МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $(x-4x)-$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2(\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta))$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad (y-1)^2-(x-2)(y-1)-5=0$

$D = \cancel{(y-1)^2}\, x^2-4x+4+$

$+20 = x-4x+24=$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha(\operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta) = -\frac{4}{5}.\ -\frac{1}{\sqrt5}$

$(x-2y)^2 = 25+(y-1)^2 - \cos 2\alpha(\operatorname{tg} 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta + \operatorname{tg} 2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$-4(x-2y)^2 \Rightarrow$

$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta + \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{5}{4\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{4}$

$= (x-2y)^2 = 25 + \cancel{(y-1)}\ x+$

$(y-1-2x+4y)(y-1$

$2\,\cancel{\operatorname{tg} 2\alpha \sin}$ $\quad \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta$

$\cancel{2\operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\beta^2 - \operatorname{tg} 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos}$

$2\operatorname{tg} 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta =$

$= 2\cos 2\beta(\operatorname{tg}\cos 2\beta + \sin 2\beta)$.

$(x-2y)^2 = 5+(y-1)^2$. $\quad (x-2)(y-1) = 5+(y-1)^2$.

$\frac{1}{2\cos 2\beta} = \frac{4}{\sqrt5}$

$x^2-4x+24$

$D = k^2-ac = 4-24$. $\quad 8\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{1} = \sqrt5 \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{8}$

$\sin 2\beta =$ $\quad \sin 2\beta = -\sqrt{\frac{\sqrt5}{8}^2} - \frac{\sqrt5}{8}$

$\sin 2\alpha$ $\quad \begin{cases} (x-2y) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2+8y^2-4x-18y = 12 \end{cases} \Rightarrow$

$(x-2y)^2 = 25+(y-1)^2-$

$-4(x-2y)^2 \Rightarrow$ $\quad \begin{cases} (x-2y)^2 = (x-2)(y-1) \cdot 4 \\ \cancel{(x-2y)}^2\ (x-2)^2+3(y-1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x-2y)^2 = 25+(y-1)^2$.

$(x-2)^2+4(y-1)^2 = 25+(y-1)^2$.

$5(x-2y)^2$

$(x-2-2y+2)^2 = 25+(y-1)^2-4(x-2y)^2$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=\cos 2\alpha(\operatorname{tg}2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=$

$=\cos 2\alpha(\operatorname{tg}2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta+\operatorname{tg}2\alpha)=\cos$

$=\cos 2\alpha(2\operatorname{tg}2\alpha\cos^2 2\beta-\operatorname{tg}2\alpha+2\sin 2\beta\cos 2\beta+\operatorname{tg}2\alpha)=$

$=\cancel{\cos 2\alpha(2\operatorname{tg}2\alpha\cos}=2\cos 2\alpha\cos 2\beta(\operatorname{tg}2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta)$

Имеем $\begin{cases}\cos 2\alpha(\operatorname{tg}2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} & \boxed{1}\\ 2\cos 2\alpha\cos 2\beta(\operatorname{tg}2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta)=-\frac{4}{5} & \boxed{2}\end{cases}$

Т.к. $\cos 2\alpha\neq 0$ ($\operatorname{tg}\alpha$ определён) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{1}:\boxed{2}=\frac{1}{2\cos 2\beta}=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5\sqrt5}{5\cdot 4}=\frac{\sqrt5}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos 2\beta\cdot\sqrt5=4\Rightarrow\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\in[-1;1]$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}=\sqrt{\frac{5-4}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}$ (из основного

$\sin 2\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt5}$ тригоном тождества

Т.к. $\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow$ (при $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$)

$\Rightarrow\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1\Rightarrow\cancel{4\cos 2\alpha\cos}$

$\Rightarrow 4\cos\alpha\sin\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1.$

$4\cos\alpha\sin\alpha+2\cos^2\alpha=0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\cos\alpha\neq 0$ (tg определён) $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{4\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0}{\cos\alpha}\Rightarrow 4\operatorname{tg}\alpha+2=0\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}.$

Если $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow -4\cos\alpha\sin\alpha+2\cos^2\alpha=0\Rightarrow$

$\cancel{-4\operatorname{tg}\alpha+2}=-4\operatorname{tg}\alpha+2=0\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=?$ ~~не может~~

