# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} & (2) \end{cases}$$

(2): $2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{17} \Leftrightarrow \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}} \text{ из } (1)}\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

Тогда $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin^2 2\beta = 1-\frac{1}{17} = \frac{16}{17}$, откуда $\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

(1): $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Если $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, то $\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$$

Т.к. $2\alpha \neq \pi + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$, то $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{4(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$

$2\operatorname{tg}\alpha + 4 - 4\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha$

$3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 5 = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}\end{array}\right.$

Если $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, то $\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$$

Т.к. $2\alpha \neq \pi + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$, то $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{4(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$

$2\operatorname{tg}\alpha - 4 + 4\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha$

$5\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}\end{array}\right.$

~~На одз~~ Т.к. оба случая по отдельности дают 2 значения $\operatorname{tg}\alpha$, а по условию их не меньше 3, то рассматривать следует оба случая. Тогда возможны следующие значения: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}\end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \frac{5}{3};\ \frac{3}{5}$.

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-1$, $b=y-6$, $ab\geq 0$. Тогда имеем: $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} & (1) \\ 9a^2+b^2=90 & (2) \end{cases}$

(1): $b-6a=\sqrt{ab}$

$$\begin{cases} b-6a\geq 0 \\ b^2+36a^2-12ab=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-6a\geq 0 \\ 36a^2-13ab+b^2=0 \quad (*) \end{cases}$$

(*): относительно $a$: $D=(13b)^2-36\cdot 4b^2=169b^2-144b^2=25b^2$

$$a=\frac{13b\pm 5b}{72}, \text{ т.е. } \left[\begin{array}{l} a=\frac{b}{4} \\ a=\frac{b}{9} \end{array}\right.$$

Подставим в (2): $\left[\begin{array}{l} 9\left(\frac{b}{4}\right)^2+b^2=90 \\ 9\left(\frac{b}{9}\right)^2+b^2=90 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{9}{16}b^2+b^2=90 \\ \frac{1}{9}b^2+b^2=90 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{25}{16}b^2=90 \\ \frac{10}{9}b^2=90 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=\frac{288}{5} \\ b^2=81 \end{array}\right.$

Т.к.

Если $a=\frac{b}{4}$, то из (2): $9\left(\frac{b}{4}\right)^2+b^2=90 \Leftrightarrow \frac{25}{16}b^2=90 \Leftrightarrow b^2=\frac{288}{5}$

Тогда $\begin{cases} b=12\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{12}{5}\sqrt{10} \\ a=\frac{3}{5}\sqrt{10} \end{cases}$ или $\begin{cases} b=-\frac{12}{5}\sqrt{10} \\ a=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \end{cases}$

Если $a=\frac{b}{9}$, то из (2): $9\left(\frac{b}{9}\right)^2+b^2=90 \Leftrightarrow \frac{10}{9}b^2=90 \Leftrightarrow b^2=81$

Тогда $\begin{cases} b=9 \\ a=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b=-9 \\ a=-1 \end{cases}$

Из найденных значений $a, b$ найдём $x=a+1$, $y=b+6$:

$\begin{cases} x=\frac{3}{5}\sqrt{10}+1 \\ y=\frac{12}{5}\sqrt{10}+6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ y=6-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{3}{5}\sqrt{10}+1;\ \frac{12}{5}\sqrt{10}+6\right)$, $\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10};\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$, $(2;15)$, $(0;-3)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$\forall a,b\in\mathbb{Q}_+:\ f(ab)=f(a)+f(b);\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right],\ p\in\mathbb{P}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)=f(x)$ – из свойства

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)<0\Leftrightarrow f(x)<f(y)$

Посчитаем значения $f(i)$ для натуральных $i\leq 28$.

