МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}. \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\cos\alpha \sin\alpha \pm 2(1-2\sin^2\alpha) = -1$

1) $2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha + 1 = 0.$

$4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0. \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$, т.к. $tg\,\alpha$ – определ $\Rightarrow \alpha \neq \cancel{\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n}.$ $\cancel{\pm}\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z \Rightarrow \cos\alpha \neq 0.$

$4tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - \frac{3}{\cos^2\alpha} = 0$

$4tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 3(1+tg^2\alpha) = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 3 = 0$

$D = \cancel{\frac{2\pm 4}{2}}\ 4+12 = 16$

$tg\,\alpha = \frac{2\pm 4}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = 3 \end{array}\right.$$

2) $2\sin\alpha\cos\alpha - 2(1-2\sin^2\alpha) = -1.$

$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$ $\Big|:\cos^2\alpha \neq 0$, т.к. $tg\alpha$ - инуредем $\Rightarrow \alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z \Rightarrow$ $\cos\alpha \neq 0$

$4tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 - tg^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0.$

$D = 4 + 12 = 16.$

$tg\alpha = \frac{-2 \pm 4}{6}$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3.$

№2. $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}. & \text{II}. \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. & \text{I}. \end{cases}$

I. $x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45.$

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90.$

$(x-6)^2 + 36(y-\frac{1}{2})^2 = 90.$

II. $x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}.$ $\quad x - 12y \geq 0.$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6.$ $\quad y \leq \frac{1}{12}x.$

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0.$

$x^2 - x(26y - 1) + 144y^2 + 12y - 6 = 0.$

$D = 676y^2 - 52y + 1 - 576y^2 - 48y + 24 = 100y^2 - 100y + 25 =$
$= (10y - 5)^2$

$x = \frac{26y - 1 \pm (10y - 5)}{2}$

1) $x = 18y - 3.$
Подставим в I.
$(18y - 3 - 6)^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90.$
$360(y - \frac{1}{2})^2 = 90$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

$$y-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=0\end{array}\right.\\ x=18y-3\\ y\le\frac{1}{12}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=15\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.\\ y\le\frac{1}{12}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=15\\ y=1.\end{cases}$$

2). $x=8y+2$.

Подставим в I.

$$(8y+2-6)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90.$$

$$64\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90.$$

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{10}.$$

$$y-\frac{1}{2}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$y=\frac{5\pm3\sqrt{10}}{10}.$$

Заметим, что если $y\le\frac{1}{12}x$, то $y\le\frac{1}{2}$.

$$\frac{5+3\sqrt{10}}{10}>\frac{5+9}{10}=1{,}4>0{,}5\Rightarrow y=\frac{5+3\sqrt{10}}{10}\text{ – не подходит}$$

$$\frac{5-3\sqrt{10}}{10}<\frac{5-9}{10}=-0{,}4<0{,}5\Rightarrow y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}\text{ – подходит}$$

$$\begin{cases}y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}\\ x=\frac{40-24\sqrt{10}}{10}+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}\\ x=\frac{6-12\sqrt{10}}{5}.\end{cases}$$

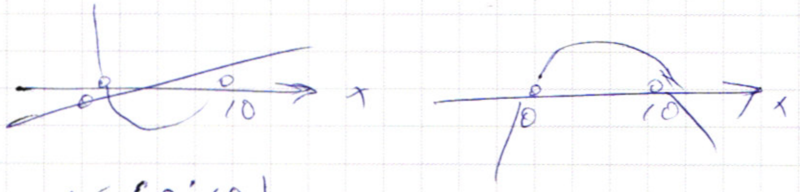
Ответ: $(15;1)$; $\left(\frac{6-12\sqrt{10}}{5};\frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3. $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

1) $10x - x^2 > 0$.

$f(x) = 10x - x^2$, $f(x) = 0$, $x \in \{0, 10\}$



$x \in (0;10)$

2) $(10x - x^2) + ((10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$.

Замена $t = 10x - x^2$, $t > 0$.

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$.

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$.

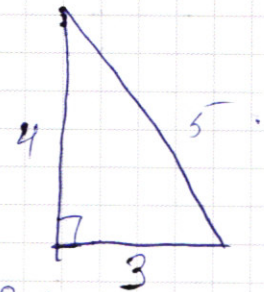
Замена. $m = \log_3 t$.

$3^m + 4^m - 5^m \geq 0$.

