МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \quad (2) \end{cases}$$

(2) $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta \cancel{-1+1}) + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta \geq 0$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \times\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha) + (\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)(3\cos\alpha-\sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha+\cos\alpha = 0$ $\qquad$ $3\cos\alpha - \sin\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -1$ $\qquad$ $tg\,\alpha = 3$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $\sin 2\beta < 0$

$\sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| : \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4\sin^2\alpha - 2 + 1 = 0$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) + (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)(3\sin\alpha - \cos\alpha) = 0$

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \qquad 3\sin\alpha - \cos\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -1 \qquad tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

Ответ: $-1; 3; \frac{1}{3}$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & (2) \end{cases}$$

(1) $x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - (x-6)}$

$x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$a = x - 6 \qquad x = a + 6$

$b = 2y - 1 \qquad y = \frac{b+1}{2}$

$a + 6 - 12\left(\frac{b+1}{2}\right) = \sqrt{ab}$

$a + 6 - 6b - 6 = \sqrt{ab}$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

при $ab \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-36\cdot4b^2=25b^2=(5b)^2$

$a_1=\frac{13b+5b}{2}=9b$

$a_2=\frac{13b-5b}{2}=4b$

(2)

~~$x^2+36y^2-12x-36y=45$~~

~~$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$~~

~~$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$~~

~~$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$~~

~~$a^2+9b^2=90$~~

~~$a_1=9b$~~

~~$81b^2+9b^2=90$~~

~~$b^2=1$~~

если $b=-1$, то

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a_1=9b$

$9b-6b=\sqrt{ab}$

$3b=\sqrt{ab}$

$\Downarrow$

$b>0$

$a_2=4b$

$4b-6b=\sqrt{ab}$

$-2b=\sqrt{ab}$

$\Downarrow$

$b<0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

(2) $x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$a^2+9b^2=90$

$a_1=9b \quad (b>0)$

$81b^2+9b^2=90$

$b^2=1$

$b=1$

$a=9$

$x_1=9+6=15$

$y_1=\frac{1+1}{2}=2$

$a_2=4b \quad (b<0)$

$16b^2+9b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}$

$b=-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$a=-\frac{12}{5}\sqrt{10}$

~~$x_2=-\frac{3}{5}\sqrt{10}+6=$~~

~~$=\frac{-3\sqrt{10}+30}{5}$~~

$y_2=$

$x_2=-\frac{12}{5}\sqrt{10}+6=\frac{-12\sqrt{10}+30}{5}$

$y_2=\frac{-\frac{3}{5}\sqrt{10}+1}{2}=$

$=\frac{-3\sqrt{10}+5}{10}$

Ответ: $(15;2)$

$\left(\frac{-12\sqrt{10}+30}{5};\ \frac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОО: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0$

$(10-x)x > 0$

$-\quad 0 \quad + \quad 10 \quad -$

$x \in (0; 10)$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 + 4^{\log_3(10x-x^2)} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$3^{\log_3(10x-x^2)} + 4^{\log_3(10x-x^2)} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

$t = \log_3(10x-x^2)$

$3^t + 4^t - 5^t \geq 0 \quad \Big| : 5^t\ (>0)$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t - 1 \geq 0$

$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$

$f'(x) = \ln\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + \ln\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x$

$\left.\begin{matrix} \ln\frac{3}{5} < 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^x > 0 \\ \ln\frac{4}{5} < 0 & \left(\frac{4}{5}\right)^x > 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow f'(x) < 0$ при $\forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \downarrow$ при $\forall x \Rightarrow \leq 1$ корня

при $x = 2$ $f(2) = \cancel{0}\ \cancel{\frac{3^2}{5^2}}\ \frac{9}{25} + \frac{16}{25} - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \leq 2$ $f(x) \geq 0$

$t \in (-\infty; 2]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\log_3(10x - x^2) \leq 2$

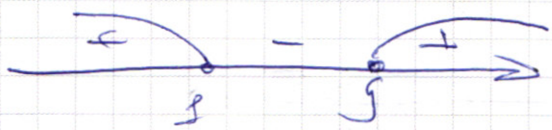
$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$D = 100 - \cancel{3}9 \cdot 4 = 64 = 8^2$

$x_1 = \frac{10+8}{2} = 9$

$x_2 = \frac{10-8}{2} = 1$



$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in (0; 10) \end{cases}$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

№5

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] = f\left(\frac{xp}{x}\right)$

$\left[\frac{p}{4}\right] = f(x) + f(p) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\left[\frac{p}{4}\right] = f(x) + \left[\frac{p}{4}\right] + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