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=\cancel{0}\ 1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(4)+f(6)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(14)+f(2)=1$

При $i\in\{4;5;\ldots;28\}$ $f(i)$ принимает значение

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & 9 \text{ раз} \\ 1 & 8 \text{ раз} \\ 2 & 3 \text{ раза} \\ 3 & 2 \text{ раза} \\ 4 & 2 \text{ раза} \\ 5 & 1 \text{ раз} \end{array}\right\}\ \text{25 чисел, других значений } f \text{ нет}$$

$\underbrace{f(x)=0}_{9\text{ чисел}}\Rightarrow\underbrace{f(y)\in\{1;2;3;4;5\}}_{16\text{ чисел}}$

$\underbrace{f(x)=1}_{8\text{ чисел}}\Rightarrow\underbrace{f(y)\in\{2;3;4;5\}}_{8\text{ чисел}}$

$\underbrace{f(x)=2}_{3\text{ числа}}\Rightarrow\underbrace{f(y)\in\{3;4;5\}}_{5\text{ чисел}}$

$\underbrace{f(x)=3}_{2\text{ числа}}\Rightarrow\underbrace{f(y)\in\{4;5\}}_{3\text{ числа}}$

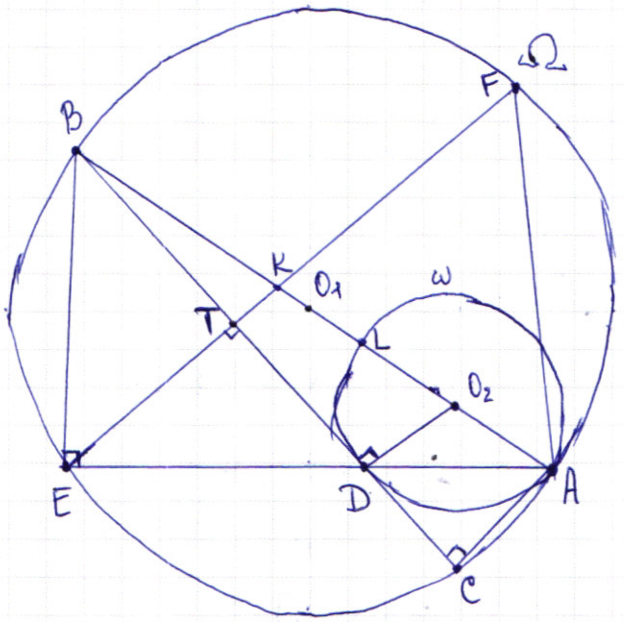
$\underbrace{f(x)=4}_{2\text{ числа}}\Rightarrow\underbrace{f(y)=5}_{1\text{ число}}$

$f(x)=5\Rightarrow\varnothing$

Итого кол-во пар $(x;y)$ равно $9\cdot 16+8\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=144+64+15+6+2=$
$=231$

Ответ: 231

## №4




$\Omega$ и $\omega$ касаются в $(\cdot)A$, $R_\Omega=R$, $R_\omega=r$.
$AB$ — диаметр $\Omega$, $BC$ касается $\omega$ в $D$.
$[AD)\cap\Omega=E$, $EF\perp BC$, $F\in\Omega$,
$CD=12$, $BD=13$

Найти: $R$, $r$
$\angle AFE$
$S_{\triangle AEF}$

Решение

1) $BD$ - касат. к $\omega\Rightarrow O_2D\perp BC$ ($O_2$ - центр $\omega$). $AB$ - диаметр $\Omega\Rightarrow\angle BCA=90^\circ$. Тогда $\triangle BDO_2\sim\triangle BCA$ по двум углам $\Rightarrow\frac{BO_2}{BA}=\frac{BD}{BC}$. Если $R$ и $r$ - радиусы $\Omega$ и $\omega$ соответственно, то $\frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{13+12}\Rightarrow 50R-25r=26R\Leftrightarrow 24R=25r\Leftrightarrow R=\frac{25}{24}r$. (Здесь был использован известный факт: ~~центр~~ точка касания окр-тей лежит на линии их центров, т.е. $O_1$, $O_2$, $A$ лежат на одной прямой; $O_1$ и $O_2$ — центры $\Omega$ и $\omega$ соотв.).