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-1)^2 - (x-2)(y-1)^2 - 5 = 0.$

$D = x^2 - 4x + 4 - 20 = x^2 - 4x - 16 \quad D = 4 + 16 = 20.$

$5(x-2y)^2 = 5 + (y-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2y)^2 = 1 + \frac{(y-1)^2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{(y-1)^2}{5} = (x-2)(y-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 + (y-1)^2 = 5(x-2)(y-1)$

$(y-1)^2 - 5(x-2)(y-1) + 5 = 0.$

$D = 25(x^2 - 4x + 4) - 20 = 25x^2 - 100x + 80$

$\sim 5.$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}). \quad x \in N;\ y \in N.$

$f(\frac{x}{y}) = [\frac{x}{y}] = [x] + [\frac{1}{y}]. \quad \frac{1}{y} \le 1;$

при $y=1$. $[x] = [x]+1$ неверно $\Rightarrow y \ne 1$.

при ~~$x=1$~~ $y=1$ ~~$1 = 1+1$ неверно~~

при $x=1$ $[\frac{x}{y}] = [x] + [\frac{1}{y}]$, т.к. $[\frac{1}{y}] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$[\frac{x}{y}] = [x]$~~. $f(\frac{x}{y}) = [\frac{x}{4y}]$.

$f \quad [\frac{x}{4y}] = [x] + [\frac{1}{y}]$. при $y=1$.

$[\frac{x}{4}] = [x] + 1$. неверно $\Rightarrow y \ne 1$

при $y \ne 1$ $[\frac{x}{y}] = [\frac{x}{4}] = [x]$

$f[\frac{1}{y}] = \quad f[\frac{a}{b}] = f[a] + f[\frac{1}{b}].$

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow$$

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(y-1)-2(y-1)\geq 0 \Rightarrow$
$(x-2)(y-1)\geq 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(x-2y)^2=(x-2)(y-1)\cdot 6 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(x-2)(y-1)=6(x-2y)^2 \\ (x-2)^2+(3(y-1))^2=5^2 \end{cases} \Rightarrow$$

вычтем из 2-ого 1-ое $\Rightarrow$ $(x-2)^2-6(x-2)(y-1)+(3(y-1))^2=5^2-6(x-2y)^2$

$(x-2-3(y-1))^2=5^2-6(x-2y)^2.$

$(x-2-3y+3)^2=25-6(x-2y)^2.$

$(x-3y+1)^2=25-6(x-2y)^2.$

$(x-3y+1)^2-5^2=-6(x-2y)^2.$

$(x-3y+1-5)(x-3y+1+5)=-6(x-2y)^2.$

$(x-3y-4)(x-3y+6)+6(x-2y)^2=0.$

$$\begin{cases} 4(x-2)(y-1)=4(x-2y)^2. \\ (x-2)^2+4(y-1)^2=25-5(y-1)^2. \end{cases} \Rightarrow$$ вычту из 2-ого 1-ое

$\Rightarrow (x-2)^2-4(x-2)(y-1)+4(y-1)^2=25-5(y-1)^2-4(x-2y)^2.$

$(x-2+2y+2)^2=25-5(y-1)^2-4(x-2y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x-2y)^2=25-5(y-1)^2 \Rightarrow (x-2y)^2=5-(y-1)^2.$

$(x-2y)^2=5-(y-1)^2=(x-2)(y-1). \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-1)^2-(x-2)(y-1)-5=0.$

$y^2-2y+1-xy+2y+x-2-5=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2-xy+x-6=0.$ $x=\frac{y^2+6}{y-1}.$ $y\neq 1$ т.к. при $y=1$.

$1-x+x-6\neq 0 \Rightarrow \frac{y^2+6}{y-1}-2y=\sqrt{\left(\frac{y^2+6}{y-1}-2\right)(y-1)}=$

$=\frac{y^2+6-2y^2+2y}{y-1}=\sqrt{y^2+6-2y+2} \Rightarrow \frac{-y^2+2y+6}{y-1}=\sqrt{y^2-2y+8}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$.

ОДЗ: $x^2+18x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

Т.к. $x^2+18x > 0 \Rightarrow$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13}$

Пусть $x^2+18x = t \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

Пусть $f(t) = 5^{\log_{12} t} + t$ и $g(t) = t^{\log_{12} 13}$.

