МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\exists\ \sin(2\alpha) = x \Rightarrow \cos(2\alpha) = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = -\cos(2\beta)$

$\Downarrow$

$\frac{x+1}{\sqrt5} \pm \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt5}$

1) $x+1+2\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x+1 = -2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2+2x+1 = 4-4x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow 5(x+1)(x-0,6) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \ ✓ \\ x = 0,6 \ ✗ \end{array}\right. \Rightarrow \sin(2\alpha) = -1 \Downarrow \cos(2\alpha) = 0.$

2) $x+1-2\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 5(x+1)(x-0,6) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \ ✓ \text{ рассмотрен} \\ x = 0,6 \ ✓ \end{array}\right.$

$\sin(2\alpha) = 0,6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0,8 \\ \cos 2\alpha = -0,8 \end{array}\right.$

Итак, 3 случая:

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha) = -1 \\ \cos(2\alpha) = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(2\alpha) = 0,6 \\ \cos(2\alpha) = 0,8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin(2\alpha) = 0,6 \\ \cos(2\alpha) = -0,8. \end{cases}$

1) $2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg(\alpha) = -1$

2) $2\alpha = \arccos(0{,}8) + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\arccos(0{,}8)}{2} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$.

У всех данных углов одинаковый тангенс $t > 0$,

причём $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3(1-t^2) = 8t$

$3t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(t+3)(t-\frac{1}{3}) = 0$ $\left[\begin{array}{l} t = -3 \text{ т.к. } < 0. \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

3) $2\alpha = \arccos(-0{,}8) + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\arccos(-0{,}8)}{2} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\arccos(-0{,}8) < \pi \Rightarrow \frac{\arccos(-0{,}8)}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\,\alpha \overset{=t}{>} 0$

$\frac{2t}{1-t^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 3t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+\frac{1}{3}) = 0.$

$\left\{\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{1}{3} \text{ т.к. } < 0. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$.

№2

$\left\{\begin{array}{l} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90. \end{array}\right.$

Пусть $a = x - 6$

Пусть $b = 2y - 1$

$a - 6b = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ \sqrt{ab} \geq 0 \\ a - 6b \geq 0. \end{array}\right.$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-4b)(a-9b) = 0.$

1) $a = 4b \Rightarrow 25b^2 = 90 \Rightarrow b = \pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{12\sqrt{10}}{5} \\ b = \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$ т.к. $a - 6b < 0$

$\left\{\begin{array}{l} a = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ b = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

2) $a = 9b \Rightarrow 90b^2 = 90 \Rightarrow b = \pm 1$

① $\begin{cases} b = 1 \\ a = 9 \end{cases}$ ✓

② $\begin{cases} b = -1 \\ a = -9 \end{cases}$ ✗ т.к. $a - 6b < 0$.

$\boxed{1}$ $a = x - 6 = 9 \Leftrightarrow x = 15$

$b = 2y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 1$

$\boxed{2}$ $a = x - 6 = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow x = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$

$b = 2y - 1 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow y = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}.$

Ответ: $\left\{ (15; 1); \left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10} \right) \right\}$.

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

] $t = -x^2 + 10x$; $\log_3 t$ - определён $\Rightarrow t > 0 \Rightarrow |-t| = t$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$; Важное замечание: $5^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$ $(t>0)$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \Leftrightarrow t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \leq t.$; $\log_3 t = z$

$5^z - 4^z \leq 3^z \Leftrightarrow \cancel{5^z \ldots 3^z + 4^z} \Leftrightarrow 5^z - 4^z - 3^z \leq 0.$

"=" достигается при $z = 2$

$\cancel{(5^z - 4^z - 3^z)' =}$

$z<2)$: $\left\{\begin{aligned} &\frac{9}{25}\cdot 5^z = 3^2\cdot 5^{z-2} < 3^2\cdot 3^{z-2} = 3^z. \\ &\frac{16}{25}\cdot 5^z = 4^2\cdot 5^{z-2} < 4^2\cdot \cancel{3}\, 4^{z-2} = 4^z \end{aligned}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $z<2$: $5^z < 3^z + 4^z$

$z>2)$: $\left\{\begin{aligned} &\frac{9}{25}\cdot 5^z = 3^2\cdot 5^{z-2} > 3^2\cdot 3^{z-2} = 3^z \\ &\frac{16}{25}\cdot 5^z = 4^2\cdot 4^{z-2} > 4^2\cdot 4^{z-2} = 4^z \end{aligned}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $z>2$: $5^z > 3^z + 4^z$.