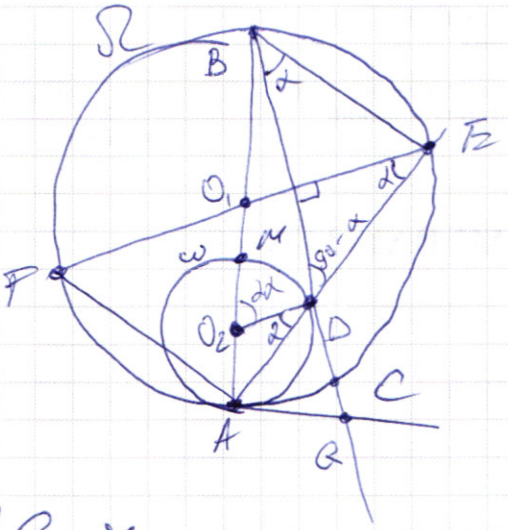
если $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где p_i - простое, ~~α_i - целое~~ $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$

$f(x) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + \cancel{p_n} f(p_n^{\alpha_n}) =$

$= \alpha_1 \cdot \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\frac{p_i}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$x, y \in [2; 25]$



$GC = x$

$\left(\frac{15}{2}+x\right)^2 = x(16+x)$

$\frac{225}{4}+15x+x^2 = 16x+x^2$

$x = \frac{225}{4}$

$AG^2 = x(16+x) = \frac{225}{4}\cdot\left(16+\frac{225}{4}\right) =$

$= \frac{225\cdot 289}{4\cdot 4}$

$AG = \frac{15\cdot 17}{4} = \frac{255}{4}$

$BG = 16 + GC = \frac{289}{4}$

$\triangle BAG$ - прямоуг. $\Rightarrow BA = \sqrt{BG^2 - AG^2} =$

$= \sqrt{\frac{289^2 - 255^2}{4^2}} = 34$

BA - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{BA}{2} = 17$

$BO_2 \cap \omega = M$

для ω: $BM \cdot BA = BD^2$

$(BA - 2r)\, BA = BD^2$

$(34-2r)\cdot 34 = \frac{17\cdot 17}{\cancel{4}}$

$34 - 2r = \frac{17\cdot 17}{34\cdot \cancel{4}} = \frac{17}{8}$

$2r = 34 - \frac{17}{8} = \frac{235}{8}$

$r = \frac{235}{16} = 14\frac{11}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

X	f(X)
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

количество возможные значения f(x)

$f(x)=0$: 10 чисел

$f(x)=1$: 7 чисел

$f(x)=2$: 3 чисел

$f(x)=3$: 1 чисел

$f(x)=4$: 2 чисел

$f(x)=5$: 1 чисел

если $f(x/y)<0$, то $f(x)<f(y)$

$10\cdot(\underbrace{7}_{10}+\underbrace{3}_{11}+1+\underbrace{2}_{13}+\underbrace{1}_{14})+7(3+1+\underbrace{2}_{6}+\underbrace{1}_{7})+$

$+3(\underbrace{1}_{3}+\underbrace{2}_{4}+1)+1(\underbrace{2}_{3}+1)+2\cdot1=$

$=140+49+12+3+2=$

$=206$

Ответ: 206

№ 4

рисунок см на стр. 8

~~ВС~~ $BD=\frac{17}{2}$ $CD=\frac{15}{2}$

~~ВС~~. AG – касат к Ω и ω

$AG\cap BC=G$

~~BAC~~ т.к. A – точка касания O_1, O_2, A – на 1 пр

$AG\perp BA$ (касат)

для ω: $AG^2=(GD)^2=(GC+CD)^2$

для Ω: $AG^2=GC\cdot GB=GC\cdot(BC+GC)$

$BC=\frac{17}{2}+\frac{15}{2}=$
$=16$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle AFE = \angle ABE$ (на дугу AE)

$\angle DBE = \alpha$

$\angle AEB = 90^\circ$ (на диам) $\Rightarrow \angle BDE = 90 - \alpha$

$FE \perp BC \Rightarrow \angle DEM = \alpha$

$O_2D \perp BC \Rightarrow O_2D \parallel FE \Rightarrow \angle O_2DA = \angle FEA = \alpha$

$\triangle AO_2D$ - равноб $\Rightarrow \angle O_2AO = \alpha \Rightarrow \angle O_1O_2D = 2\alpha$

