МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$tg\,\alpha = ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

(по формуле $\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$).

$\Rightarrow 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

Тогда, $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, либо $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(= \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\right)$.

1) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$-\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\Rightarrow \cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha - 1 = 0.$

$+2\sin^2\alpha + 2\sin 2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0.$

отсюда, $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sin\alpha+2\cos\alpha=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ tg\,\alpha=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ tg\,\alpha=-2.\end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\Rightarrow \sin 2\alpha\frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к $tg\,\alpha$ существует.

$\Downarrow$

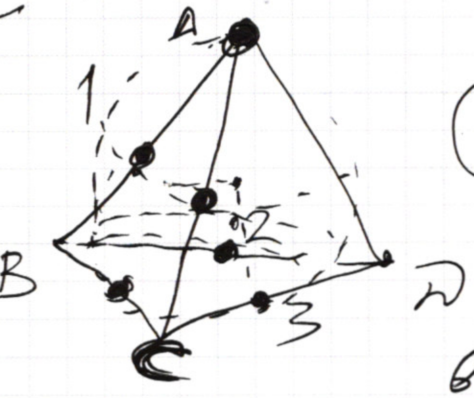
$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Ответ: $0; -2; -\frac{1}{2}$

Если ~~x^2+18x~~ $0 < x^2+18x < 1$, то все ок!

Если

4)



$\left(\log_{12} 5 - 1\right)$

$\log_{12}\frac{5}{12}\, t \quad t^{\log_{12}\frac{5}{144}}\, t$

$\log_{12} 5$

$t^{\log_{12}\frac{13}{144}}$

$-t$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$b \le -17$

$38 + a + 17 + b \le 0$

$a \le -38 - 17 - b = -55 - b$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b$$

$$\begin{cases} 8x^2 + (30+a)x + b + 17 \le 0 \\ (ax+b)(4x+3) \ge 12x+11 \end{cases}$$

$4ax^2 + (4b+3a)x + 3b - 12x - 11 \ge 0$

$4ax^2 + (4b+3a-12)x + 3b - 11 \ge 0$

$4x+3 > 0$

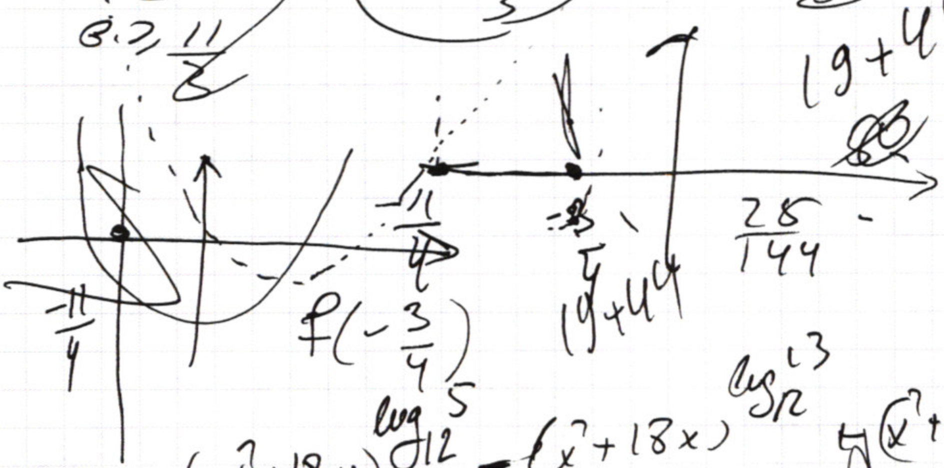
$x > -\frac{3}{4}$

$b + 17 \le 0$ $\quad b \le \frac{11}{3}$

$b \ge \frac{11}{3}$

$\frac{8}{12} - \frac{13}{12} + 1$

$19 + 4^4$



$f\left(-\frac{3}{4}\right)$

$19 + 4^4$

$$\left(x^2+18x\right)^{\log_{12} 5} - \left(x^2+18x\right)^{\log_{12} 13} + \left(x^2+18x\right) \ge 0$$