$f'(t) = \frac{1}{\ln 12\, t} \cdot 5^{\log_{12}(t-1)} + 1$, т.к. $t > 0$ $5^{\log_{12}(t-1)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(t) > 0$ при $t \in R \Rightarrow f(t)$ – монотонно возрастает

$g'(t) = \log_{12} 13 \cdot t^{\log_{12}\frac{13}{12}} > 0$ при $t \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ – монотонно возрастает $g(t)$ – монотонно возрастает $\Rightarrow g(t) = f(t)$ в 1-ой точке при этом воспользуемся полным методом интервалов $5^{\log_{12} t} + t = t^{\log_{12} 13}$ при $t = 144 = 12^2$, т.е.

$5^{2} + 144 = 144^{\log_{12} 13} \Rightarrow 13^2 = \left[12^{\log_{12} 13}\right]^2$, верно

при $t = 1$ $5^{\log_{12} 1} + 1 > 1^{\log_{12} 13} \Rightarrow$

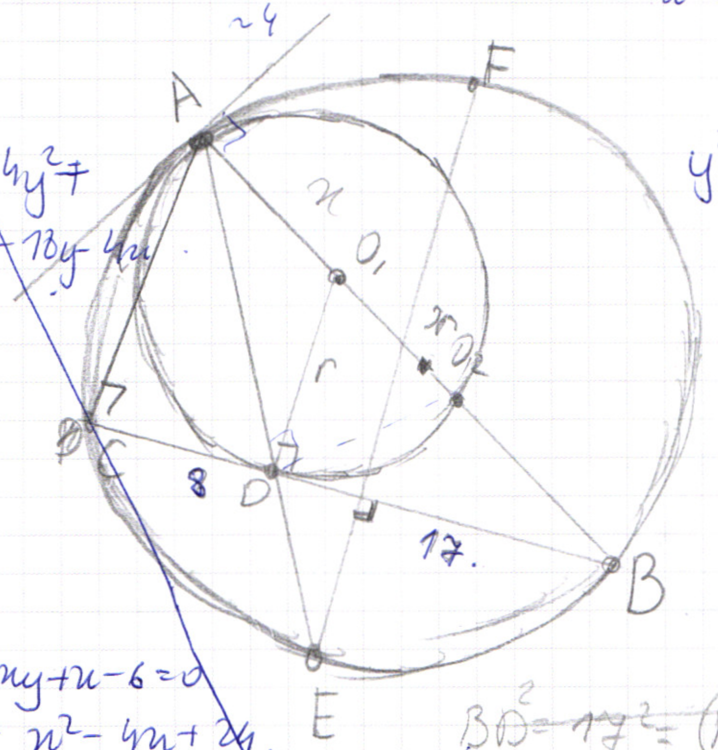
$\Rightarrow 5^{\log_{12} t} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$ при $t \leq 144 \Rightarrow$

~~$x \in (-\infty; 144]$~~; ОДЗ: $x \in (-\infty; -18) \cup$

$\Rightarrow x^2+18x \leq 144 \Rightarrow x^2+18x-144 \leq 0 \Rightarrow (x+24)(x-6) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-24; 6] \\ \text{ОДЗ: } x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-24; 18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; 18) \cup (0; 6]$



$x - 2y = \sqrt{xy - 2x + x - 2y + 2} =$
$= x - 2y$

$y^2 - 2y + 1 - xy + x + 2y -$
$- 2 - 5 = 0$

$y^2 + 1 - 7 - xy = 0.$

$y^2 - xy + x - 6 = 0$

$(2R - 2r) \cdot 2$

$D = x^2 - 25$

$x^2 - 4x + 4 + 20$

$x^2 - 4xy + 4y^2 +$
$+ 4xy + 5y^2 - 18y - 4x$

$y^2 - xy + x - 6 = 0$
$D = x^2 - 4x + 24$

$BD^2 = 17^2 = (2R^2 - 2r)^2 \cdot R^2 = (2R^2 - 2r^2$
$= (2R - 2r)^2 - 2R^2 = 2(R^2 - r)^2 - R^2 = 2(R - r - R)($
$= 2(R - r) \cdot 2R = 4R(R - r).$ $AD \cdot DE = BD \cdot CD \Rightarrow$
$\Rightarrow 17 \cdot 8 = AD \cdot DE$