$O_2D \perp BC \Rightarrow \angle O_2BD = 90 - 2\alpha$

$\angle AFE \cancel{= 90 - 2\alpha} = \angle ABE = \angle O_2BD + DBE = 90 - \alpha$

$\cancel{\sin(90 - 2\alpha) = \frac{AG}{BG} = 2}$

$\cos(90 - 2\alpha) = \frac{AB}{BG} = \frac{34 \cdot 4}{289} = \frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha) = \frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha) = \frac{15}{17}$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(90 - \alpha) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$S_{AEF} = 136$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\underline{6 \cdot \overset{12}{2} \cdot 3}^{36}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=45$

$a^2+9b^2=45$

$a_1=9b$

$9b-6b=\sqrt{9b^2}$

$3b=\sqrt{9b^2}$

$\Downarrow$

$b\geq 0$

$81b^2+9b^2=90$

$90b^2=90$

$\begin{cases} b^2=1 \\ b\geq 1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$b_1=1$

$a_1=9$

$9-6=\sqrt{9}$

$3=3$

$a_2=4b$

$4b-6b=\sqrt{4b^2}$

$-2b=\sqrt{4b^2}$

$\Downarrow$

$b\leq 0$

$16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90$

$\begin{cases} b^2=\frac{90}{25} \\ b\leq 0 \end{cases}$

$b_2=-\sqrt{\frac{90}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$a_2=-\frac{12}{5}\sqrt{10}$

$-\frac{12}{5}\sqrt{10}+\frac{18}{5}\sqrt{10}=\sqrt{\frac{36}{25}10}$

$\frac{6}{5}\sqrt{10}=\sqrt{\frac{36}{25}10}$

$\frac{6}{5}\sqrt{10}=\frac{6}{5}\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a = x - 6$

$b = 2y - 1$

$x = a + 6$

$y = \frac{b+1}{2}$

$x_1 = 9 + 6 = 15$

$y_1 = \frac{1+1}{2} = 1$

$x_2 = -\frac{12}{5}\sqrt{10} + 6 = \frac{-12\sqrt{10} + 30}{5}$

$y_2 = \frac{-\frac{3}{5}\sqrt{10} + 1}{2} =$

$= \frac{-3\sqrt{10} + 5}{10}$

Ответ: $(15; 1)$

$\left(\frac{-12\sqrt{10} + 30}{5}; \frac{-3\sqrt{10} + 5}{10}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

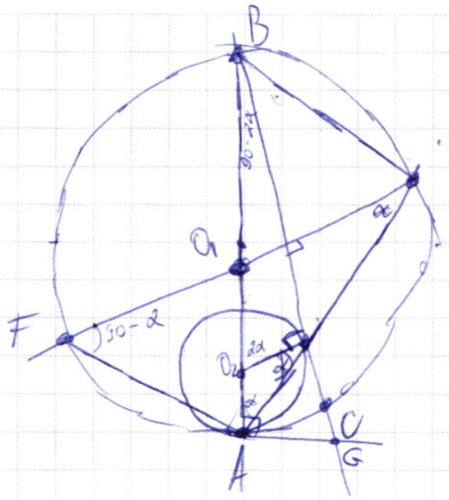
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$FE = 34$

~~$FA = \sin(AFE)\,34 =$~~

$FA = FE \cdot \cos(AFE) =$

$= \frac{34}{\sqrt{17}}$

$AE = FE \cdot \sin(AFE) =$

$= \frac{34 \cdot 4}{\sqrt{17}}$

$S_{AFE} = \frac{\frac{34\cdot4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{34}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{34\cdot4\cdot34}{17\cdot2} = 136$

$90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$

$\cos(90 - 2\alpha) = \frac{AB}{BG} =$

$= \frac{34\cdot4}{289} = \frac{8}{17}$

$2\alpha < 90$

$\sin(2\alpha) = \frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha) = \frac{15}{17}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{15}{17}$

$2\cos^2\alpha = \frac{32}{17}$

$\cos^2\alpha = \frac{16}{17}$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$90 - \alpha = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(90-\alpha) = \sqrt{\frac{17-16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\times\begin{array}{r}34\\4\\\hline 136\end{array}$

