0$; $f(19) = 4$; $f(20) = 1$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 5$; $f(24) = 0$.

$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Пусть $f(y) = 1$, тогда n_1 = кол-во $f(z) = 1$ * кол-во $f(w) < 1$

$n_1 = 7 \cdot 11 = 77$

Пусть $f(y) = 2$, тогда n_2 по аналогии кол-во $f(z) = 2$ * кол-во $f(w) < 2$

$n_2 = 2 \cdot 18 = 36$

Пусть $f(y) = 3$, тогда $n_3 = 1 \cdot 20 = 20$

Пусть $f(y) = 4$, тогда $n_4 = 2 \cdot 21 = 42$

Пусть $f(y) = 5$, тогда $n_5 = 1 \cdot 23 = 23$

$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 77 + 36 + 20 + 42 + 23 = 198$.

Ответ: 198 пар.

№6. Пусть $x = -\frac{11}{4}$, тогда $\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le 5$

Пусть $x = -\frac{3}{4}$, тогда $-\infty \le -\frac{3}{4}a + b < 1$

Получаем: $\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le 5$

$-\frac{3}{4}a + b < 1$.

$b \le 1 + \frac{3}{4}a \Rightarrow \frac{11}{4} < -\frac{11a}{4} + 1 + \frac{3}{4}a < 5$;

$-2 < a < -\frac{7}{8}$

$a > -2 \Rightarrow b > -\frac{1}{2}$

$a < -\frac{7}{8} \Rightarrow b < \frac{11}{32}$

Получаем: $-2 < a < -\frac{7}{8}$

$-\frac{1}{2} < b < \frac{11}{32}$.

Ответ: $a \in [-2; -\frac{7}{8}]$, $b \in (-0{,}5; \frac{11}{32})$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$13^{\log_{12}|y|}$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ $\quad -8x^2-30x-17$

$\log_{12}5 - \log_{12}13 + 3 =$

$= \log_{12}\frac{5}{13} + 3$

$\frac{\log_5 13}{\log_5 12}$

$(y-1)$

$y^{\log_{12}13} = y$

$m^2 + 30m + 17\cdot 8$

$D = 900 - 544 = 356$

$8x^2 + 30x + 17 >$

$2(4x^2 + 15x)$

$\frac{15}{4} = \frac{225}{16}$

$2\left(2x + \frac{15}{4}\right)^2 + 17 - \frac{225}{16}$

$2\left(2x + \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}$

$17 \cdot 32 = 544$

$17 \cdot 16 = 272$

$272 - 225 = 47$

$900 - 544 = 356$

$y^{\log_{12}5} + y = y\left(y^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1\right)$

$\log_5 18 = \log_5$

$1 - \log_5 13 = \log_5 \frac{5}{13}$

$y\left(y^{\log_{12}13} - 1\right)$

$\log_5 y$

$(a-\sqrt{a_{2,5}})(a-\sqrt{a_{2,5}}) = a - \sqrt{a_{2,5}} - \sqrt{10} + a_{2,5} = 4{,}5 - \sqrt{a_{2,5}} - \sqrt{10}$

$\log_{12}13 - 1 = \log_{12}13 - \log_{12}12 =$

$-1 = -\frac{4}{11}a + b = 5$

$-1 = ax + b = 5$

$1) \; x = -\frac{4}{11}$

$\frac{4x+3}{2} = \frac{-11+3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=$
$=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$;
$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2+\sqrt{10}$ $\quad 2-\sqrt{10}$ $\quad 2+\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad 2-\sqrt{\frac{5}{2}}>$

2) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $\quad x^2+9y^2-4x-18y=12$

1) $x-2y>0$
$x>2y$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$
$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0$

$\cancel{D=16-4(9y^2-18y-12)=16-36y^2+72y+48=-36y^2+72y+64}$

$\begin{array}{r}48\\+16\\\hline 64\end{array}$

$1-10y+25y^2-4(4y^2+2y-2)=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=9(y^2-2y+1)=$
$=3^2(y-1)^2$

$\cancel{5y^2-5xy-5x-20y-10=0}$

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2$
$x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1$

$\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt5\cdot\sqrt2}{\sqrt2\cdot\sqrt2}$

1) $x=4y-2 \Rightarrow (4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y=12$;
$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$
$25y^2-50y=0$,
$y^2-2y=0$;
$\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=-2 \text{ (не уд. усл. } x>2y)\\ y=2\Rightarrow x=6\end{array}\right.$

$\begin{array}{r}32\\+18\\\hline 50\end{array}$ $\quad y_1=1+\sqrt{\frac{10}{4}}=1+\frac{\sqrt5}{\sqrt2}$