По св-ву касат. и секущей $BD^2=BL\cdot BA$, $L=\omega\cap BA$. Откуда $13^2=(2R-2r)\cdot 2R$
$4R(R-r)=169$. Т.к. $R=\frac{25}{24}r$, то $\frac{25}{6}r\cdot\frac{1}{24}r=169\Leftrightarrow\frac{25}{144}r^2=169\Rightarrow r=\frac{13\cdot 12}{5}=\frac{156}{5}\Rightarrow$
$\Rightarrow R=\frac{25}{24}\cdot\frac{156}{5}=\frac{5\cdot 12\cdot 13}{2\cdot 12}=\frac{65}{2}$.

2) Из $\triangle BCA$ по т. Пифагора $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4R^2-25^2}=\sqrt{65^2-25^2}=\sqrt{40\cdot 90}=60$.
Из $\triangle ACD$ по т. Пифагора $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{12^2+60^2}=12\sqrt{26}$
По св-ву хорд $BD\cdot DC=AD\cdot DE=13\cdot 12\Rightarrow DE=\frac{13\cdot 12}{12\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{26}}{2}\Rightarrow AE=AD+DE=\frac{25}{2}\sqrt{26}$.
$\angle BEA=90^\circ$ (опир. на диаметр $AB$) $\Rightarrow$ из $\triangle BEA$ по т. Пифагора $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=$
$=\sqrt{4R^2-\frac{625}{4}\cdot 26}\cancel{=\sqrt{65^2-\frac{13\cdot 5^2}{2}}=\sqrt{13\cdot 5(5-\frac{5}{2})}=\sqrt{5^2(13^2-\frac{13}{2})}=\sqrt{5^2\cdot 13\cdot(13-\frac{1}{2})}=}$
$=\sqrt{65^2-\frac{625}{4}\cdot 13\cdot 2}=\sqrt{5^2(13^2-\frac{5^2\cdot 13}{2})}=5\sqrt{13(13-\frac{25}{2})}=5\sqrt{\frac{13}{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{26}$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\operatorname{tg}\angle EBA = \frac{AE}{EB} = \frac{\frac{25}{2}\sqrt{26}}{\frac{5}{2}\sqrt{26}} = 5$, т.е. $\angle EBA = \operatorname{arctg} 5$

$\angle EBA = \angle EFA$ (вписанные, опираются на $EA$) $\Rightarrow \angle AFE = \operatorname{arctg} 5$.

3) Пусть $TD = x$. Тогда $BT = 13 - x$. Из т. Пифагора из $\triangle BTE$ и $\triangle ETD$ имеем:

$ET^2 = BE^2 - BT^2 = DE^2 - DT^2$, т.е. $\frac{25}{4}\cdot 26 - (13-x)^2 = \frac{26}{4} - x^2$

$6\cdot 26 = 169 - 26x + x^2 - x^2$

$x = \frac{169 - 6\cdot 26}{26} = \frac{13}{2} - 6 = \frac{1}{2} \Rightarrow TD = \frac{1}{2}$, $BT = \frac{25}{2}$.

Заметим, что $BT = \frac{1}{2}BC$, т.е. $T$ – середина $BC$. Тогда из подобия $\triangle BTK$ и $\triangle BCA$ (по двум углам) имеем, что $BK = \frac{1}{2}BA$, т.е. $K$ – центр $\Omega$ $(K = O_1)$. Тогда $O_1 \in EF$, т.е. $EF$ – диаметр $\Omega \Rightarrow \angle EAF = 90°$ (опир. на диаметр).

$\operatorname{tg}\angle AFE = \frac{AE}{AF} = 5 \Rightarrow AF = \frac{AE}{5} = \frac{5}{2}\sqrt{26}$.

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\sqrt{26}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{26} = \frac{125\cdot 26}{8} = \frac{125\cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{65}{2}$; $R_\omega = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$; $S_{\triangle AEF} = \frac{1625}{4}$.