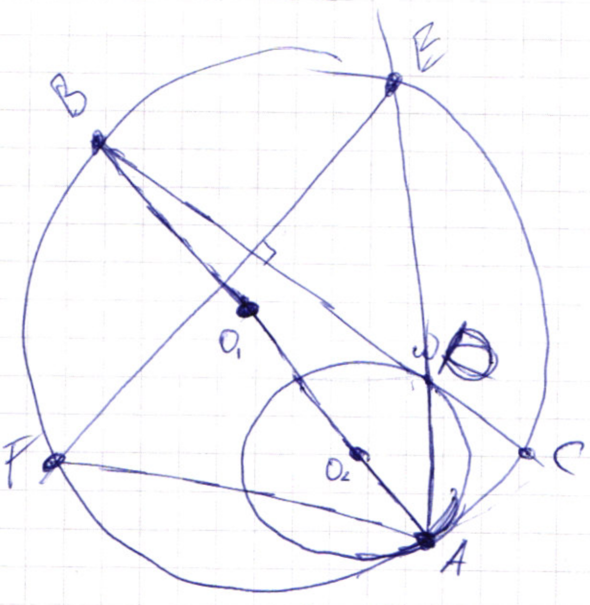
Ответ: 136

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$CD = \frac{15}{2}$

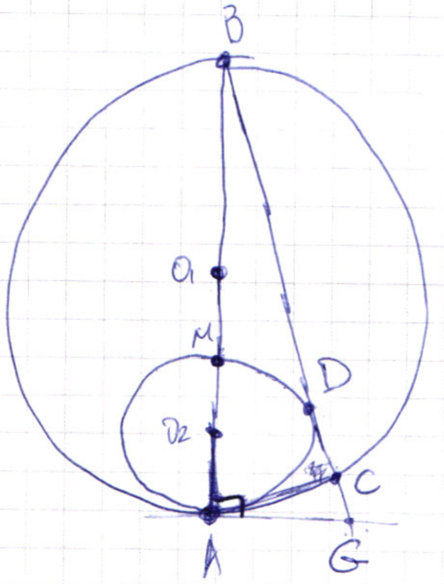
$BD = \frac{17}{2}$



$ED \cdot DA = BD \cdot DC = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$(BO_2 - r)(BO_2 + r) = BD^2$

$BO_2^2 - r^2 = BD^2$



$BD = \frac{17}{2}$ $CD = \frac{15}{2}$

$BC = \frac{32}{2} = 16$

$\cancel{BD^2 = BO_2^2 - r^2}$

$AG^2 = GD^2 = (DC + CG)^2$

$AG^2 = GC \cdot GB = CG(BC + GC)$

$\left(\frac{15}{2} + x\right)^2 = x(16 + x)$

$\frac{225}{4} + 15x + x^2 = 16x + x^2$

$x = \frac{225}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) + (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$(2\cos\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$3\cos\alpha - \sin\alpha = 0$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$

$tg\,\alpha = 3$

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1$

$tg\,\alpha = -1$

$\sin 2\beta > 0$

2) $\sin 2\beta < 0 \quad \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \cancel{-4\cos^2\alpha+2} - 2 + 4\sin^2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) + (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

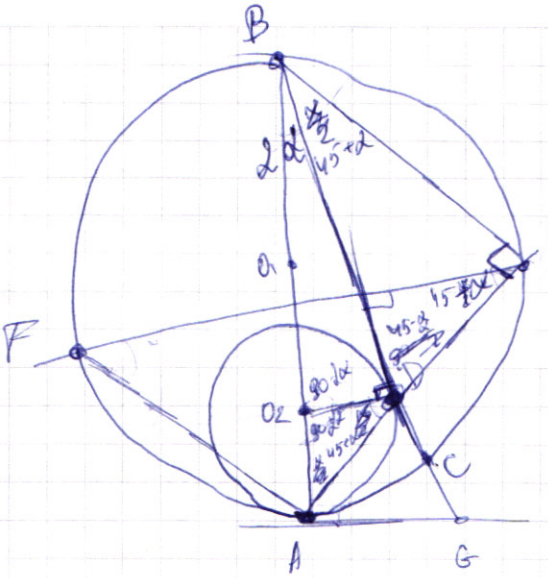
$tg\,\alpha = -1$

$2\sin\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha = 0$

$tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$\frac{180-90-\alpha}{2}=$