$\Downarrow$

$z \in (-\infty; 2]$ (V) ; $\log_3(t) \in (-\infty; 2] \Leftrightarrow t \in (0; 9]$

$10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 10)$

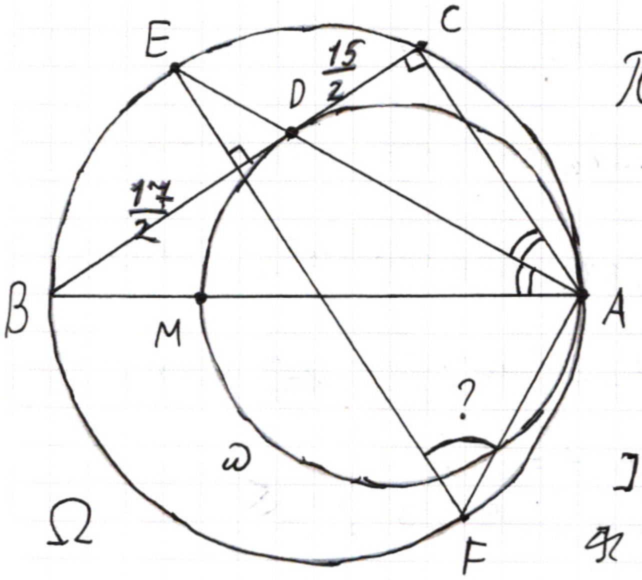
$10x - x^2 \le 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow \cancel{x\le 1}$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$

$\left\{\begin{aligned} &x \in (0; 10) \\ &x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{aligned}\right) \Rightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$.

№4



Лемма Архимеда:

{·} E делит дугу BC на 2 равные $\Rightarrow$ ~~…~~ $\angle CAE = \angle BAE$

AD-биссектриса в $\triangle CAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{15}{17}$

] $CA = 15x \Rightarrow AB = 17x$

Т.к. BA - диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 289x^2 = 225x^2 + 256 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$x=2 \Rightarrow \begin{cases} AB = 34 = \text{диаметр } \Omega \Rightarrow R_\Omega = 17. \\ AC = 30 \end{cases}$

Из равенства дуг $\Rightarrow$ равенство хорд $\Rightarrow BE = EC$

$\begin{cases} BE = EC \\ EF \perp BC \end{cases} \Rightarrow EF$ – ~~серпе~~ сер. пер. к хорде $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ – диаметр Ω

$\angle EAC = \operatorname{arctg}\left(\frac{CD}{AC}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $= \alpha$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\left(\frac{AC}{BC}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{15}{8}\right) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $= \beta$

$\angle AFE = \underbrace{\angle AFC}_{=\angle ABC} + \underbrace{\angle EFC}_{=\angle EAC} = \angle ABC + \angle EAC.$

$\| EF$ – диаметр $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{17}{8}}{1 - \frac{15}{32}} = 4$

$\begin{cases} tg(\alpha+\beta) = 4 \\ \alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha+\beta = \angle AFE = \operatorname{arctg}(4)$

$tg(\angle AFE) = \dfrac{AE}{AF} = 4$; $\exists AF = x \Rightarrow AE = 4x$.

$AF^2 + AE^2 = EF^2 = d_\Omega^2 = 34^2 \Rightarrow 17x^2 = 34^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 68$

$S_{\triangle AEF} = \dfrac{AE \cdot AF}{2} = 2x^2 = 136.$

$\exists \{\cdot\} M = AB \times \omega \Rightarrow MA$ – диаметр $\omega \Rightarrow \angle MDA = 90^\circ$