$x^2 + 18x > 1$

$x(x+18) > 0$

$$\begin{cases} x < -18 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\left(x^2+18x\right)^{\log_{12} 5} > \left(x^2+18x\right)^{\log_{12} 13}$$

$\log_{12} 5 < \log_{12} 13$

$t^2 - t^3 + 1 \ge 0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} + 1 \ge 0$

$\left(12^2\right)^{\log_{12} t}$ $\quad \log_{12}\frac{5}{12}\, t' \quad t^{\log_{12}\frac{5}{144}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Обозначим $\begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases}$

$\boxed{\text{если } \exists (a,b), \text{ то } \exists \text{ пара } (x,y)}$

тогда: $x-2y=(a+2)-2(b+1)=a-2b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

возведем 1-е ур-е в квадрат.

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

при этом необходимо, чтобы $\begin{cases} a-2b\geq 0 \\ ab\geq 0 \end{cases}$

1) $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow 0^2+9\cdot 0^2=25$ – противоречие.

2) $b\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

$\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{a}{b}-4\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right.$

1) $\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$. Подставим в 2-е ур-е:

$a^2+9a^2=25 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Если $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$, то $b=\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow a-2b=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$

Значит, $a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow a-2b=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow$ пара $(a,b)=\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ решение

2) $\frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$.

подставим в 2-е ур-е:

$16b^2+9b^2=25 \Rightarrow b=\pm 1$; 1) $b=1$

$\Rightarrow a=4$

$ab>0$ и $a-2b=4-2\cdot 1=2>0$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $b=-1 \Rightarrow a=-4 \Rightarrow a-2b=-4-2(-1)=-2<0$ противоречие

~~$\exists$ пара~~

$\Rightarrow$ в случае $\frac{a}{b}=4$ решением является

пара $(a,b)=(4;1)$

Итого: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-\sqrt{\frac{5}{2}}\\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}\\ \begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}}\\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=4\\ y-1=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}\\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=6\\ y=2.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right); (6;2)$

№3. (продолжение на стр №

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$ (ОДЗ)

Запишем необходимые ограничения: $\boxed{x^2+18x>0}$

$\log_{12}(x^2+18x)=\dfrac{\log_5(x^2+18x)}{\log_5 12} \Rightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)}=5^{\frac{\log_5(x^2+18x)}{\log_5 12}}=$

$=(x^2+18x)^{\frac{1}{\log_5 12}}=(x^2+18x)^{\log_{12}5}$

и при этом т.к $x^2+18x>0$, то $|x^2+18x|=x^2+18x$

~~$\Rightarrow$~~ нер-во перепишем в виде:

$$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

$$(x^2+18x)^{\log_{12}5}-(x^2+18x)^{\log_{12}13}+(x^2+18x) \geq 0.$$

Обозначим $t=x^2+18x$, $t>0$.

$$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t \geq 0.$$

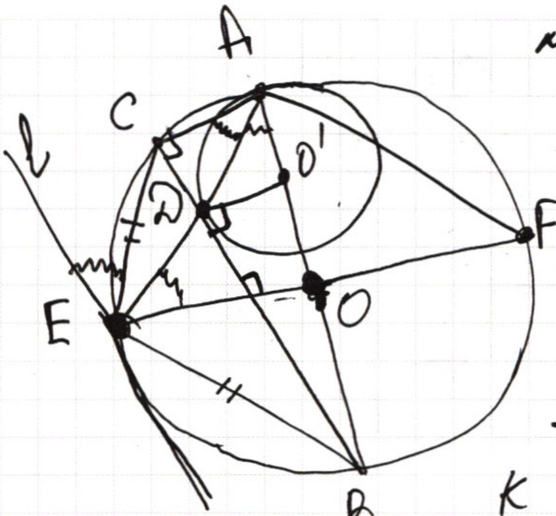
Пусть $0<t<1$. тогда, т.к $\log_{12}5<\log_{12}13$,

то $t^{\log_{12}5}>t^{\log_{12}13}$

$\Rightarrow$ левая часть положительна.