$=\frac{90-2\alpha}{2}$

$BC=32$

$BA=34$

$BG=~~16~~+\frac{225}{4}=\frac{289}{4}$

$90-45-\alpha$

$45-\alpha$

$45+3\alpha$

180

$\cos\angle ABC=\frac{34\cdot4}{289}=\frac{2\cdot4}{17}=\frac{8}{17}$

~~$\sin BO_2D=\sqrt{1-\cos^2 ABC}=\sqrt{\frac{289-64}{17}}=\frac{15}{17}$~~

$\sin BO_2D=\cos ABC=\frac{8}{17}$

$\cos BO_2D=\cos AO_2D=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$

$AD=\frac{235}{16}\sqrt{2(1-\cos AO_2D)}=$

$=\frac{235}{16}\sqrt{\frac{2\cdot2}{17}}=\frac{235}{8\cdot\sqrt{17}}$

$\angle AFE=\frac{3}{2}\alpha$

$\angle AFE=\frac{3}{2}\arccos\frac{8}{17}$

$\cos\alpha=\frac{8}{17}$ $\sin\alpha=\frac{15}{17}$

$\cos^2\alpha=\frac{64}{289}$

$\cos(\alpha+\frac{\alpha}{2})=$

$=\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=$

$=\frac{8}{17}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}-\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}=$

$=$

$2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{8}{17}$

$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{25}{17}$

$34-25$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{25}{34}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{34}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} AG^2 = (DC + CG)^2 \\ AG^2 = (BC + CG)CG \end{cases}$$

$CG = x$

$\cancel{DC + x}$ $\left(\frac{15}{2} + x\right)^2 = (16 + x)x$

$\frac{225}{4} + 15x + x = 16x + x^2$

$x = \frac{225}{4}$

$BG = 16 + \frac{225}{4} = \frac{289}{4}$

$AG = \sqrt{\frac{289}{4} \cdot \frac{225}{4}} = \frac{255}{4}$

$BA = \sqrt{BG^2 - AG^2} =$

$= \sqrt{\frac{289^2}{4^2} - \frac{255^2}{4^2}} =$

$= \frac{\sqrt{34 \cdot 544}}{4}$

$34 = 2 \cdot 17$

$544 = \cancel{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}\ 16 \cdot 34$

$BA = \frac{\sqrt{\cancel{2} \cdot 34 \cdot 16 \cdot 34}}{4} = \frac{34 \cdot 4}{4} = 34$

$R = \frac{BA}{2} = 17$

$BM \cdot BA = BD^2$

$34 \cdot BM = \frac{17 \cdot 17}{4}$

$BM = \frac{17}{8}$

$MA = \cancel{34}\ BA - BM = 34 - \frac{17}{8} = \frac{235}{8}$

$r = \frac{MA}{2} = \frac{235}{16} = 14\frac{11}{16}$

$17 \cdot 15 = 85 + 170 = 255$

$16 \cdot 4 = 64$

$225 + 64 = 289$

$289 - 255 = 34$

$289 + 255 = 544$

$544 : 4 = 136$

$544 : 16 = 34$

$136 : 4 = 34$

$64 + 16 = 80$

$34 \cdot 8 = 252$

$252 - 17 = 235$

$235 : 16 = 14$ (ост. 11)

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \left(\cos 4\beta + 1 \right) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \cancel{\frac{2}{5}} \quad -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \left(2\cos^2 2\beta - 1\right) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cancel{\sin 2\alpha (}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta \left(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \right) = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta \cdot \sin \left(2\alpha + 2\beta\right) = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2\cos 2\beta}$

$\cos 2\beta = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1$

$\cancel{2}$

$\sin 2\alpha \cdot \left(2 \cdot \cos^2 2\beta - 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \left(\frac{2}{5} - 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$

$-\frac{3}{5} \sin 2\alpha + \frac{4}{5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \quad | \times 5$

$\begin{cases} -3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -2 \\ \cancel{2\cos 2} \; 4\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -2 \end{cases}$

$-5\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cancel{tg\alpha = 0}$

$\cancel{4\cos 2\alpha = -2}$

$\cancel{\cos}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-1+2\sin^2\alpha}{2} = \sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\frac{1}{-\sqrt{5}} - \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{\cos 2\beta}$$

$$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2} = \frac{1}{5}$$

$$1-\cos(4\alpha+4\beta) = \frac{2}{5}$$

$$\cos(4\alpha+4\beta)-1 = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cos(4\alpha+4\beta)-1$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = \cos 4\alpha\cdot\cos 4\beta - \sin 4\alpha\,\sin 4\beta - 1$$

$$\cos 4\beta(\sin 2\alpha - \cos 4\alpha) + \sin 4\beta(\cos 2\alpha - \sin 4\alpha) + (\sin 2\alpha - 1) = 0$$

$$\cos 4\beta(\sin 2\alpha - 1 + 2\sin^2 2\alpha) + \sin 4\beta(\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha) + (\sin 2\alpha - 1) = 0$$