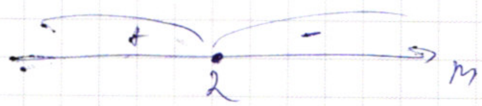
$g(m) = 3^m + 4^m - 5^m$, Найдём нули.

$3^m + 4^m - 5^m = 0$.

$3^m + 4^m = 5^m$.



$m = 2$.



3, 4, 5 – стороны египетского Δ, => ур-ние верно, когда $m = 2$.

$m \leq 2$.

Возврат

$\log_3 t \leq 2$, $3 > 1$

$t \leq 9$.

Возврат

$10x - x^2 \leq 9$

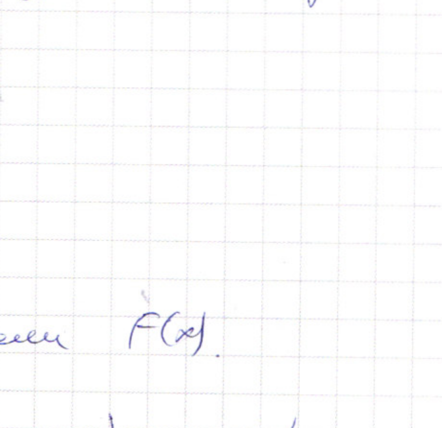
$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$f(x) = x^2 - 10x + 9$, Найдём нули $F(x)$.

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$D = 100 - 36 = 64$

$x = \frac{10 \pm 8}{2}$ => $x \in \{1; 9\}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

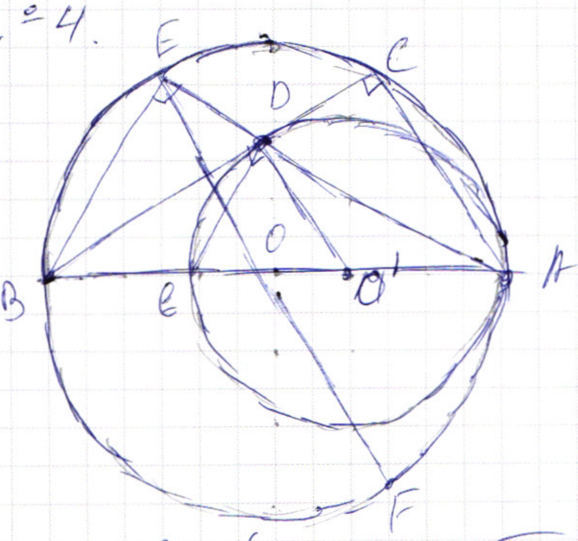
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 9 \end{array}\right. \\ x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le 1 \\ 9 \le x < 10 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10).$$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$.

№4.



O – центр Ω, O' – центр ω.

$\angle BCA = 90^\circ$ (AB – диаметр)

$\angle BDO' = 90^\circ$ (BD – касательная, O' – центр ω)

$\angle B$ – общий $\Rightarrow \triangle BDO' \sim \triangle BCA$

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R - r}{2R}$ (R – радиус Ω, r – радиус ω).

$\frac{17}{32} = 1 - \frac{r}{2R}$

$R = \frac{16}{15} r$.

$\triangle BDO'$: из т. Пифагора

$\cancel{r^2 = (2R - r)^2}$ $\quad BD^2 = (BO')^2 - (DO')^2$.

$(2R - r)^2 - r^2 = \frac{289}{4}$.

$\frac{289}{225} r^2 - r^2 = \frac{289}{4}$.

$\frac{64}{225} r^2 = \frac{289}{4}$.

$\frac{8}{15} r = \frac{17}{2}$

$r = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$

$R = 17$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle BEA = 90^\circ$ (т.к. BA – диаметр)

$\angle EBA = \angle EFA$ (опир. на одну дугу).

$\sin\angle(EBA) = \frac{AE}{BA}$.

Заметим, что $\triangle ADE$ и $\triangle AEB$ – подобн. (по 2 углам).

$\cancel{BE}\ \frac{AE}{BA} = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AD+ED}$.

$\frac{2r}{2R} = \frac{AD}{AE}$.

$\frac{r}{R} = \frac{15}{16}$.

$15AD + 15ED = 16AD$

$AD = 15ED$.

$ED \cdot DA = 15ED^2 = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}$.