Поэтому все такие ~~t~~ x, что $0<x^2+18x<1$ решения!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4.

Докажем, что AD — биссектриса угла $\angle CAB$.

Рассмотрим гомотетию с центром в A, переводящую $\Omega \to \omega$, тогда касательная к ω перейдет в некоторую касательную l, параллельную исходной.

$D \to E$; l — касательная к Ω.

$\Rightarrow \angle CEA = \angle CAE$ (касат. и хорда), $\angle CEA = \angle ECB$ (параллельность)

$\angle ECB = \angle EAB \Rightarrow AD$ — биссектриса.

$\Rightarrow$ тогда хорды CE и EB равны и т.к $EF \perp CB$, то EF проходит через центр O окр. Ω.

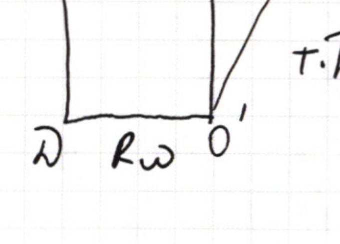
$\Rightarrow EF = 2R_\Omega$; $O'D \perp BC$ (касательная)

$AC \perp BC$ (т.к AB — диаметр) $\Rightarrow O'D \perp AC \Rightarrow \Delta BDO' \sim \Delta BCA$.

(при этом O, O', A — на одной прямой, т.к ω и Ω касаются).

$\Rightarrow \frac{BO'}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{O'D}{AC}$; $\frac{2R_\Omega - R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{17}{25} = \frac{R_\omega}{AC}$.

Изобразим трапецию $CDO'A$. Спроецируем O' на AC: K.



$KA = AC - R_\omega$; $O'K = CD = 8$; $OA' = R_\omega$.

т. Пифагора: $(AC - R_\omega)^2 + 64 = R_\omega^2$ | ~~$AC = \frac{25}{17}R_\omega$~~ $R_\omega = \frac{17}{25}AC$.

$AC^2 - 2AC R_\omega + 64 = 0$.

$AC^2 - 2AC \cdot \frac{17}{25}AC + 64 = 0 \Rightarrow AC = \frac{40}{3}$.

$\Rightarrow R_\omega = \frac{17}{25} \cdot \frac{40}{3} = \frac{136}{15}$.

$$\frac{2R_\Omega - R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{17}{25} = 1 - \frac{R_\omega}{2R_\Omega} \Rightarrow \frac{R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{8}{25} \Rightarrow R_\Omega = \frac{25}{16} R_\omega$$

$$R_\Omega = \frac{25}{16} \cdot \frac{136}{15} = \frac{85}{6}.$$

также, $\angle EAO = \angle AEO$ (т.к $OA = OE = R_\Omega$).

$\triangle AEF$ прямоуг $\Rightarrow \angle AFE = 90° - \angle AEO$

$\operatorname{tg}\angle AEO = \operatorname{tg}\angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{8}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{5}.$

$\Rightarrow \angle AFE = 90° - \angle AEO = 90° - \operatorname{arctg}\frac{3}{5}.$

$\operatorname{tg}\angle CAD = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\angle CAD = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\angle CAD = \frac{4}{5} = \cos\angle AEO$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2}(2R_\Omega \cos\angle AEO)(2R_\Omega \sin\angle AEO) =$

$= 2\left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

Ответ: $R_\omega = \frac{136}{15}$; $R_\Omega = \frac{85}{6}$;

$\angle AFE = 90° - \operatorname{arctg}\frac{3}{5}.$

$S_{\triangle AFE} = 2\left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}.$

№5.

$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ $(\forall a \in \mathbb{Q}_+)$.

также, $\forall a$: $f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = f(1) = 0$

$\Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a).$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow$ требуется найти кол-во пар (x, y) таких, что $f(x) < f(y)$.

Найдем несколько первых ~~чисел~~ чисел $f(n)$ где $n \in \mathbb{N}$.

