МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$tg\,\alpha - ?$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (2) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (1) \end{cases}$$

(1): $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos2\beta \cdot 2(-\frac{1}{\sqrt5}) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{4\cdot\sqrt5}{2\cdot 5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt5}{5}$

~~т.к.~~ т.к. $\cos 2\beta > 0$, то $-\frac{\pi}{2}+\pi n < 2\beta < \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

~~$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < \beta < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$~~

При этих знач. β $\sin 2\beta$ может быть больше, и меньше 0. Следовательно

$\sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

(2): $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} \pm \frac{\sqrt5}{5}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \,|\cdot\sqrt5$

$2\sin2\alpha \pm \cos2\alpha = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin2\alpha+\cos2\alpha = -1 \\ 2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0, \\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)=0 \\ 2\sin\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha=0, \\ \sin\alpha=0, \\ \cos\alpha=-2\sin\alpha, \\ \sin\alpha=-2\cos \end{array}\right.$

$\cos\alpha = 0$ противоречит усл. о том, что $tg\,\alpha$ существует. след.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0, \\ \sin\alpha = -\frac{\cos\alpha}{2}, \\ \sin\alpha = -2\cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0, \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

№5.

Дано: Ω и ω кас. ~~внеш~~ внутр. обр.; $\Omega(R; O_1)$, $\omega(r; O_2)$

A - т. касания Ω и ω.

AB - диам. Ω

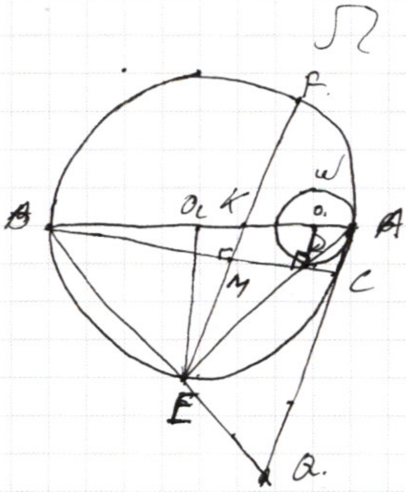
BC - хорда Ω; BC - кас. к ω в т. D.

$AD \cap \Omega = E$.

$F \in \Omega$; $FE \perp BC$

$CD = 8$; $BD = 17$

Найти: $\angle AFE$; R_{Ω}; S_{AEF}



Решение:

1) По ~~т~~ Т. о линии ц. кас. окр. внутр. образом $O_1 \in AB$.

2) Пусть $FE \cap AB = K$

$FE \cap BC = M$.

3) Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle DO_2A = 2\alpha$, $\angle DAC = 90 - \alpha$

т.к. $\angle BCA = 90°$, т.к. он впис. и опир. на диам AB.

4) т.к. $\triangle DO_2A$ - равнобед по опред ($DO_2 = O_2A = r$), то $\angle O_2AD =$

$= \frac{180 - \angle DO_2A}{2} = 90 - \alpha$.

5) $\angle DO_2A = \angle DAC \Rightarrow DA$ - бис-са $\angle BAC$.

6) продлим AC до пересеч с BE, $AC \cap BE = Q$

7) $\angle BEA = 90°$, т.к. впис в Ω и опир. на AB, $\Rightarrow$ AE высота

(см. ~~стр~~ стр. 3)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

8) $\triangle BAQ$ – равнобед. треуг. (AE – высота и бис-са) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 9) $\angle AQE = 90-(90-\alpha) = \alpha$.

10) $\angle AQE = \angle ABE \Rightarrow \angle ABE = \alpha$,

11) $\angle EO_2A = 2\alpha$ как центральный.

12) O_1D – рад. к кас. $BC \Rightarrow O_1D \perp BC$.

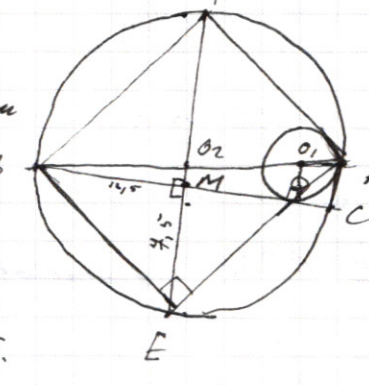
13) $\left.\begin{matrix} EF \perp BC \\ O_1D \perp BC \end{matrix}\right| \Rightarrow EF \parallel O_1D \Rightarrow \angle AO_1D = \angle AKM = 2\alpha$.

как соответ. углы при сек. AB.

14) $\angle AO_2E = \angle AKE \Rightarrow O_2 \equiv K$. $\Rightarrow EF$ – диаметр

15) EF ~~???~~ – диам, $EF \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ ~~делит~~ сер-пер к BC ~~на равн. части~~



16) $BC = BD + DC = 25$.