$ED = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$DA = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

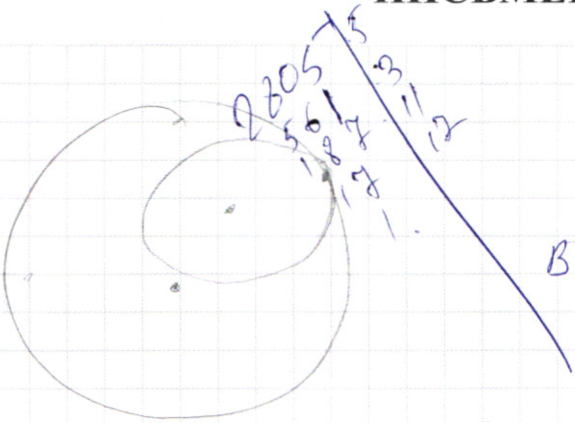
$AE = 8\sqrt{17}$.

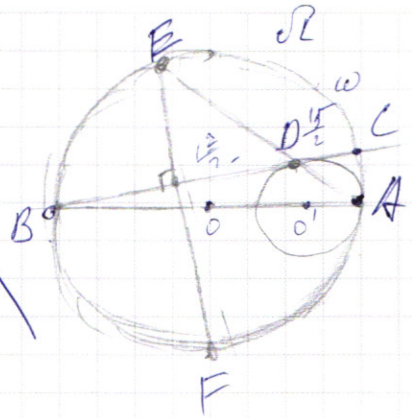
$\sin\angle(EBA) = \frac{8\sqrt{17}}{34} = \left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

$\angle EFA = \angle EBA = \arcsin\left(\frac{8\sqrt{17}}{34}\right) = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$.

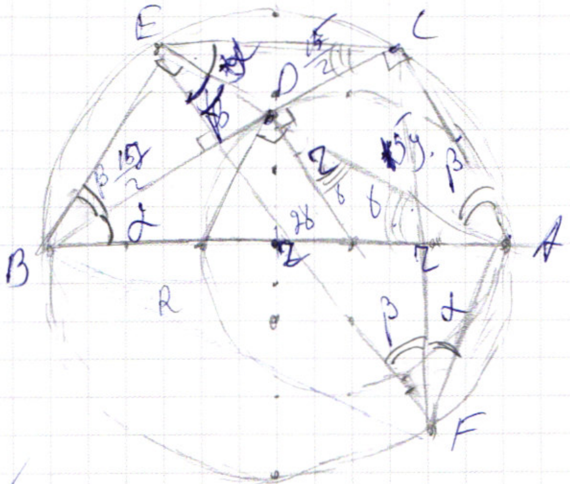
Ответ: $r = \frac{255}{16}$, $R = 17$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{15}{\frac{7.5}{16}} = \frac{15}{32}$



$\frac{BD}{BC} = \frac{2R - z}{2R} = 1 - \frac{z}{2R}$

$\frac{17}{32} = 1 - \frac{z}{2R}$

$\frac{z}{2R} = \frac{15}{32}$

$32z = 30R$

$16z = 15R$

$R = \frac{16}{15}z$

$2R - z = z\left(\frac{32}{15} - 1\right) = \frac{17}{15}z$

$\frac{289}{225}z^2 - z^2 = \frac{225}{4}$

$\frac{64}{225}z^2 = \frac{225}{4}$

$\frac{8}{15}z = \frac{15}{2}$

$z = \frac{225}{16}$

$R = 15$

$\frac{R}{\sin 8} = 2R$

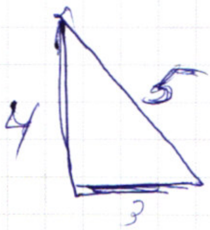
$900 - 256 =$

$\sqrt{644} = 28$

$\sqrt{30^2 - 16^2 + \frac{289}{4}} =$

$t + t^{\log_3 4} + t^{\log_3 5} = 0.$

$f(m) = 3^m + 4^m - 5^m = 0.$



$3^m + 4^m \geq 5^m$ $\quad m = 2.$

$m = 0.$

$f'(m) = 3^m \ln 3 + 4^m \ln 4 - 5^m \ln 5.$

$m < 0.$

$0 < m < 1$

$\lim f(m) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ f(m) = 0 \end{array}\right.$