$$\cos 4\beta(\sin 2\alpha - 1 + 2\sin^2 2\alpha) + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha(1 - 2\sin 2\alpha)$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$\cos\alpha = a$$
$$\sin\beta = a$$
$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1}$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha = 1}$$

$$\frac{1}{d}\sin 2\alpha + \frac{2}{d}\cos 2\alpha = \frac{-1}{d}$$

$$\left(\frac{1}{d}\right)^2 + \left(\frac{2}{d}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{d^2} + \frac{4}{d^2} = 1$$

$$\frac{5}{d^2} = 1$$

$$d^2 = 5$$

$$d = \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \qquad \varphi = \pi - \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos\varphi + \sin\varphi\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\alpha + \varphi = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n$$

$$\cancel{\alpha = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{2} + 2\pi n}$$

$$\cancel{\sin\left(-\frac{\varphi}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)}$$

$$\cancel{2\alpha + \varphi =}$$

$$\cancel{\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\cancel{\sin(-2\alpha - 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\cancel{\cos(-2\alpha - 2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\sin(2\alpha + \varphi) =$$

$$\cancel{2\alpha + \pi - \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$2\alpha + \pi - \cancel{\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\pi}{2} - \cancel{\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + 2\pi n$$

$$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

-1 0

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \quad (2) \end{cases}$$

(2)

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\cdot\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + 2\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

1) $\sin 2\beta > 0$ $\quad \sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \Rightarrow \cos 4\beta = 2\cdot\frac{1}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

$\sin 4\beta = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\,\cancel{(2\cos^2 2\beta}\,(2\cdot\frac{1}{5}-1) + \cos 2\alpha\cdot\cancel{2}\,\frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -2 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2(1-2\sin^2\alpha) = -1}$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha +}$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$-32x^2+36x-3$

$32x^2-36x+3=0$

$D = 36^2 - 3\cdot 4\cdot 32$

$= 1296 - 444$

131
$\times\,36\,36$
216
108
1296

$\times\,32\,12$
124
32
444

$\cdot 10$ ~~10~~

$-\,1296\,444$
852

$\cancel{\frac{16(x-1)}{4x-4-1}}$

$\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1} \le ax+b \le$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cancel{-32x^2}$

$-32x^2+32x+4x-4+1$

$\cancel{-32x(x-1)+4(x-1)+1}$

$\cancel{(4-32x)(x-1)}$

$(4-32x)(x-1)+1$

$4(1-8x)(x-1)+1$

~~4 · 6~~

$\cancel{4}\cdot 9$

$-32x^2+36x-3=0$

$32x^2-36x+3=0$

$\times\,19\,3$
57

$D = 36\cdot 36 - 3\cdot 4\cdot 32 =$

$= 9^2\cdot 4^2 - 3\cdot 8\cdot 4^2 =$

$= 4^2\cdot 3(27-8) = 4^2\cdot 3\cdot 19 = 4^2\cdot 57$

$x_1 = \frac{36+2\sqrt{57}}{64}$

$x_2 = \frac{36-2\sqrt{57}}{64}$

при $x \in \left[\frac{36-2\sqrt{57}}{64}; \frac{36+2\sqrt{57}}{64}\right]$

<0

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	f(x)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

0: ~~10~~ 8

1: 7

2: 3

3: 1

4: 2

5: 1

$10 \cdot (\overset{14}{\overbrace{\overset{10}{\overbrace{7+3}}+1+\overset{4}{\overbrace{2+1}}}}) +$

$7 \cdot (\overset{8}{\overbrace{3+1+2+1}}) +$

$3 \cdot (\overset{4}{\overbrace{1+2+1}}) +$

$1 \cdot (\overset{3}{\overbrace{2+1}}) +$

$2 \cdot 1$

$140 + 56 + 12 + 3 + 2 = 213$

$$\begin{array}{r} 140 \\ +\ 56 \\ 12 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 213 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ +\ 49 \\ 12 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 206 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\ln 4 \cdot (e^{\ln 4})^t + \ln 3 \cdot (e^{\ln 3})^t - \ln 5 \cdot (e^{\ln 5})^t =$

$= \quad a = e^t$

$\cancel{\ln 4 (a)}^{\ln 4} \quad \ln 4 \cdot a^{\ln 4} + \ln 3 \cdot a^{\ln 3} - \ln 5 \cdot a^{\ln 5} = 0$

$\cancel{f(x)} = g(x) = \ln x \cdot a^{\ln x}$

$4^t + 3^t - 5^t \geq 0 \quad \Big| : 5^t (>0)$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t \geq 1$