$f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3.$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(18) = f(9) + f(2) = 0$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$ $f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(16) = f(8) + f(2) = 0$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$ $f(20) = f(10) + f(2) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$ $f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(24) = f(6) + f(4) = 0$

$\Rightarrow$ если $1 \le x \le 24$, то:

11 значений „0", 7 значений „1",

2 значения „2", 1 значение „3".

2 значения „4" 1 значение „5".

$x = 1$: „0" $f(1) < f(y)$ - подходят значение „1" и т.д.. „5"

- всего $24 - 11 = 13$ значений $\Rightarrow$ 13 пар.

и аналогично для всех x таких, что $f(x) = 0$! имеем 13 пар.

таких x: 11 штук $\Rightarrow$ всего $\boxed{11 \cdot 13 \text{ пар.}}$

Далее рассмотрим такие x, что $f(x) = 1$: их 7 штук.

им соответствуют $y: f(y) \geq 2$, таких y: 6 штук.

$\Rightarrow$ имеем еще $\boxed{7 \cdot 6 = 42 \text{ пар.}}$

Далее x: $f(x) = 2$: их 2 шт:

подходят y: $f(y) \geq 3$; их 4 штуки $\Rightarrow$ имеем $\boxed{4 \cdot 2 = 8 \text{ пар.}}$

Далее x: $f(x) = 3$: 1 шт.

$f(y) \geq 4$: 3 шт $\Rightarrow$ $\boxed{1 \cdot 3 = 3 \text{ пары}}$

Далее ~~f(x)...~~ $x: f(x) = 4$: 2 штуки

подходят $y: f(y) \geqslant 5$: таких 1 штуки

$\Rightarrow$ имеем $\boxed{2 \cdot 1 = 2 \text{ пар}}$.

Далее x: $f(x)=5 \Rightarrow f(y) \geqslant 6$:

x: 1 штука: y: 0 штук.

$\Rightarrow$ т.к. мы перебирали по всем x от 1 до 2024, то искомое кол-во пар (общее) это:

~~11·13 + 7·6~~ $143+42+8+3+2=198$.

№13 (продолжение) ответ: 198

Пусть теперь $t>1$:

$\Rightarrow$ ~~$t^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} \geq 0$~~

~~Пусть теперь~~

разделим обе части на t:

$t^{\log_{12}5-1} - t^{\log_{12}13-1} + 1 \geqslant 0.$

Заметим, что $t=144$ - корень этого многочлена:

$144^{\log_{12}\frac{5}{12}} - 144^{\log_{12}\frac{13}{12}} + 1 =$

$= 12^{\log_{12}\frac{25}{144}} - 12^{\log_{12}\frac{169}{144}} + 1 = \frac{25}{144} - \frac{169}{144} + 1 = 0$

$\Rightarrow$ многочлен делится на $(t-144)$.

$t > 144$

$x^2+18x > 144$

$(x+9)^2 > 225$

~~$-15 < (x+9) < 15$~~

$\left[\begin{array}{l} x+9 < -15 \\ x+9 > 15 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < -24 \\ x > 6 \end{array}\right.$

Заметим, что данный многочлен имеет не более 2 промежутков монотонности.

$\Rightarrow$ знак многочлена исходного такой же, как знак

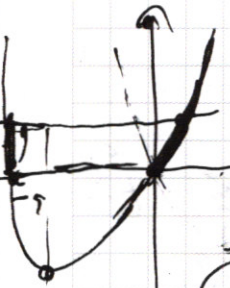
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

как ч у исходного многочлена

=> исходное нер-во равносильно

системе ~~$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ \left[\begin{cases} x<24 \\ x>6 \\ x^2+18x>1 \end{cases}\right. \end{cases}$~~

$$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<24 \\ x>6 \\ x^2+18x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+18x<1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} - (x^2+18x)^{\log_{12} 13} + (x^2+18x) \geq 0$

$x^2+18x = (x+9)^2 - 81$

$\frac{-18}{2} = -9$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\cancel{a, b}$ $\forall a, b \in \mathbb{Q}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b$