№ 3

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} \geq x^2 - 26x + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$26x - x^2 > 0$

$x(26-x) > 0$

$x \in (0; 26)$

Заметим, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Докажем:

$\ln(a^{\log_b c}) = \ln(c^{\log_b a})$

$\log_b c \ln a = \ln c \log_b a$

$\frac{\ln a}{\ln c} = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

$\log_c a = \log_c a$ – верное равенство.

Тогда $13^{\log_5(26x - x^2)} = (26x - x^2)^{\log_5 13}$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} \geq (26x - x^2)^{\log_5 13} - (26x - x^2)$

Пусть ~~...~~ $26x-x^2=t,\ t>0$. Тогда
$t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13}-t$

Нули: ~~...~~ $t^{\log_5 12} = t^{\log_5 13}-t$

$t=25$ – корень: $5^{2\log_5 12}=144=5^{\log_5 169}-25$

$26x-x^2=25 \Leftrightarrow x^2-26x+25=0 \Leftrightarrow x=1$ или $x=25$

Представим $t=5^i$, $i\in\mathbb{R}$. Тогда $5^{i\log_5 12} \geq 5^{i\log_5 13}-5^i$

$12^i \geq 13^i-5^i$

$144^{i/2} \geq 169^{i/2}-25^{i/2}$

$144^{i/2}+25^{i/2} \geq 169^{i/2}$

Нуль этого нер-ва – $i=2$: $144+25=169$.

При $i<2$: ~~...~~ $144^{i/2}+25^{i/2}>169^{i/2}$ (например, при $i=1$: $12+5>13$)

При $i>2$: $144^{i/2}+25^{i/2}<169^{i/2}$ (напр., при $i=4$: $144^2+25^2<169^2$)

Значит, нер-во выполняется при $i\leq 2$, т.е. $t=5^i\in(0;25]$

$0<26x-x^2\leq 25$

$\begin{cases} x^2-26x<0 \\ x^2-26x+25\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;26) \\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

№ 6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad \forall x\in\left(\frac{2}{3};2\right]$

Т.к. на $\left(\frac{2}{3};2\right]$ $3x-2>0$, то имеем:

$\begin{cases} 8-6x\geq(ax+b)(3x-2) \\ ax+b\geq 18x^2-51x+28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ax^2+(3b-2a+6)x-(2b+8)\leq 0 \\ 18x^2-(51+a)x+(28-b)\leq 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

| x | f(x) |
|---|---|
| 4 | 0 |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |
| 7 | 1 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |
| 10 | 1 |
| 11 | 2 |
| 12 | 0 |
| 13 | 3 |
| 14 | 1 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 15 | 1 |
| 16 | 0 |
| 17 | 4 |
| 18 | 0 |
| 19 | 4 |
| 20 | 1 |
| 21 | 1 |
| 22 | 2 |
| 23 | 5 |
| 24 | 0 |
| 25 | 2 |
| 26 | 3 |
| 27 | 0 |
| 28 | 1 |

0 — 9 шт.
1 — 8 шт.
2 — 3 шт.
3 — 2 шт.
4 — 2 шт.
5 — 1 шт.

$\underbrace{f(x)=5}_{1\text{сл.}} \Rightarrow \underbrace{f(y)\in\{0;1;2;3;4\}}_{24\text{ сл.}}$