$f(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t - 1 \cancel{\geq}$

$f'(t) = \underset{<0}{\ln\frac{4}{5}} \cdot \underset{>0}{\left(\frac{4}{5}\right)^t} + \underset{<0}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \underset{>0}{\left(\frac{3}{5}\right)^t} = 0$

$\Downarrow$

$f'(t) < 0$ при $\forall t$

$f(t) \downarrow$

$\Downarrow$

≤ 1 ~~корня~~

при $t = 2$

$\cancel{4^2 + 3^2} - 5^{-2}$

$\Downarrow$

≤ 1 корня

$f(2) = 0$

$\Downarrow$

при $t \in (-\infty; 2]$

f' —, f ↓, t

$\cancel{f(t)} = 0$ при

$\log_3 (10x - x^2) \leq 2$

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x-9) \geq 0$

$+ \quad 1 \quad - \quad 9 \quad + \quad x$

$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in [0; 10) \end{cases}$

$x \in [0; 1] \cup [9; 10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f(x/y) < 0$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{x}{y}) = \left[\frac{x}{4y}\right]$

$f(\frac{1}{y}) = \left[\frac{1}{4y}\right]$

$y \geq 2 \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4y} \le \frac{1}{8}$

$f(\frac{1}{y}) \quad y \le 25 \quad \frac{1}{y} \geq \frac{1}{25} \quad \frac{1}{4y} \geq \frac{1}{100}$

$\frac{1}{4y} \in \left[\frac{1}{100}; \frac{1}{8}\right] \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) + f\left(\frac{y^n}{y^{n+1}}\right) =$

$= f(x) + f(y^n) + f(\frac{1}{y^{n+1}})$

$f(p) = [p/4] = \cancel{[p/4]} \cdot f(px) + f(\frac{1}{x})$ $\quad f(x) = -f(\frac{1}{x})$

$[p/4] = f(p) + f(x) + f(\frac{1}{x})$ $\quad f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$\cancel{[p/4]} = \cancel{[p/4]} + f(x) + f(\frac{1}{x})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] = f(1) + f(1)$
$f(1) = 0$

$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$y = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$$\alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right] +$$

$$+ \beta_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \beta_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \beta_n \left[\frac{p_n}{4}\right] < 0$$

$\cancel{f(0) = f(0) + f(x)}$ $p = 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23$

$\cancel{f(x) = 0}$

$\cancel{\alpha_1 \beta_1}$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\left[\frac{p_1}{4}\right] + (\alpha_2 - \beta_2)\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\left[\frac{p_i}{4}\right]$$

p	$\left[\frac{p}{4}\right]$
2	0
3	0
5	1
7	1
9	2
11	2
13	3
17	4
19	4
23	~~7~~ 5

~~2; 3 - сколько нужно~~

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4^t + 3^t - 5^t \geq 0$

$f(x) = 4^t + 3^t - 5^t$

$f(2) = 0$

$f'(x) = \ln 4 \cdot 4^t + \ln 3 \cdot 3^t - \ln 5 \cdot 5^t$

$\cancel{\ln 3}\ \cancel{f'(x)} =$

$\ln 4 \cdot 4^t + \ln 3 \cdot 3^t - \ln 5 \cdot 5^t = 0$

$\ln(4^{4^t}) + \ln(3^{3^t}) - \ln(5^{5^t}) = 0$

$$\ln\left(\frac{4^{4^t} \cdot 3^{3^t}}{5^{5^t}}\right) = 0$$

$$4^{4^t} \cdot 3^{3^t} = 5^{5^t}$$

$\cancel{t = \log_5 12}$ $\quad t = \log_{12} e$

$\cancel{4^{4^{\log_5 12}} = 4} \quad \cancel{4^{4^{\log_{12} e}} = 4^{e^{\log_{12} 4}}}$

$$f'(2) = \underbrace{\ln 4 \cdot 16}_{>16} + \underbrace{\ln 3 \cdot 9}_{>9} - \underbrace{\ln 5 \cdot 25}_{>25}$$

$$\ln\left(\frac{4^{16} \cdot 3^9}{5^{25}}\right) = \ln\left(\underset{<1}{\frac{4^{16}}{5^{16}}} \cdot \underset{<1}{\frac{3^9}{5^9}}\right) =$$