$f(abc) = f(ab) + f(c) =$

$= f(a) + f(b) + f(c)$

$12x+11 \leq (ax+b)(4x+3)$

$x < -\frac{3}{4}$

$\cancel{f(\sum x_i) = f \; f(\sum f(x_i) f(\sum x_i) = \sum f}$

$f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$

$f(x f(1)) = 0$

$x^2+18x < 1$

x^2+18x

$f(x_1 x_2 \cdots x_n) =$

$f(x_1 \cdots x_n) = f x_1$

???

x^2+18x

$f(x_1^n) = n f(x_1)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$-\frac{11}{4}$ $-\frac{3}{4}$

$f(x^n) = n f(x)$

$x^2+18x-1 < 0$

$f(a)$

$\log_t$

$a \log_b x = f(x)$

$4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b \geq 12x + 11$

$a \log_b p = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\cancel{f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{x}\right)} =$

$4ax^2 + (3a+4b-12)x + 3b - 11 \geq 0$

$f(2) = 0$

$f\left(\frac{1}{x}\right)$ $f(x)$

$f(3) = 0$

$\cancel{f(4 \cdot 4)}$ $f(4) = f$

$f(1) = 0$

$\cancel{f(x) =}$

$f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3^{24+4}

$\frac{-18 \pm \sqrt{328}}{2}$

$\cancel{f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)}$

$x = 1!$

$f(x) < f(y)$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

$\cancel{x = 1}$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = b$

$f(5) = 1$ $\left[\frac{11}{4}\right]^2$

$f($

$f(6) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

16

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$\boxed{f(x) < f(y)}$

$\cancel{x \neq 1}$

1) $x = 1!$

$f(8) = 0$ $f(12) = 0$

$\cancel{f(1) = f}$

34

$f(16) =$

$AC^2 - \frac{34 AC^2}{25} = -64$

$f(9) = 0$ $f(13) = 3$

$f(1)$

$f(10) = 1$ $f(14) = 1$

$+\frac{9AC^2}{25} = 64$

$f(11) = 2$ $f(15) = 1$

$\frac{3AC}{5} = 8$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

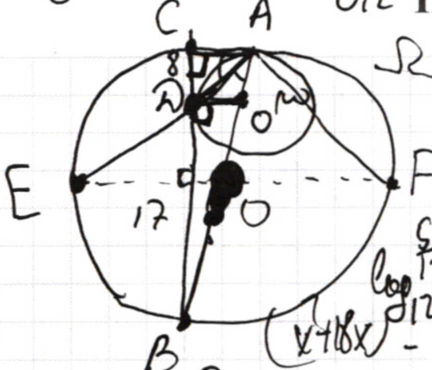
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t > 1$

$\log_{12} 5 + \log_{12} 13 = \log_{12} 65 < 2$

$f(t) \log_{12}\frac{13}{12} - t^{\log_{12} 6} \leq 1 = t^{0}$

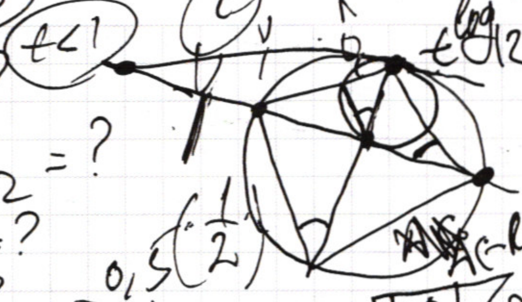
(13;10)