из $\triangle MAD$: $MA = \cancel{AD} \dfrac{AD}{\cos(\alpha)}$

№ 4

$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2}$

$\cos(\alpha) = \frac{AC}{AD}$

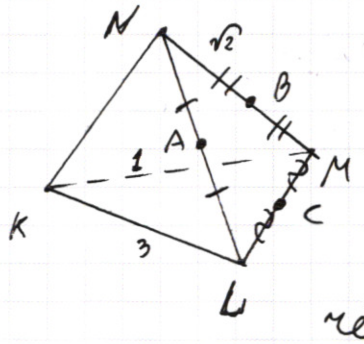
$MA = \frac{AD}{\frac{AC}{AD}} = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AC^2 + CD^2}{AC} = \frac{900 + \frac{900}{16}}{2 \cdot 30} = \frac{255}{16}$

Ответ: $R_{\upsilon} = 17$

$R_{\omega} = \frac{255}{32}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg}(4)$

$S_{\triangle} AEF = 136$



№ 7

$\exists$ A, B и C — середины LN; NM и ML соотв. ~~в плоск~~ рассматрим плоскость LMN сечение ~~окружност~~ сферы S, заключённое в MLN — окружность ω.

A, B, C, N $\in \omega$; C и N симметричны относительно по середины AB ~~т.к. этого~~, но тогда они могут все лежать на окружности только тогда, когда AB — диаметр. $\Rightarrow$ AB — диаметр...

№ 6

$$\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1} \underset{1}{\leq} ax+b \underset{2}{\leq} -32x^2 + 36x - 3.$$

1) $\frac{4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b - 16x + 16}{\underbrace{4x-5}_{<0}} \geq 0 \Big) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b - 16x + 16 \leq 0.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$178b^2+130b-65=0$

$D=130^2+4\cdot 65\cdot 178.$

№ 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$\exists\ a=x-6$

$\exists\ b=2y-1$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \Rightarrow a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90. \end{cases}$$

$\parallel ab\geq 0$

$a^2-13ab+36b^2=0$; вычтем a^2+9b^2.

~~$t=t+$~~

$t=t^{\log_3 4}+t^{\log_3 4^{\log_4 5}}=t^{\log_3 4}+t^{\log_3 5}.$

$t^5-t^4-t^3\geq 0$

$t^3(t^2-t-1)\geq 0.$

$(1+t^{\log_3(\frac{4}{3})}-t^{\log_3(\frac{5}{3})})\geq 0.$

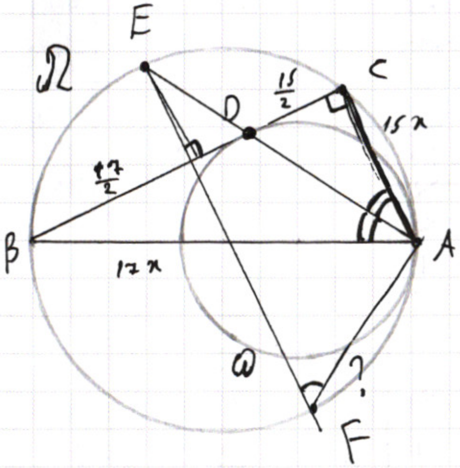
$1+\log_3 4\cdot t^{\log_3(\frac{4}{3})}$

$27+64-125.$

$9+16-25.$

9

$f(ab) = f(a) + f(b)$



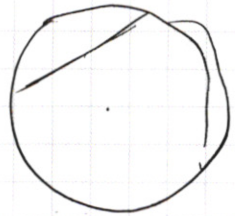
$\triangle AEF$

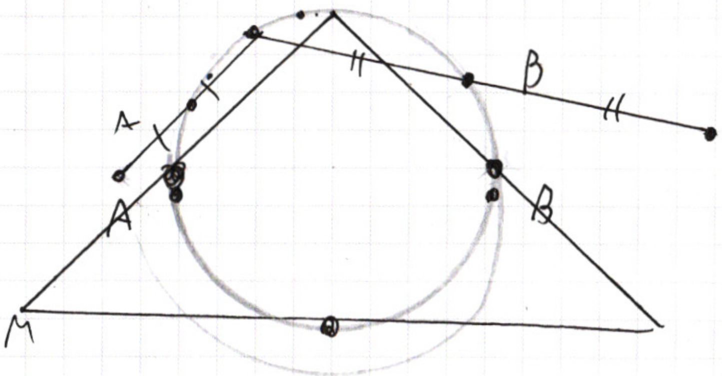
$289x^2 - 225x^2 = 256.$

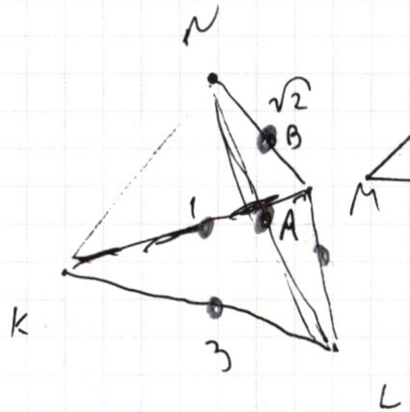
$64x^2 = 256$

$x^2 = 4.$

$x = 2$







$\cancel{4ab^2}$.