$BM = MC = \frac{BC}{2} = 12,5$

17) $MD = MC - DC = 12,5 - 8 = 4,5$.

18) Т.к. $\triangle BED$ – прямоуг, то $EM \perp BD$, то $EM = \sqrt{BM \cdot MC} =$

$= \sqrt{0,5 \cdot 15 \cdot 0,5 \cdot 9} = 0,5 \cdot 5 \cdot 3 = 7,5$.

19) $O_2M = O_2E - EM = R - 7,5$.

20) $\triangle BO_2M$ по Т. Пифагора: $BM^2 + MO_2^2 = BO_2^2$

$BM^2 + (R-7,5)^2 = R^2$

$12,5^2 + \cancel{R^2} - 15R + 7,5^2 = \cancel{R^2}$

$R = \frac{12,5^2 + 7,5^2}{15} = \frac{0,5^2 \cdot 25^2 + 0,5^2 \cdot 15^2}{15} = \frac{0,5^2 \cdot 850}{15} = \frac{850}{60} = \frac{85}{6}$

21) $\triangle BO_2M \sim \triangle BO_1D$ по 2-ум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{O_2M}{O_1D}$

$\frac{R_2}{2R_2 - r} = \frac{R_1 - 7{,}5}{r}$

$\frac{85}{6} r = \left(2 \cdot \frac{85}{6} - r\right) \cdot \frac{20}{3} \,\Big|\cdot 6$

$85 r = (170 - 6r) \cdot 40$

$85 r = 170 \cdot 40 - 240 r$

$325 r = 6800$

$r = \frac{6800}{325} = \frac{1 \cdot 360}{65} = \frac{272}{13}$

22) $\angle ABE = \angle AFE$ как опир. на одну.

23) ~~$tg \angle ABE =$~~ $BE = \sqrt{BM^2 + ME^2} = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 25^2 + 0{,}5^2 \cdot 1{,}5^2} =$

$= \frac{1}{4}\sqrt{850} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{34}$

$\cos(\angle ABE) = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{34}}{2 \cdot \frac{85}{6}} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{34}}{\frac{85}{3}} = \frac{15\sqrt{34}}{4 \cdot 85} = \frac{3\sqrt{34}}{68}$

$\angle ABE = \arccos\left(\frac{3\sqrt{34}}{68}\right)$

24) $\angle ABE < 90°$, т.к. $\angle FBE = \angle ABE + \angle FBA = 90°$.

$|\sin \angle ABE| = \sin \angle ABE = \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 34}{(2 \cdot 34)^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{4 \cdot 34}} = \sqrt{\frac{127}{136}}$

25) ~~$S_{AFE} = \frac{1}{2}$~~ AFBE — прямоуг. (все углы по 90°, т.к. они опир на диам)

$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot FE \cdot \sin \angle AFE = \frac{1}{2} BE \cdot 2R \cdot \sin \angle ABE =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{34} \cdot \frac{85}{6} \cdot \sqrt{\frac{127}{4 \cdot 34}} = \frac{5 \cdot 85 \cdot \sqrt{127}}{4 \cdot 6} = \frac{425}{24} \cdot \sqrt{127}$

Ответ: $\frac{85}{6}$; $\frac{272}{13}$; $\arccos\left(\frac{3\sqrt{34}}{68}\right)$; $\frac{425}{24}\sqrt{127}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$.

На ОДЗ: $|x^2+18x| = x^2+18x$.

Пусть $x^2+18x = t$, $t>0$. Тогда

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

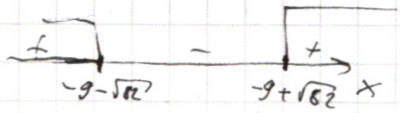
$$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t \geq 1, \\ \log_{12}5 + \log_{12}12 \geq \log_{12}13 \text{ - верно} \end{cases} \\ \begin{cases} 0<t<1 \\ \log_{12}5 + \log_{12}12 \leq \log_{12}13 \text{ - неверно} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{t \geq 1} \quad t \geq 1 \\ x^2+18x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$D = b^2 - 4ac = 324 + 4 = 328.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-18+\sqrt{328}}{2} \\ x = \frac{-18-\sqrt{328}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9+\sqrt{82} \\ x = -9-\sqrt{82} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

№ 4

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, & (2) \\ x^2+3y^2-4x-18y=12 & (1) \end{cases} \quad (3)$$

(1): $x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9$

$(x-2)^2+3(y-1)^2=5^2$

(2): $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $\uparrow^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y\geq 0, \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2y \\ (x-y-1)(x-4y+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=\frac{x+2}{4} \end{array}\right. \end{cases}$

(3): $\begin{cases} (x-2)^2+3(y-1)^2=5^2, \\ \cancel{x\geq 2y} \quad y\leq \frac{x}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=\frac{x+2}{4} \end{array}\right. \end{cases}$

Построим граф. этой системы.