$2y^2-4y-3=0$
$m^2-4m-6=0$;
$D=16+4\cdot6=16+24=40=2\sqrt{10}$
$m_1=\frac{4+2\sqrt{10}}{2}=2+\sqrt{10}$
$m_2=2-\sqrt{10}$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$
$10y^2-20y-15=0$
$2y^2-4y-3=0$

$5^{\log_5 4}$ $\quad 5^{\frac{\log_5 4}{\log_5 12}}=(5^{\log_5 4})^{\frac{1}{\log_5 12}}=4^{\frac{1}{\log_5 12}}=4^{\log_{12}5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$\log_5 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + \log_5 x^2 \geq \log_5 |x^2+18x|^{\log_{12}13} - \log_5 18x;$

$\log_{12}(x^2+18x) + 2\log_5 x \geq \log_{12}13 \cdot \log_5 |x^2+18x| - \log_5 18 - \log_5 x;$

$\log_{12}(x^2+18x) + 3\log_5 x \geq \log_{12}13 \cdot \log_5 |x^2+18x| - \log_5 18$

$\log_{12}(x^2+18x) + 3\log_5 x \geq \log_{12}13 \cdot \dfrac{\log_{12}|x^2+18x|}{\log_{12}5} - \log_5 18$

1) $x^2+18x>0 \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x)\left(1 - \dfrac{\log_{12}13}{\log_{12}5}\right) \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x$

$\log_{12}(x^2+18x)(1-\log_5 13) \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x$

$(\log_{12} x + \log_{12}(x+18))(1-\log_5 13) \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x;$

$\log_5 \frac{5}{13} \log_{12} x + \log_{12}(x+18)\cdot \log_5 \frac{5}{13} \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x$

$\log_{12} x - \log_5 13 \log_{12} x + \log_{12}(x+18) - \log_5 13 \log_{12}(x+18) \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x;$

$\dfrac{\log_5 x}{\log_5 12} - \dfrac{\log_5 13 \cdot \log_5 x}{\log_5 12} + \dfrac{\log_5(x+18)}{\log_5 12} - \dfrac{\log_5 13 \cdot \log_5(x+18)}{\log_5 12} \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x$

$\dfrac{\log_5 x}{\log_5 12} - \log_{12}13 \log_5 x + \dfrac{\log_5(x+18)}{\log_5 12} - \log_{12}13 \log_5(x+18) \geq -\log_5 18 - 3\log_5 x;$

$\dfrac{\log_5 x}{\log_5 12} - \log_{12}13 \log_5 x + \log_5 x$

$\log_5 x\left(\dfrac{1}{\log_5 12} - \log_{12}13 + 3\right) \geq \log_5(x+18)\left(\log_{12}13 - \dfrac{1}{\log_5 12}\right) - \log_5 18$

$\log_y\left(y^{\log_{12}5} + y\right) \geq \log_{12}13$

$y^{\log_{12}5}\left(y^{\log_5 13} - 1\right) \leq y$

$y>0 \Rightarrow y^{\log_{12}5} - y^{\log_{12}13} = y^{\log_{12}5}\left(1 - y^{\frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}}\right) = y^{\log_{12}5}\left(1 - y^{\log_5 13}\right)$

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12} y} + y \geq |y|^{\log_{12}13}$

$y>0 \Rightarrow$

$5^{\log_{12} y} + y \geq y^{\log_{12}13};$

$5^{\log_{12} y} \geq y^{\log_{12}13} - y$

$5^{\frac{\log_5 y}{\log_5 12}} = 5^{\log_5 y \cdot \frac{1}{\log_5 12}} = y^{\log_{12}5}$

$y^{\log_{12}5} \geq y^{\log_{12}13} - y$

$y>0 \Rightarrow y^{\log_{12}5} + y - y^{\log_{12}13} \geq 0$

$(y-1)(\log_{12}5 + 1 - \log_{12}13) \geq 0$

$(y-1)\left(\log_{12}\frac{5\cdot 12}{13}\right) \geq 0$

$1-y \geq 0$

$y \leq 1$

$1 + \log_{12}\frac{5}{13} \geq 0$

x^2+18x

$-18 \quad 0$

$\log_{12} x = -1$

$\log_{12} x = \log_{12}\frac{1}{12}$

$\frac{1}{12}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$ $\quad$ $2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha$

$2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$

$=2(\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta^2-\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta-\sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha)=$

$=\sin 2\alpha\cos\beta^2-\sin 2\beta\sin^2\alpha+\sin 2\beta\cos^2\alpha-\sin 2\alpha\sin^2\beta=$

$=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha$

$2(\sin\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta)+\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}+\sin 2\alpha$