$\angle AFE = ?$

$R_\omega, R_\Omega = ?$

$S_{\triangle AEF} = ?$



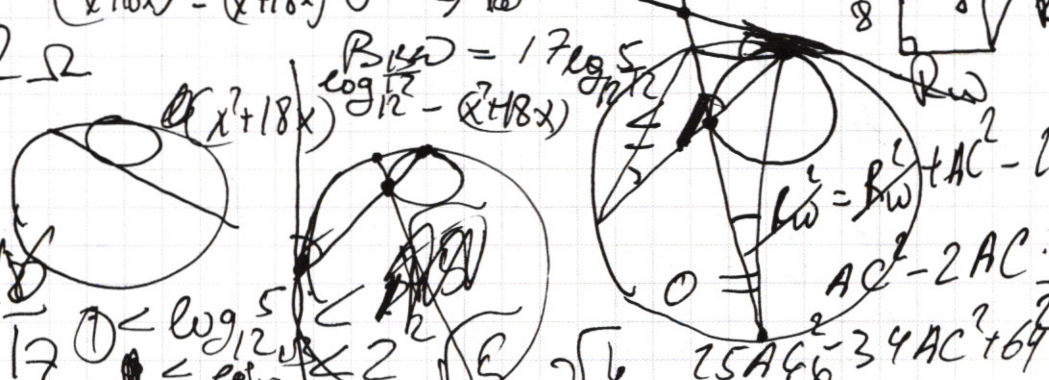
$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} - (x^2+18x)^{\log_{12} 13} \geq -18$

$EF = R_\Omega$

$\frac{8}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{5}$

$\frac{AC}{2R_\Omega} = \frac{8}{17}$

$1 < \log_{12} 5$



$R_\omega^2 = R_\omega^2 + AC^2 - 2AC R_\omega + 64$

$AC^2 - 2AC \cdot \frac{17}{25} AC + 64$

$25AC^2 - 34AC^2 + 64 = 0$

$\frac{17}{25} = \frac{2R_\Omega - R_\omega}{R_\Omega} = \frac{R_\omega}{AC} \Rightarrow \frac{R_\omega}{\frac{8}{17}R_\Omega} = \frac{17}{8}\frac{R_\omega}{R_\Omega}$

$2 - \frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{17}{8}\frac{R_\omega}{R_\Omega} \Rightarrow \frac{25}{8}\frac{R_\omega}{R_\Omega} = 2$

$AC = \frac{8}{3}$

$9AC^2 = 64$

$\frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{16}{25}$

убывает.

$2 - \frac{16}{25} = \frac{17}{25}$

$R_\omega = \frac{8}{3} \cdot \frac{17}{25} =$

$2 - \frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{17}{25} \Rightarrow \frac{R_\omega}{R_\Omega} = 2 - \frac{17}{25} = \frac{33}{25}$

$\frac{R_\omega}{AC} = \frac{17}{25} = \frac{2R_\Omega - R_\omega}{2R_\Omega}$

$12^2 + 5^2 = 13^2$

$1 - \frac{R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{17}{25} \Rightarrow \frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{16}{25}$

$AC = \frac{40}{3}$

$\frac{R_\omega}{R_\Omega} = \frac{16}{25}$

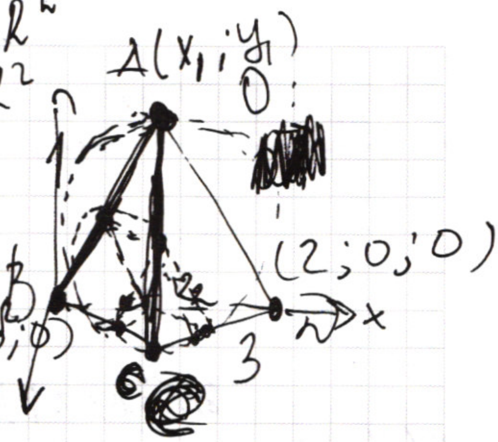
$\frac{R_\omega}{AC} = \frac{17}{25}$

$\frac{16}{17} = \frac{AC}{R_\Omega}$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} + t \geq 0$

x_0, y_0, z_0, R^2 $(x_0-2)^2+y_0^2+z_0^2=R^2$. $(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2=R^2$

$(x_0-\frac{x_1}{2})^2+(y_0-\frac{y_1}{2})^2+z_0^2=R^2$



143 $a^{\log_{12}5}-a^{\log_{12}13}+a\geq 0$

степенное нер-во.