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{25} \Rightarrow AC = \frac{25r}{17}.$

$AC = \frac{25}{17} r$

$AC^2 + BC^2 = 4R^2.$

$(2R)^2 = \left(\frac{25r}{17}\right)^2 + 25^2 = 25^2\left(\frac{r^2}{17^2} + 1\right) = \frac{25^2}{17^2}(r^2 + 17^2) \Rightarrow$

$\frac{25^2}{17^2} r^2 + 25^2 = 4R^2.$

$\frac{(2R)^2 \cdot 17^2}{25^2} = \frac{(34R)^2}{25^2} = r^2 + 17^2 \Rightarrow$

$4R^2 = 17^2 + 4r.$

$\Rightarrow \left(\frac{34}{25}R\right)^2 = r^2 + 17^2$

$\frac{25^2}{17^2} r^2 +$

$4R(R - r) = 17^2$ $\quad 4R^2 = \frac{25^2}{17^2}(r^2 + 17^2)$

$4R^2 - 4r = 17^2 \Rightarrow \quad 17^2 + 4r = \left(\frac{25}{17}\right)^2 (r^2 + 17^2) =$

$= \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 4r + 17^2 - 25^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 4r - (25 - 17)(25 + 17) = 0.$

$D = b^2 - ac = 4 + (25 - 17)(25 + 17) \cdot \frac{25^2}{17^2} =$

$(x - 2y)^2 = 5 - (y - 1)^2$

$5 - (y - 1)^2 = 0$

$(y - 1)^2 = (x^2 - 2y)^2 - 5.$

$x - 2y = \sqrt{(x - 2)(y - 1)}$

$(x - 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 25$

$(x - 2y)^2 = (x - 2)(y - 1)$

$(x - 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 25$

$(x - 2)^2 + 8(y - 1)^2 = 0$

$(x - 2y)^2 + (x - 2)(y - 1) \cdot 4$

$(x - 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 25 - 5(y - 1)^2.$

$(x - 2)^2 + (x - 2)^2.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $y \geq 4$ ~~$4 \leq y \leq 8$~~. $y=4$ $f(y) = [\frac{2}{4}] + [\frac{2}{4}]$ не подходит, $y=5$ $f(y) = 1 \Rightarrow x \leq 4$; $y=6$ $f(y)=0$ нет; ~~$y=7$~~ Рассмотрю значения $f(a)$ при $a \in N$ $a \in [1; 24]$ $f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=0$; $f(5)=1$. $f(6)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(11)=2$; $f(12)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=0$. (делал, пользуясь рекуррентными свой-вами функции f) $\Rightarrow$

$f(y)=1$: при $y = 5; 7; 10; 14; 15; 20; 21$; $x = 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24$ $(N(y)_1 = 7$; $N(x)_1 = 11 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_1 = N(y)_1 \cdot N(x)_1 = 77$ $(N(p)$ - функция считающая кол-во

$f(y)=2$: при $y = 11; 22$; $N(x)_2 = N(y)_1 + N(x)_1 = 18$ $N(y)_2 = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_2 = N(y)_2 \cdot N(x)_2 = 18 \cdot 2 = 36$

$f(y)=3$: при $y=13$; $N(x)_3 = N(x_2) + N(y_2) = 20 \Rightarrow N_3 = 20$.