$\underbrace{f(x)=4}_{2} \Rightarrow \underbrace{f(y)\in\{0;1;2;3;4\}}_{22}$

$\underbrace{f(x)=3}_{2} \Rightarrow \underbrace{f(y)\in\{0;1;2\}}_{20}$

$\underbrace{f(x)=2}_{3} \Rightarrow \underbrace{f(y)\in\{0;1\}}_{17}$

$\underbrace{f(x)=1}_{8} \Rightarrow \underbrace{f(y)=0}_{9}$

$X=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\ldots$

$208+23=$
$=231$

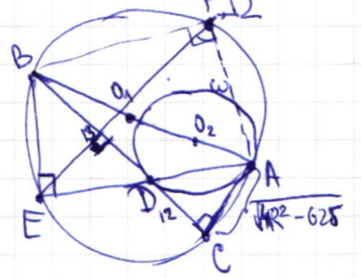
$\frac{1625}{4}$

$\frac{9}{2}$

$125 \cdot 26 = 750 + 250 = 3250$

$N=24+4\cancel{4}+40+51+72=70+40+123=\boxed{233}$

4




$CD=12$
$BD=13$ $\Rightarrow AD\cdot DE=12\cdot13=156$

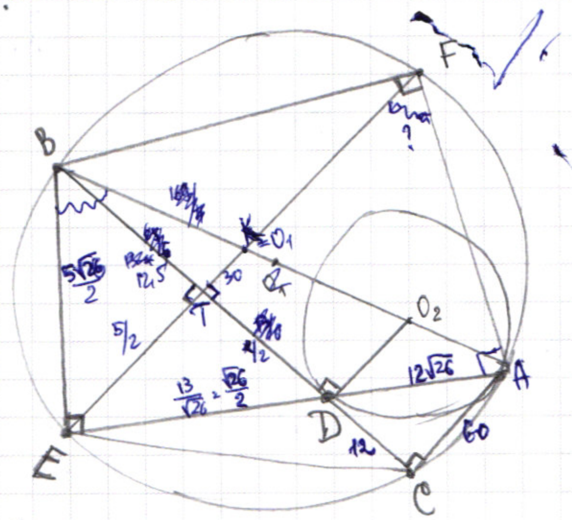
$BD^2=\cancel{R(R-2r)}$ $2R(2R-2r)=4(R-r)R$

$BD^2=R^2-2Rr$

$\underline{R^2-2Rr=169}$ $\quad R^2-Rr=\frac{169}{4}$

$AD=\sqrt{4R^2-481}$

5




$\frac{BD}{BC}=\frac{BO_2}{BA}=\frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{25}$

$50R-25r=26R$

$24R=25r$

$R=\frac{25}{24}r$

$\frac{625}{576}r^2-\frac{25}{24}r^2=\frac{169}{4}$

$625r^2-25\cdot24r^2=169\cdot24\cdot6$

$25r^2=13^2\cdot6^2\cdot2^2$

$5r=156$

$\boxed{r=\frac{156}{5}\Rightarrow R=\frac{5\cdot12\cdot13}{12\cdot2}=\frac{65}{2}}$

$AC=\sqrt{4R^2-625}=$
$=\sqrt{65^2-25^2}=\sqrt{40\cdot90}=60$

$AD=\sqrt{144+3600}=\sqrt{3744}=12\sqrt{1+25}=12\sqrt{26}$

$BE=\sqrt{169-\frac{26}{4}}=\sqrt{\frac{4\cdot13\cdot13-13\cdot2}{4}}=\sqrt{\frac{13\cdot2\cdot25}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{26}$

$\left(\frac{5}{2}\sqrt{26}\right)^2+\left(\frac{25}{2}\sqrt{26}\right)^2=\frac{25}{4}\cdot26+\frac{625}{4}\cdot26=\frac{650}{4}\cdot26=$
$=\frac{13\cdot5\cdot10\cdot13\cdot2}{4\cdot2}=13^2\cdot25=65^2$

$\frac{5\sqrt{26}}{2}\cdot\sqrt{26}=65$

$\frac{5}{2}\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}$

$\cancel{\frac{BT}{TD}=5}$

$\frac{13}{5}\quad 12 \quad \frac{13\cdot5}{2}$

$169\cdot\frac{25}{4}-169\cdot6$

$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$

$\frac{13}{1}$ $300$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{BK}{2R-r-BK}=\frac{5}{6}$$

$6BK=10R-5r-5BK$

$11BK=10R-5r=65\cdot 5-156=13\cdot 25-13\cdot 12=169$

$BK=\frac{169}{4}\Rightarrow AK=65-\frac{169}{11}=13\left(5-\frac{13}{11}\right)=13\cdot\frac{42}{11}$

$\operatorname{tg}\angle EBA=5\Rightarrow\boxed{\angle AEF=\operatorname{arctg}5}$