$\cancel{\cos^2 2\beta\sin 2\alpha+\sin 4\beta\cos^2\alpha-\sin 4\beta\sin^2\alpha}+$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$

$=\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\sin 4\beta\cos 2\alpha=\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\cancel{\sin^2 2\beta}+\cos^2 2\beta+\cancel{\sin^2 2\beta})+$
$+\sin 4\beta\cos 2\alpha$

$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha=$

$=\cancel{\sin 4}$ $\quad 2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha=2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=$

$=\cancel{2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)}$ $\quad 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{4}{5}$

$\cancel{2\cos 2\beta}$

$\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta=\frac{2\sqrt5}{5\sqrt5}=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\frac{\sin 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5}+\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}=-\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}$

$2\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\cos\alpha=0$ $\quad$ $\cos\alpha+2\sin\alpha=0$

$\frac{\sin 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5}-\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1;$

$4\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$

$-a^5+a^4+a^3+a^2$

$(a-1)(-5+3+1+4)$

$a^3+a-a-20$

$(a-1)(a+3a-7)$

$-3a+a^2+4+$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-\frac{11}{4}$: $3+\frac{2}{-11+3} = 3+\frac{2}{-8} = 3-0{,}25=2{,}75$

$2{,}75 \le a\cancel{x}+b \le 5$

$2{,}75 \le -\frac{11a}{4}+b \le 5$

$-\infty \le -\frac{3}{4}a+b \le 1$

$-2a \le 4$

$a \ge -2$

$\frac{-\cancel{8}^{1}\cdot 11^2}{\cancel{16}_2} + \frac{\cancel{30}^{15}\cdot 11}{\cancel{4}_2} - 17$

$\frac{11}{\cancel{2}_1}\left(\frac{15-11}{\cancel{}^{2}}\right)-17 = 22-17$

$2{,}75 \le -\frac{11a}{4}+b \le 5$

$-\frac{3}{4}a+b < 1$

$b < 1+\frac{3}{4}a$

$\frac{-\cancel{8}^{1}\cdot 9}{\cancel{16}_2} + \frac{\cancel{30}^{15}\cdot 3}{\cancel{4}_2} - 17$

$\frac{45-9}{2}-17=$

$2{,}75 \le -\frac{11a}{4}+1+\frac{3}{4}a \le 5$

$2{,}75 \le -2a+1 \le 5$

$1{,}75 \le -2a \le 4$

$-4 \le 2a \le -1{,}75$

$\frac{7}{4}$

$-2 \le a \le -\frac{7}{8}$

$1-1{,}5=-\frac{1}{2}$

$32-21$

$-\frac{7\cdot 3}{8\cdot 4} = -\frac{21}{32}+1 = \frac{11}{32}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

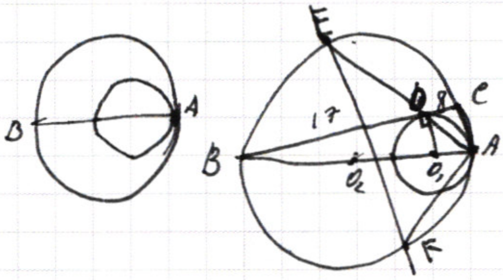
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y\left(y^{\log_{13}5}+y^{\log_{13}12} = y\right)$

$\left(y^{\log_{13}5}+y^{\log_{13}12}\right) = \log_y y$

$y\cdot\log_y\left(y^{\log_{13}5}+y^{\log_{13}12}\right)$ $\quad y\cdot\log_{13}5$



$r_1^2+(2R_2-r_1)^2=17^2$

$12+15+\overset{21}{6}=33$

$3+\frac{2}{4x+3}$

$\frac{7}{33}$

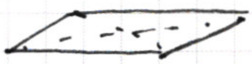
$f(x/y)=f(x)-f(y)$

$y^{\frac{\log_{13}5}{\log_{13}12}}+y\geq y^{\frac{1}{\log_{13}12}}$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$y^{\log_{13}5}+y^{\log_{13}12}\geq y$



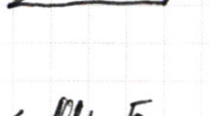
$\boxed{f(y)>f(x)}$

$p\in\{1;2;3;5;7;11;13;17;19;23\}$

$f(p)$ 0 0 0 1 1 2 3 4 4 5

$y^{\frac{1}{\log_{13}12}}$

$\times\begin{array}{r}77\\23\\\hline 100\end{array}$



$f(1)=0$ $\quad f(2)=0$ $\quad f(3)=0$ $\quad f(4)=0$

$\sqrt{24}<5$

$f(5)=1$ $\quad f(6)=0$ $\quad f(7)=1$ $\quad f(8)=0$ $\quad f(9)=0$

$f(10)=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)