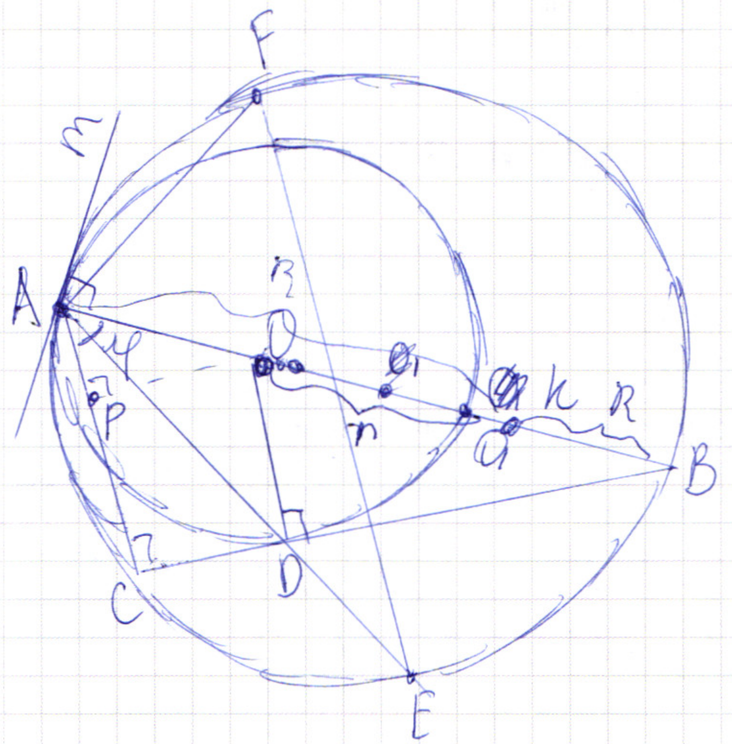
$f(y)=4$: при $y = 17; 19$; $N(x)_4 = N(x_3) + N(y_3) = 20+1 = 21 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_4 = 42$.

$f(y)=5$. при $y=23$; $N(x)_5 = N(x_4) + N(y)_4 = 23 \Rightarrow N_5 = 23$

$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 77 + 36 + 42 + 20 + 23 = 100 + 36 + 62 = 198$ Ответ: $N = 198$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 15 \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

$6 \cdot 205 =$

$6 \cdot 5 \cdot$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 5 \\ \hline 85 \end{array}$$

Решение:

1) ∠ т. O и т. O1 – центры ω и ν соотв.

2) $O \in AB$ и $O_1 \in AB$ легко доказать если провести общую касательную m

3) Проведу $OP \perp AC$; $OD \perp AC$ – касательная, $AC \perp BC$ – опир. на диаметр

4) Пусть $\angle CAB = \varphi$ Рассм $\triangle APO$ и $\triangle ACB$

$AO = r$ $AB = 2R$ – r и R – радиусы ω и ν соответ.

5) $OP = 8 = CD$; $CB = 25 = CD + BD$; $OP \parallel BC$ из перпенд.

$AO = \cancel{\sin\varphi}$ $\sin\varphi = \frac{OP}{AO} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{r} = \frac{25}{2R} \Rightarrow \cancel{\frac{R}{r} = 100} \Rightarrow R = 200r$. $\frac{R}{r} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cancel{R = \frac{25}{16}R}$

$r = \frac{16}{25}R$

6) BD – касат. к ω $\Rightarrow BD^2 = BK \cdot AB$ ($BK = 2R - 2r$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD$ $17^2 = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R^2 - 4R \cdot r = 4R^2 - \frac{25R^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $16R^2 - 25R^2 =$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) BD - касат к ω $\Rightarrow BD^2 = BK \cdot AB$ $(BK = 2R - 2r; AB = 2R)$

$\Rightarrow \begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 17^2 \\ r = \frac{16}{25}R \end{cases} \Rightarrow 100R^2 - 64R^2 = 17^2 \cdot 25$

$36R^2 = 17^2 \cdot 5^2 \quad R = \frac{17 \cdot 5}{6} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow r = \frac{16}{25} \cdot \frac{17}{6} = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 25} = \frac{136}{75}$. что противоречит условию существования~~

~~7) Рассм $AFE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup CE) \Rightarrow \angle AF \quad \angle ABC \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \angle AFE = \angle CAF + \angle ABC$ $\Rightarrow$ т. O_1 вне ω~~

~~$\cos\angle ABC = \frac{17}{8}$~~

7) значит $17^2 = (R + R - 2r) \cdot 2R = 4R^2 - 4Rr$.

6') продолжение $\Rightarrow R = \frac{17 \cdot 5}{6} \Rightarrow r = \frac{16}{25} \cdot \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{8 \cdot 17}{15} =$

$= \frac{136}{15}$. $\quad R = \frac{85}{6}$.

7). Рассм $\angle AFE = \angle CAF + \angle ABC$ (опир на соответ дуги.

$\angle ABC = \arccos \frac{25 \cdot 6}{17 \cdot 5}$

$\angle AFE = \arccos(\cos\angle AFE) + \arctg \angle CAD$.