$\cancel{ET=\sqrt{\frac{65}{6}\cdot\frac{13}{6}}=\frac{13}{6}\sqrt5}=\frac{\sqrt{65}}{6}$

$\frac{BT}{TD}=\frac{BK}{KO_2}$

$\frac{26}{4}-x^2=\frac{625}{4}\cdot 26-169-x^2+26x$

$x=\frac{1}{4}-\frac{625}{4}+\frac{13}{2}=\frac{26}{4}-\frac{24}{4}=\frac12$ T — середина BC

$\frac{BK}{65}=\frac12\Rightarrow BK=\frac{65}{2}\Rightarrow K=O_1\Rightarrow EF$ диаметр $\Rightarrow S_{AEF}=\frac12\cdot\frac{5\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{25}{2}\sqrt{26}=\frac{25\cdot 5\cdot 26}{8}=\frac{25\cdot 13\cdot 5}{4}=$

$\boxed{=\frac{1625}{4}}$

$$\frac{\frac{25\sqrt{26}}{2}}{65\sqrt{13}}=\frac{5}{26}\sqrt{26}=\frac{5}{\sqrt{26}}\Rightarrow\cos=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$\frac{\frac{65}{6}}{25}=\frac{KT}{GO_1}$

$KT=\frac{65\cdot 10}{156}=\frac{130}{5}$

$ET=\sqrt{\frac{26}{4}-\frac{169}{36}}=\sqrt{\frac{26\cdot 9-169}{36}}=\sqrt{\frac{13(18-13)5}{36}}$

$ET=\sqrt{\frac{25}{2}\cdot\frac12}=\frac52$

28, 72, 56, 196, 2016, 130

$7\cdot4\cdot9\cdot8=$

$\frac{28\cdot 72}{6}=9\cdot16\cdot14$

$2501+100=2601$

125, 13, 375, 125, 1625

⑥ $\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$

$x_0=\frac{51}{36}\in\left[\frac23;2\right]\Rightarrow y_0=\frac{18\cdot51^2}{36^2}-\frac{51^2}{36}+28=\frac{51^2}{36}\left(-\frac12\right)+28=$

$=28-\frac{51^2}{72}=2016-2601=-485$

$y(2)=18\cdot4-51\cdot2+28=$

$=72+28-102=-2$

$y\left(\frac23\right)=\frac{18\cdot4}{9}-51\cdot\frac23+28=\frac{18\cdot4-102\cdot3+28\cdot9}{9}=\frac{72+252-306}{9}=2$

$\in[-485;2]$

$\frac{8-6x}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$

$3x-2\in(0;4]$ $\in(1;\infty)$

$\in(-1;\infty)$

$18x^2-51x+28-ax-b\leq0$

$18x^2-(51+a)x+(28-b)\leq0$

$\cancel{8-6x\geq 3ax^2+(3b-2a)x-2b}$

$\cancel{3ax^2+(3b-2a+6)x-(2b+8)\leq0}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}\geq(26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)$

$t^{\log_5 12}\geq t^{\log_5 13}-t$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}\geq(26x-x^2)\left((26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}-1\right)$

$t\left(t^{\log_5\frac{13}{5}}-1\right)$

$\cancel{(26x-x^2)^{\log_5 12-1}\geq(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}}$

$1+t^{v}=t$

$(26x-x^2)^{\log_5 12-1}\geq(26x-x^2)^{\log_5 13-1}-1$

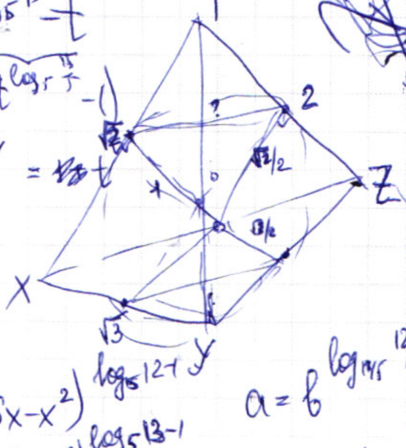
$1+(26x-x^2)^{\log_5 12-1}=(26x-x^2)^{\log_5 13-1}$