$$\frac{4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b - 16x - 16}{4x - 5} \geq 0.$$

$4ax^2 + (4b - 5a - 16)x + (16 - 5b).$

$ML \in (2; 4)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$\pm\sin(2\beta)\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta). \Rightarrow$

$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2($

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$

$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\Rightarrow -\frac{2}{5} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\beta) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

$\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sin^{x}(2\alpha) + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+\cancel{2}\beta) = -\cos(2\beta)$

$\cos(2\beta)(\sin 2\alpha + 1) + \sin(2\beta)\cos 2\alpha.$

1) $\cancel{x \sin 2\alpha}\ \cancel{(x+1)}\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\sqrt{5}(x+1) + 2\sqrt{5}\sqrt{1-x^2} = 0.$

$x+1 = -2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2+2x+1 = 4-4x^2 \Rightarrow x^2+x=0$

$\begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

$\sin(2\alpha) = -1$

$\cos(2\alpha) = 0$

$5x^2+2x-3=0$

$D = 4+60;$

$\sin(2\alpha) = -1$

$\cos(2\alpha) = 0$

$x_1 = \frac{6}{10}$

$x_2 = -1$

3) ~~x+1~~

2)

$|t|^{\log_3 4} = t + 5^{\log_3 t}.$

$t^{\log_3 4} = t + (4^{\log_3 t})^{\log_4 5}$

$t = f(t)(1-$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90. \end{cases}$$

$\cancel{D=84}$ $D=64+$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90.=$

$x-6=a$

$2y-1=b.$

$a^2-12ab+36b^2=ab.$

$a^2-13ab+36b^2=0.$

$27b^2-13ab=0$

$b(27b-13a)=0.$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$t_1=$

$t_2=$

$a^2+\frac{169a^2}{81}=90$ 32

$27b=13a \Rightarrow b=\frac{13}{27}a$

$\frac{250a^2}{81}=90.$

$a^2=\frac{3^6\cdot\cancel{10}}{5^2\cdot\cancel{10}}=\frac{3^6}{5^2}$

$a=\pm3\sqrt{10-b^2}$

$27b^2-13ab=-90.$

$27b^2-13ab+90=0.$

$25b^2=90$

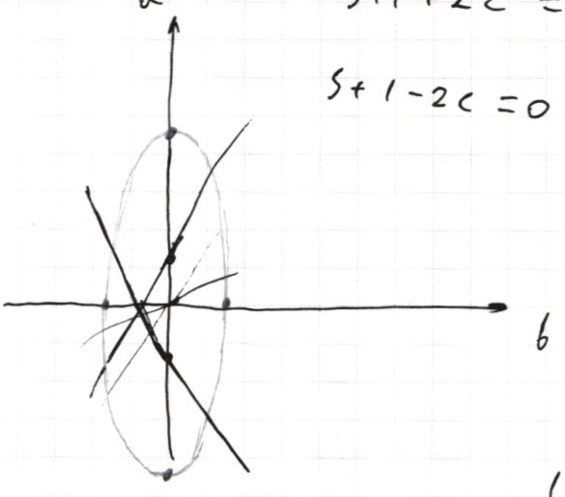
$90b^2=90:)$

$D=169a^2-$

$\frac{\frac{17}{8}}{\frac{17}{32}}$

$5+1+2c=0$

$5+1-2c=0$



$a^2-13ab+36b^2=0.$

$D=169b^2-144b^2=25b,$

$a_1=\frac{13b+5b}{2}=9b$

$a_2=\frac{13b-5b}{2.}=4b.$

$13b+5=3\sqrt{10-b^2}$

$169b^2+130b+25=90-9b^2$

$900+256=$

$16+240.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)