$m \leq 2$

$\log_3 t < 2$

$t < 9$

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0.$

$D = 100 - 36 = 64$

$x = \frac{10 \pm 8}{2} = 9, 1.$

$[0; 1] \cup [9; 10).$

$\frac{\frac{225}{16}}{15} = \frac{15}{16} = \frac{x}{x+y}.$

$15x + 15y = 16x.$

$x = 15y.$

$15y^2 = \frac{17 \cdot 15}{4}.$

$y = \frac{\sqrt{17}}{2}.$ $\quad AE = 8\sqrt{17}.$

$\sin\alpha = \frac{8\sqrt{17}}{30} = \frac{4\sqrt{17}}{15}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x-x^2>0.$

$x=0, x=10.$

$x\in(0,10).$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$5^{\log_3(10x)}=0.$

$a^{\log_b c}=b^{\log_b a^{\log_b c}}=b^{\log_b c\cdot\log_b a}=(b^{\log_b c})^{\log_b a}=c^{\log_b a}.$

$t=10x-x^2, \ t>0.$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}>0.$

$t^{\log_b a}=$

$\log_b c \ \log_b a.$

$t^{\log_3 9-4}=t^{\log_3 9:\log_3 4}=(t^2)^{\frac{1}{\log_3 4}}$

$\frac{\log_3 3}{\log_3 4}=\log_4 3.$

$-t^{2\log_4 3}+t^{\log_3 4}+t\geq 0.$

$t^{\frac{2}{\log_3 4}}$

$-t^{\frac{2}{\log_3 4}}\Big(t$

$t^{(\log_3 5)}=t^{\log_3 9-4}=$

$\cancel{t^2}$

$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}=0.$

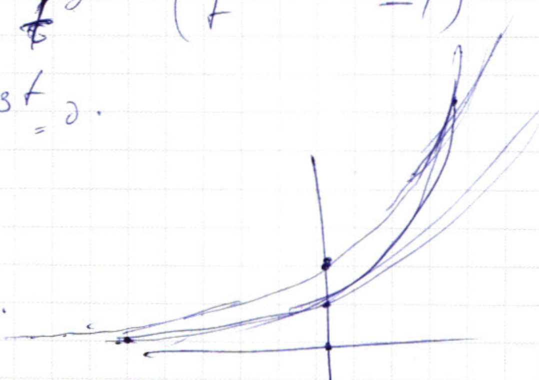
$t(1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}=0.$

$1=t^{\log_3\frac{5}{3}}-t^{\log_3\frac{4}{3}}=t^{\log_3\frac{4}{3}}\left(t^{\log_3\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}}-1\right)$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t}=0.$

$\cancel{t=5}$

$3^m+4^m=5^m.$



$t+t^{2\log_3 2}-t^{\log_3 2}$

$t^{\log_3 3}+t^{2\log_3 2}=t^{\log_3 5}.$

$t^{\log 2}\left(t^{\log_3 3-\log_3 2}+t^{2\log_3 2-\log_3 2}\right)$

$t^{\log_3 2}\left(t^{\log_3\frac{3}{2}}+t^{\log_3 2}\right.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ +36 \\ \hline 360 \end{array}$$

~~1) $\begin{cases} x = 18y - 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 2) $x =$~~

1) $x = 18y - 3$.

$(18y - 3 - 6)^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90$.

$18^2(y - \frac{1}{2})^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90$

$360(y - \frac{1}{2})^2 = 90$.

$(y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

$y - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}$.

$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$

$(15; 1)$

$y \le \frac{1}{12}(18y - 3) = \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}$.

$-\frac{1}{2}y \le -\frac{1}{4}$

$y \ge \frac{1}{2}$.

2) $x = 8y + 2$.

$(8y + 2 - 6)^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90$.

$64(y - \frac{1}{2})^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90$.

$(y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{10}$

$y - \frac{1}{2} = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$y = \frac{5 \pm 3\sqrt{10}}{10}$.

$y \le \frac{1}{12}(8y + 2) = \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{3}y \le \frac{1}{6}$.

$y \le \frac{1}{2}$.

$\frac{40 - 24\sqrt{10}}{10} + 2 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$

$\frac{5 + 3\sqrt{10}}{10} > \frac{5 + 9}{10} = 0,9 > 0,5$.

$\frac{5 - 3\sqrt{10}}{10} < \frac{5 - 9}{10} = -0,4 < \frac{1}{2}$.