185

190 ~~степенное~~: как кв-е ур-е

$x_1^2+y_1^2=1$

$\log_{12}5 \quad a^{\log_{12}5-1}(a^1)-\log_{12}13 \quad a^{\log_{12}13-1}a^1$ $x^2+18x>0$

143 $x(x+9)$ ... $x<0$, $x>-9$

42 $x_0^2+y_0^2-2x_0x_1-2y_0y_1+1=R^2$

185 $x_0^2+y_0^2-x_1x_0-y_0y_1+\frac{1}{4}=R^2$ $+1 \geq f'(x)$ $\begin{cases} x<-9 \\ x>0 \end{cases}$

193

196 $a^1(\log_{12}5\, a^{\log_{12}5-1}-\log_{12}13\, a^{l}+a)+1$ $a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-a^{\log_{12}\frac{5}{12}}\leq 1$

$\log_{12}5<1$. $136/16$ $5^{\log}$ $5^{\frac{\log_5(x^2+18x)}{\log_5 12}}$

$\frac{5\cdot 136}{16\cdot 3}$ $(x^2+18x)^{\log_{12}5}$ $a^{\log_{12}5}-a^{\log_{12}13}\geq -a$.

$\log_{12}5<\log_{12}13$

$\frac{25}{2}\cdot\frac{17}{15}$ $a^{\log_{12}5}-a^{\log_{12}13}+a\geq 0$ $a^{\log_{12}13}-a^{\log_{12}5}\leq a$.

$\frac{25}{4}\cdot\frac{34}{18}$ $a^{\log_{12}5}>a^{\log_{12}13}$ $\log_{12}\frac{5}{13}$ 2) $a<1$:

$(a-1)^{\log_{12}}>0$ >0

$\frac{5}{2}\cdot\frac{17}{3}$ $a\geq 0$. 1) $a>1$

$(a-1)(\log_{12}5-\log_{12}13$ $(a-1)\log_{\frac{13}{12}}\frac{5}{12}+a\geq 0$

$a>1$.

$136/4$

$120+16 \quad 34$

300

при $a<1$ автоматом выполнено нер-во

$a\leq 1$. $a\leq 1$

~~$0-0+1\geq$~~

$a\leq$

1) $a>1$. $1-1+1\geq 0$.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$x(y-1)$
$-2xy$ $\quad x(y-1)-2(y-1)$

$2\alpha+2\beta+2\beta$ $\quad +\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = +\frac{2}{5}$

$a-2b = \sqrt{(y-1)(x-2)}$ $\quad 3\le x \le 24$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\quad 1)\ \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$1 \le y \le 24$ $\quad +\frac{8}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = +\frac{4}{5}$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $\quad \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$a^2-5ab+4b^2=0$ $\quad f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ $\quad 2(2\cos^2\alpha-1)+\sin 2\alpha+1=0$

$b=0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$ $\quad f(3)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$ $\quad 4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0$

$4;1$

$0 + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ $\quad f(1)=0$ $\quad 3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$x-2=a$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f($ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)+f(1) =$

$y-1=b$ $\quad = f\left(\frac{x}{y}\right)$ $\quad \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$x=a+2$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f$ $\quad \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$y=b+1$ $\quad x = pk$ $\quad 3; -1$

$\frac{2\pm 4}{2}$

$a+2-2(b+1) =$
$= a-2b$ $\quad f\left(\frac{pk}{y}\right) = f(p)+f\left(\frac{k}{y}\right)$

$\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$f(p_1 p_2 p_2 \dots p_n) = f(p_1)+\dots+f(p_n) =$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = \cancel{f} < 0$ $\quad = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \left[\frac{p_n}{4}\right]$

$\cancel{10a^2=25}$

$2a^2=5$ $\quad f \quad f(ab)-f(b)<0$ $\quad \cancel{2\sin 2\alpha}$

$f(ab) < f(b)$ $\quad \cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha - 1 = 0$

$f($

$x^2+9y^2-4x-18y-12=0$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)-25=0$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} - 2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)