Мы видим, что

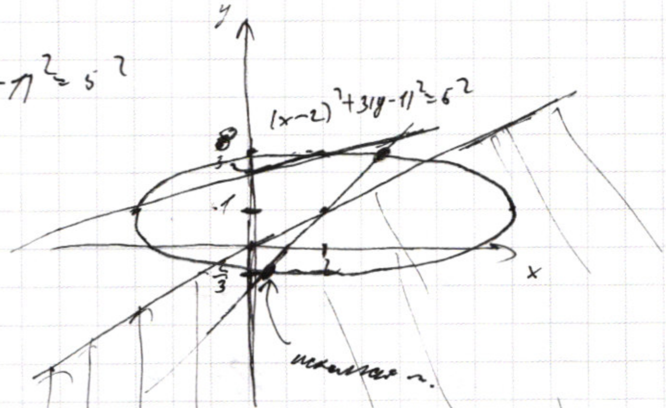
пересеч.
при $y=\frac{x+2}{4}$ и $(x-2)^2+3(y-1)^2=5^2$

~~т.~~ у т. пересеч. г.

$y\geq\frac{x}{2}$. $\Rightarrow$

есть т. 1 т.

Найдем её



$\begin{cases} \cancel{x\geq} \; y\leq\frac{x}{2} \\ y=x-1 \\ (x-2)^2+3(x-2)^2=5^2 \quad (4) \end{cases} \Leftrightarrow$

(4): $4(x-2)^2=5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-2)=\pm 5$

$2x-4=\pm 5$

$2x=\pm 5+4 \Leftrightarrow$

$x=\frac{\pm 5+4}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4,5 \\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\leq\frac{x}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=4,5 \\ y=3,5 \end{cases} \end{array}\right. \\ y\leq\frac{x}{2} \end{cases}$

т.к. при $x=4,5$,

$y=3,5$, а $3,5\leq \cancel{7}$ ~~2,25~~,

$y\geq 4,5$, то ~~x=3,5~~ $(4,5;\,3,5)$ непод…

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\,-\frac{1}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

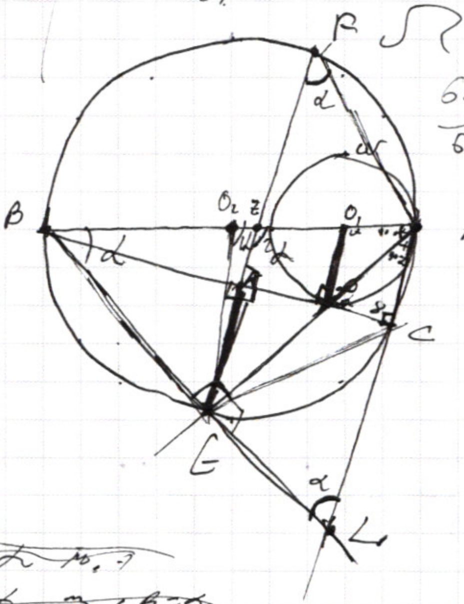
$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1} = \frac{1}{\frac{25}{9}+1} = \frac{1}{\frac{34}{9}} = \frac{9}{34}$

$\sin^2\alpha = \frac{25}{34}$

$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\frac{625}{9 \cdot 634}$

$0 < \alpha < 90°$



$R, ?$ $\angle AFC,$ $S_{\triangle AEF}$?

$CD = 8,\ BD = 17$

$BE^2 = 12{,}5^2 + 7{,}5^2 = 0{,}5^2(25^2+3^2) = 0{,}5^2 \cdot 634$ $BE = \frac{1}{2}\sqrt{634}$

$BD = 17$

$CD = 8.$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{DE}$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$DE = \frac{BD \cdot DC}{AD}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{DC}{DK}$

$AD \cdot DK = DC \cdot DE$

$AD \cdot DK = DE \cdot BD \cdot DC$

1) ~~Пусть $\angle F = \alpha$ ...~~

2) ~~Продлим~~ $AC \cap BE = L$ $= EF \cap AB$.

2) $\angle BAE = \angle ADC = \alpha$, $\angle DAC = 90 - \alpha$

3) $\angle DO_1A = 2\alpha \Rightarrow \angle O_1AD = 90 - \alpha$ $\Rightarrow AD$ - бис-са.

4) $\triangle ABL$ - равнобед. $\angle ALE = 90 - (90-\alpha) = \alpha \Rightarrow \angle EBA = \alpha \Rightarrow \angle F = \alpha$.

5) $\angle EO_2A = 2\angle EBA = 2\alpha$, $EF \perp BC$, $O_1D \perp BC$ $\Rightarrow EF \parallel O_1D \Rightarrow \angle O_1ZA = \angle AO_1D = \alpha$

6) $\angle ZO_2E = \angle O_1ZE \Rightarrow O_2 \equiv Z$.