$x\in[0;26]$

$\frac{1}{(26x-x^2)^{\log_5 13-1}}(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{13}}\geq0$

$a\geq b-1$

$b^{\log_{13/5}12/5}\geq b-1$



$a=(26x-x^2)^{\log_5 12-1}$

$b=(26x-x^2)^{\log_5 13-1}$

$a=b^{\log_{13/5}12/5}$

$\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{\log_5 12/5}{\log_5 13/5}=\log_{13/5}12/5$

$\ln a=\ln b\log_{13/5}12/5$

$12+5$

$144$, $169$, $7^{\log_5 13}$, $144^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2\geq 0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-(26x-x^2)^{\log_5 13}\geq 0$

$t=26x-x^2$: $t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}\geq 0$

$0\leq t\leq 169$ Нули: $t^{\log_5 12}+t=t^{\log_5 13}$

$1-\frac{1}{272}=\frac{271}{272}$ $\quad \sqrt{t}^{\log_5 144}+t-\sqrt{t}^{\log_5 169}\geq 0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow \sin 2\beta=-\frac{1}{4\sqrt{17}}$

$-\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow \sin 2\beta=\frac{1}{4\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\pm\frac{\sqrt{271}}{4\sqrt{17}}$

$16\cdot 17=$
$=272$

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{4\sqrt{17}}\Rightarrow \cos 2\beta=\pm\frac{\sqrt{271}}{4\sqrt{17}}$

$\pm +$: $3\operatorname{tg}^2\alpha \pm 2\sqrt{271}\operatorname{tg}\alpha+3=0$

$D=4\cdot 271-9\cdot 4=1084-36=1048$

$\pm -$: $5\operatorname{tg}\alpha \pm 2\sqrt{271}\operatorname{tg}+3=0$

$D=4\cdot 271-60=1084-60=1024$

$\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos(4\alpha+6\beta))+\frac{1}{2}(\cos 2\beta-(\cos(4\alpha+2\beta))=\frac{2}{17\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta-\frac{1}{2}\underbrace{(\cos(4\alpha+6\beta)+\cos(4\alpha+2\beta))}=\frac{2}{17\sqrt{17}}$

$2\sin 2\beta\sin(4\alpha+4\beta)=\frac{2}{17\sqrt{17}}$

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}\geq 0$ $\geq -t$

$t=t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{17}$

$\sin 2\alpha\underbrace{\cos 2\beta}_{\pm\frac{\sqrt{271}}{4\sqrt{17}}}+\cos 2\alpha\underbrace{\sin 2\beta}_{\pm\frac{1}{4\sqrt{17}}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=$

$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\pm\sqrt{271}\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-4$

$1-\cos^2(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{17}=-\sin 2\beta(\cos 2\alpha+2\beta)$

$\pm\sqrt{271}\cdot 2\operatorname{tg}\alpha\pm(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=-4(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$

$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\pm\sqrt{271}\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-4$

$\pm 2\sqrt{271}\operatorname{tg}\alpha\pm(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=-4-4\operatorname{tg}^2\alpha$

$b=\frac{4}{5}\sqrt{50}=$

$\frac{9}{4}b$ $\frac{b}{4}$ $=\frac{9}{16}b$

$2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\pm 2\sqrt{271}\pm 32}{10}$

$\sin 2\alpha\underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{1}{\sqrt{17}}}+\underbrace{\sin 2\beta}_{\frac{\pm 4}{\sqrt{17}}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{18\cdot 16}{25}=\frac{288}{5}=$

$9-\frac{b^2}{16}+c^2=50$

$\frac{25}{16}b^2=50$

$+$: $\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{4(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-1$

$2\operatorname{tg}\alpha+4-4\operatorname{tg}^2\alpha=-1-\operatorname{tg}^2\alpha$