Ответ: ~~$R = \frac{17 \cdot 5}{6}, r =$~~ $R = \frac{85}{6}; r = \frac{136}{15}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Любое сложное число можно разложить на простые множители; на промежутке [1; 24] простые числа: 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 18; 23.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, $x \in N$; $y \in N$, т.к. функция f определена на множестве ~~рац~~ положительных рациональных чисел f(p) существует ~~если p>0 и p∈R~~

Отмечу, что $f\left(\frac{-x}{-y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, ~~но~~ x ~~∈R и b∈R~~. числа должны быть положительными.

Если разложить число x на простые множители большие нуля $f\left[\frac{x}{y}\right] + f[y] = f[x] \Rightarrow$

$f\left[\frac{x}{y}\right] = f[x] - f[y] < 0$, т.е. $f[y] > f(x)$

$f(y) = a \cdot b \cdot c \ldots$ $f(x) = k \cdot l \cdot m \ldots$ $\Rightarrow$, простые множители.

$\Rightarrow f(y) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] \ldots$ $f(x) = \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{l}{4}\right] \ldots$

при $y < 4$: $f[y] = \left[\frac{y}{4}\right] = 0$ не выполняется.

при $4 \le y < 8$: $f(y) = 1 \Rightarrow x < 4$

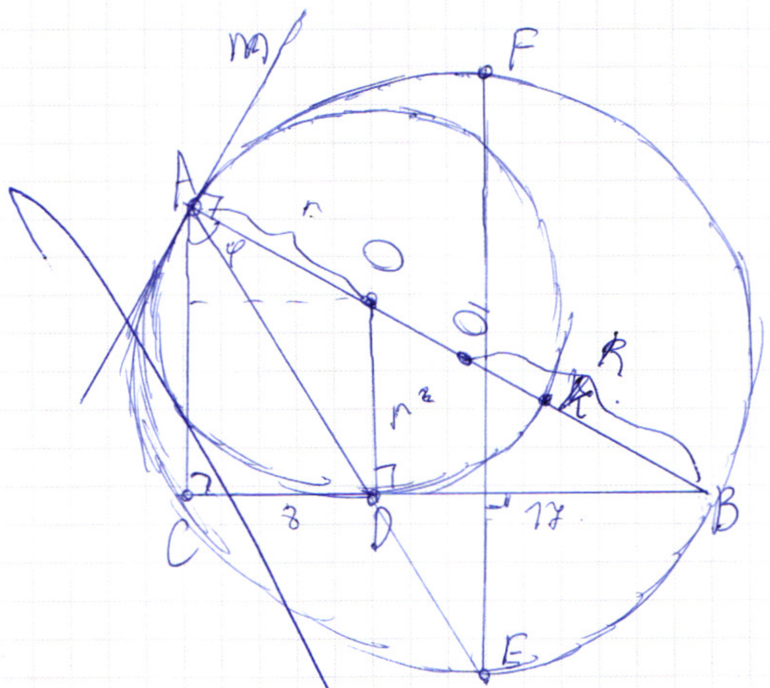
при $8 \le y < 12$: $f(y) = 2 \Rightarrow x < 8$.

при $12 \le y < 16$: $f(y) = 3 \Rightarrow x < 12$

при $16 \le y < 20$ $f(y) < 4 \Rightarrow x < 16$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 5 \\ \hline 85 \end{array}$$

Решение: 1) Пусть т. O и O_1 - центры ω и υ соотв. $AB \cap \omega = A$ и K.

2) ~~Расс~~ т.к. т. $O \in AB$ и т. $O_1 \in AB$, легко отметить если рассмотреть перпендикулярность общей касательной m

3) ~~Рассм~~ $BD^2 = BK \cdot AB$ - свой-во касательной
$BK = 2R - 2r$; $AB = 2R$ (из R и r радиусы υ и ω).

4) $\triangle BDO \sim \triangle ACB$ ($OD \perp BC$ к касательной; AC опирается на диаметр) $\Rightarrow OD = r \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{17} r$.