$= \cancel{\ln}\ \cancel{f'(2)}$ $\quad \ln(x)$ где $x < 1 \Rightarrow$

$f'(2) < 0$

при $t > 2$ $\quad f'(t) < 0$

$$\cancel{\ln 4^{4^t}} \frac{4^t \ln 4}{5^t \cdot \ln 5} + \frac{3^t}{5^t} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 5} = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^t \cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right) = 1$$

$$\ln\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\left(\frac{4}{5}\right)^t}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right)^{\left(\frac{3}{5}\right)^t} = 1$$

$$\ln\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\left(\frac{4}{5}\right)^t} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\left(\frac{3}{5}\right)^t}\right) = 1$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОО: $10x-x^2>0$

$-\quad 0 \quad + \quad 10 \quad -$

$x\in(0;10)$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x+4^{\log_3(10x-x^2)} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$

$\cancel{\log_b c \log_b a = \log_b a \log_b c}$

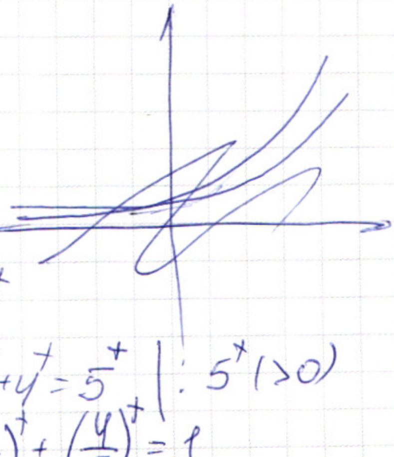
$\cancel{10x-x^2 \geqslant 0\ 5^{\log}}$

$10x-x^2+4^{\log_3(10x-x^2)} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$3^{\log_3(10x-x^2)}+4^{\log_3(10x-x^2)} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t=\log_3(10x-x^2)$

$3^t+4^t \geqslant 5^t$



$\cancel{f(x)=3^t+4^t}$

$\cancel{f'(x)=\ln 3\cdot 3^t+\ln 4\cdot 4^t}$

$\cancel{g(x)=5^t}$

$\cancel{g'(x)=\ln 5\cdot 5^t}$

$f(x)=3^t+4^t$

$3^t+4^t=5^t \quad |:5^t(>0)$

$3^t+4^t-5^t\geqslant 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t=1$

при $t=2$

$f(x)=g(x)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2 $a^2-13ab+36b^2=0$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$

$D=169b^2-36\cdot 4b^2=25b^2$

$\begin{array}{r} 169 \\ -\ 144 \\ \hline 25 \end{array}$

$a_1=\dfrac{13b+5b}{2}=9b$

$a_2=\dfrac{13b-5b}{2}=7b$

$x-12y=\sqrt{(x+6)(2y-1)}$ при $(x+6)(2y-1)\geq 0$

~~$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$~~

$a=x+6$ $x=a+6$

$b=2y-1$ $y=\dfrac{b+1}{2}$

$a+6-12\left(\dfrac{b+1}{2}\right)=\sqrt{ab}$

$4b-6b=\sqrt{4b^2}$

$-2b=\sqrt{4b^2}$

$a+\cancel{6}-6b-\cancel{6}=\sqrt{ab}$

$8b$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2-12ab+36b^2-ab=0$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-36\cdot 4b^2=25b^2=(5b)^2$

$a_1=\dfrac{13b+5b}{2}=9b$

$a_2=\dfrac{13b-5b}{2}=4b$

$a^2+9b^2=90$

$81b^2+9b^2=90$

$90b^2=90$

$b^2=1$

$16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90$

$b^2=\dfrac{90}{25}=\cancel{\dfrac{9}{5}}\sqrt{10}$

$b_1=1$

$b_2=-1$

$b_3=\dfrac{9}{5}\sqrt{10}$

$b_4=-\dfrac{9}{5}\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{-\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = \frac{1}{-\sqrt{5}} \quad \Big| : \cos 2\alpha$

если $\cancel{2\alpha}$ $\cos 2\alpha \neq 0$

$tg\, 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta = \frac{1}{-\sqrt{5}\cdot\cos 2\alpha}$

№2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x-12y = \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$\begin{matrix}18\\2\cdot6\cdot3\end{matrix}$

$\cancel{x^2-12x+36-36+36(y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=45}$

$\cancel{(x-6)^2-36+36((y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})=45}$

$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$a=x-6 \qquad x=a+6$

$b=2y-1 \qquad y=\frac{b+1}{2}$

$$\begin{cases} a+6-12\left(\frac{b+1}{2}\right)=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

при $a,b\geq 0$

(1) $a+\cancel{6}-6b-\cancel{6}=\sqrt{ab}$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2-12ba+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)