$\left(6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}; \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0.$

$x^2 - x(26y-1) + 144y^2 + 12y - 6 = 0.$

$D = 676y^2 - 52y + 1 - 576y^2 - 48y + 24 =$

$= 100y^2 - 100y + 25 =$

$= (10y-5)^2 =$

$x = \frac{26y - 1 \pm (10y-5)}{2}$

1) $x = \frac{36y-6}{2} = 18y - 3.$ 2) $x = \frac{16y+4}{2} = 8y+2.$

1) $18y - 3 - 12y = \sqrt{2(18y-3)y - 12y - (18y-3) + 6}.$

$6y - 3 = \sqrt{36y^2 - 6y - 30y + 9}.$

$6y-3 = \sqrt{36y^2 - 6y + 9} = \sqrt{(6y-3)^2}.$

$6y - 3 = |6y-3|$

а) $6y-3 = 6y-3.$

$y \geq \frac{1}{2}.$

б) $12y - 6 = 0.$ $\Rightarrow$ $y \geq \frac{1}{2}.$

$y = \frac{1}{2}.$

2) $8y + 2 - 12y = \sqrt{2(8y+2)y - 12y - (8y+2) + 6}.$

$2 - 4y = \sqrt{16y^2 + 4y - 20y + 4}.$ $= \sqrt{16y^2 - 16y + 4} =$
$= \sqrt{(4y-2)^2}$

$2 - 4y = |2-4y|$

а) $2 - 4y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{2}.$

б) $4 - 8y = 0$ $\Rightarrow y \leq \frac{1}{2}.$

$y = \frac{1}{2}$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta-\frac{\cos2\beta}{\sqrt5}+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{1}{3}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$. $-\frac{1}{\sqrt5}\left(\cos2\beta=-\frac{1}{5}\right)$

$\frac{\sin2\alpha}{\sqrt5}\pm\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$. $\left(\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\right)$ $\frac{1}{5}$

$\sin2\alpha\pm2\cos2\alpha=-1$. $\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=1$

$\sin^2 2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$.

1) $\sin2\alpha+2(1-2\sin^2\alpha)=-1$ 2) $\sin2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2-4\sin^2\alpha=-1$.

$4\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-3=0$ $|:\cos^2\alpha\neq0$.

$4\,tg^2\alpha-2\,tg\alpha-\frac{3}{\cos^2\alpha}=0$. $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$4\,tg^2\alpha-2\,tg\alpha-3(1+tg^2\alpha)=0$.

$tg^2\alpha-2\,tg\alpha-3=0$.

$D=4+12=16$.

$tg\alpha=\frac{2\pm4}{2}$ =>

$tg\alpha=-1,3$.

$2\sin\alpha\cos\alpha-2(1-2\sin^2\alpha)=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha-2+4\sin^2\alpha+1=0$.

$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1=0$.

$4\,tg^2\alpha+2\,tg\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}=0$.

$4\,tg^2\alpha+2\,tg\alpha-1-tg^2\alpha=0$

$3\,tg^2\alpha+2\,tg\alpha-1=0$.

$D=4+12=16$.

$tg\alpha=\frac{-2\pm4}{6}$

$tg\alpha=-1,\frac{1}{3}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2)
$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

ОДЗ
$x-12y \geq 0$.
$y \leq \frac{1}{12}$

1) $x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$.
$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$.
$(x-6)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90$.

2) $x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$
$x^2-26xy+169y^2-25y^2+12y+x-6=0$.
$(x-13y)^2-9y^2+12y-4-16y^2+4+x-6=0$.
$(x-13y)^2-(3y-2)^2-4(y^2-1)+x-6=0$.
$(x-13y-3y+2)(x-13y+3y-2)-4(4y^2-1)+(x-6)=0$.
$(x-16y+2)(x-10y-2)+(x-16y+2)-(4y-2)^2=0$.
$(x-16y+2)(x-10y-1)=16\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$

$$\begin{cases} \left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{(x-16y+2)(x-10y-1)}{16} \\ 36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90-(x-6)^2 \end{cases}$$

$-16y^2+x-2=0$.
$-16y^2+16y-16y+x+2-4=0$.
$+(x-16y+2)-(16y^2-16y+4)=0$.

$\frac{9}{4}(x-16y+2)(x-10y-1)=90-(x-6)^2$.
$(x-16y+2)(x-10y-1)=$
$\frac{9}{4}\left(x^2-10xy-x-16xy+160y^2+16y+2x-20y-2\right)=90(x-6)^2$.
$\frac{9}{4}\left(x^2-26xy+160y^2-4y+x-2\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)