5) из $\triangle ACB \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 25^2 = 4R^2$.
из (3) $17^2 = 2(R-r)R \cdot 2 = 4R^2 - 4R \cdot r \Rightarrow 4R^2 - 4R \cdot r - 17^2 = 0$.
из $\triangle ODB \Rightarrow OB^2 = OD^2 + BD^2$ $\quad \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 25^2 = 4R^2$
$OB = 2R - r \Rightarrow (2R - r)^2 = r^2 + 17^2 \Rightarrow (2R - 2r)(2R) = 17^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4R^2 - 4Rr = 17^2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{2xy-x-2y+2} \\ x^2+3y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2y)=\sqrt{y(x-2)-(x-2)} \\ x^2-4x+4-4+3y^2-18y+9-9=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-2y)=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=12+4+9 \Rightarrow$ $\cancel{x-2y}$ $(x-2y)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2+3(y-1)^2=25$ $x^2-4xy+4y^2=(x-2)(y-1)$.

$(x-2)(y-1)=x^2-4xy+4y^2 \mid\cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x-2)(y-1)=6(x-2y)^2 \mid\cdot 2$

$\cancel{(x-2)}$ $\cancel{(x-2)^2-x-2}$

$(x-2)^2-2(x-2)(y-1)+3(y-1)^2=25-2(x-2y)^2$.

$(x-2-2y+2)^2=25+(y-1)^2-4(x-2y)^2$.

$(x-2y)^2=25+(y-1)^2-4(x-2y)^2$

$\left(\sqrt{13^2-12^2}\right)^{\log_{12}t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5$

$5(x-2y)^2=25+(y-1)^2$.

$(x-2y)^2-25=(y-1)^2-4(x-2y)^2$.

$(x-2y-5)(x-2y+5)=(y-1-2x+4y)(y-1+2x-2y)=$

$=(x-2y-5)(x-2y+5)=(5y-2x-1)(2x-y-1)$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$.

Пусть $\cancel{\log_{12}(x^2+18x)=t}$. $(x^2+18x)=t$

$5^{\log_{12}t}+t\geq |t|^{\log_{12}13}$ $13^{2\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t}-|t|^{\log_{12}13}\geq +t\geq 0$.

$13^2-12^2=5 \Rightarrow \cancel{13^{2\log_{12}t}}$ $13^{2\log_{12}t}-12^{2\log_{12}t}=$

$=13^{2\log_{12}t}-t^2$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$.

при $5^{\log_{12} t} + t > 0$

$25^{\log_{12} t} + 2\cdot 5^{\log_{12} t} t + t^2 \geq |t|^{\log_{12} 13}$.

$(13^2 - 12^2)^{\log_{12} t}$.

$x^2 + 12x > 0 \Rightarrow$ (ОДЗ:) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$.

$5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} + t \geq 0$

$(5^{\log_{12} t})' = (\log_{12} t)' \cdot 5^{\log_{12} t - 1} + = \frac{\ln 12}{t} \quad \frac{1}{t \ln 12} \cdot 5^{\log_{12}(\frac{t}{12})} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция монотонно возрастает $\Rightarrow$

$\cancel{5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13}}$ $t^{\log_{12} 13} - t > 0$ ~~при~~

$x - 2y$ $\quad 5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$.

$t^{\log_{12} 13} = \log_{12} 13 \, t^{\log_{12} \frac{13}{12}} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция монотонно возрастает.

$5^{\log_{12} t} + t = t^{\log_{12} 13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{5^{\log_{12} 144}}$ $\quad t = 12 \quad 5^{\log_{12} 12} + 12 = 12^{\log_{12} 13}$.

$\Rightarrow 5^{\log_{12}}$ $\quad$ ~~$5 \cdot 12 + 1 = 13$~~ $\quad$ при $t = 1 \Rightarrow$

$5^{\log_{12} 1} + 1 = 1 \quad 12 = 5 + 12 = 13$.

$5^0 + 1 \geq 1$. $\quad 5^{\log_{12} 12} + t = t^{\log_{12} 13}$.

$144 \Rightarrow$

$t = 144 \quad 5^{\log_{12} 144} + 144 = 144^{\log_{12} 13} =$

$144 = 12 \cdot 12 = 24 \cdot 6$

$\left[\frac{1}{y}\right]$.

$\times\, 18$, 6, 108, $+36$, 144

$f\left[\frac{x}{y}\right] + f[y] = f[x]$.

$f\left[\frac{x}{y}\right] = f[x] - f[y]$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)