$3\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-5=0$

$\operatorname{tg}\alpha=-1$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}$

$=\frac{2}{5}\cdot 144$

$=12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$-$: $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$

$2\operatorname{tg}\alpha-4+4\operatorname{tg}^2\alpha=-1-\operatorname{tg}^2\alpha$

$5\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-3=0$

$\operatorname{tg}\alpha=-1$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$

$f(2)=0$ $\quad f(3)$

$f(3)=0$ $\quad f(5)=1$

$f(4)=0$ $\quad f(6)=0$

B $\underbrace{f\left(\frac{x}{y}\right)}_{<0}+f(y)=f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos^2(2\alpha+2\beta) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\sqrt{17}\cos 2\beta \pm 4\sqrt{17}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -2$

~~$2\sin 2\alpha \sin\beta \sin 3\beta + 2\cos 2\alpha \sin\beta\cos 3\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sin 2\alpha = -2 \pm \sqrt{17}\cos 2\beta \mp 4\sqrt{17}\sin 2\beta$~~

$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}\end{cases}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta - \cos 2\beta) + \cos 2\alpha(\sin 4\beta - \sin 2\beta) +$

$+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{2}{17}$

$2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) - \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}}$

1596841 | 73
146 | 21874
136
73
638
584
544
51
331
292
39

2046 | 13
13 | 159
77
65
124
117
76

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

385
360
2310
1155
138600

138600
288
11088
11088
2772
39916800

$65^2 = 3625+600 = 4225$

39921025 | 25
1596841

576
360
3456
1728
207360

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x^2-2x+1)+y^2-12y+36=90 \end{cases}$

$\begin{cases} 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \\ y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \end{cases}$

$x-1=a,\ y-6=b,\ ab>0$

$\begin{cases} 9a^2+b^2=90 \\ b-6a=\sqrt{ab} \end{cases}$

$25a^2-13ab+90=0$

$ab = 36a^2+b^2-12ab$

$(3a+b)^2 = 90 - 192a^2 - 6b^2 + 72ab$

(a): $\begin{cases} b-6a\geq 0 \\ b^2-12ab+36a^2=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{36a^2-13ab+b^2=0} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

~~$25a^2-13ab+90=0$~~

~~$b = \frac{25a^2+90}{13a}$~~

$D = 169-36\cdot 4 = 25$

$a = \frac{13b\pm 5}{72}$

$3b^2+13ab=360$

$a = \frac{360-3b^2}{13b}$

$9\left(\frac{169b^2\pm 130b+25}{72^2}\right) + b^2 = 90$

$(576+169)b^2 \pm 130b - (72\cdot 8\cdot 90+25) = 0$

$\frac{169}{72\cdot 8}b^2 \pm \frac{130}{72\cdot 8}b + \frac{25}{72\cdot 8} + b^2 = 90$

$D = 130^2 + 4(576\cdot 90+25)\cdot 745 =$

$\begin{cases} 3b^2+13ab=360 \\ 27a^2-13ab=-90 \end{cases}$

$169b^2 \pm 130b + 25 + 72\cdot 8b^2 = 72\cdot 8\cdot 90$

$= 207460\cdot 745+130^2$

$13ab = 27a^2 + \frac{450}{2} - \frac{3b^2}{2}$

$169b^2 \pm 65b = 360\cdot 72 - 216b^2$

$385b^2 \pm 65b - 360\cdot 72 = 0$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$a = \frac{13b\pm 5b}{72} \to \frac{b}{9},\ \to \frac{b}{4}$

$D = 65^2 + 4\cdot 360\cdot 72\cdot 385$

$\frac{45}{36}b^2 = 90$

$b^2 = 72$

$a = \frac{b}{9} \Rightarrow \frac{b^2}{9} + b^2 = 90 \Rightarrow b = \pm 9,\ a = \pm$

$\frac{2}{36}b^2 + b^2 = 90$

$(9;\ )\ (-9;\ -)$

$b = 6\sqrt{2},\ a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$b = -6\sqrt{2},\ a = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)