$\frac{12{,}5}{7{,}5} = \frac{5 \cdot 2{,}5}{3 \cdot 2{,}5} = \frac{5}{3}$

$R = \frac{\sqrt{21556}}{12}$

EF - диам.

7)

упрощать!

$BK = KC$

$BK + KC = BD + DC = 25$

$BK = KC = 12{,}5$

$BD = 17$

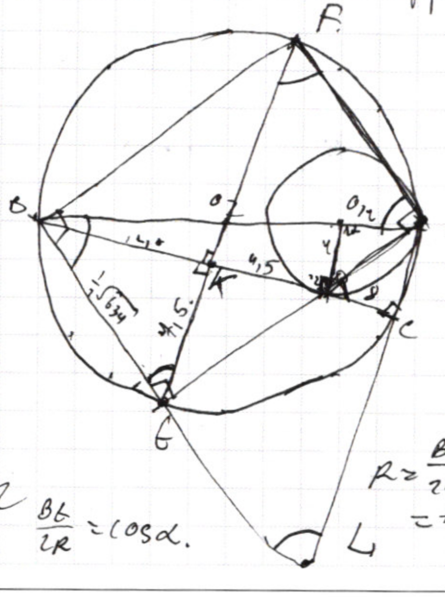
$BK = 12{,}5$

$KD = 4{,}5$

$4{,}5 = 0{,}9 \cdot 5 = 0{,}5 \cdot 9$

$1{,}5 = 0{,}5 \cdot 25$

$\sqrt{4{,}5 \cdot 1{,}5} = \sqrt{3^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 5 = 7{,}5.$



$KE = \sqrt{BK \cdot KD}$.

$tg\,\alpha = \frac{BK}{KE}$

$\boxed{\alpha = arctg\left(\frac{5}{3}\right)}$

$R = \frac{BE}{2\cos\alpha} = \frac{\sqrt{634}}{4 \cdot \frac{3\sqrt{34}}{34}}$

$= \frac{BK}{\sqrt{BK \cdot KD}} = \sqrt{\frac{BK}{KD}} = \sqrt{\frac{12{,}5}{4{,}5}} = \sqrt{\frac{125}{45}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

$\frac{BE}{2R} = \cos\alpha.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 5.

$-16+60-17>0$
$-8+30-17>0$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17.$

$\begin{cases} ax+b \le -8x^2-30x-17. \\ ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3}. \end{cases}$

$ax+b \le -8x^2-30x-17$
$8x^2+(30+a)x+b+17 \le 0.$
$D=b^2-4ac=$

$17 \cdot 32 = 544$

$y=-8x^2-30x-17$

$-8x^2-30x-17=0$?

$y=-8x^2-30x-17$

$+8x^2+30x+17=0.$
$+t^2+30t+136=0.$

$y=8x^2+30x+17.$

$D=b^2-4ac=900-544=356.$

$34 \cdot 4 = 136$

$\left[\begin{array}{l} t=-34 \\ t=-4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{34}{8}=-\frac{17}{4} \\ x=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $x_0=-\frac{b}{2a}=$

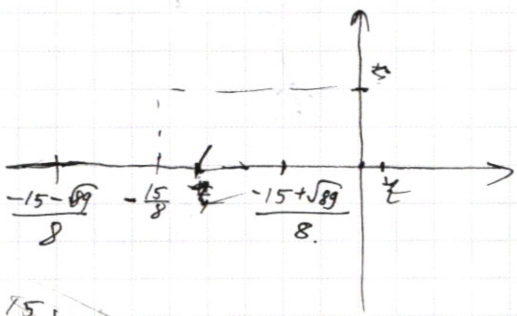
$900-544=356$

$x=\frac{-30\pm\sqrt{356}}{16}=$

$=\frac{-30\pm2\sqrt{89}}{16}=$

$=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{8}$

$356 / 4 = 89$



$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{-16}=\frac{15}{8}$

$y\left(\frac{15}{8}\right)=-8\left(\frac{15}{8}\right)^2-30\left(\frac{15}{8}\right)-17=$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{30}{-16}$

$f(x)=-8x^2-30x-17.$ | $D=b^2-4ac=900-544=356$

$x=\frac{30\pm\sqrt{356}}{-16}=\frac{15\pm\sqrt{89}}{-8}$

$x^2+18x=t$

$5^{\log_{12} t}$

$5^{\log_{12} t}+t \ge |t|^{\log_{12} 13}$

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}+t \ge t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5}+t^{\log_{12} 12} \ge t^{\log_{12} 13}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>1, \\ \log_{12} 5+\log_{12} 12 \ge \log_{12} 13 \end{cases} \quad \log_{12} 60 \ge \log_{12} 13 \checkmark \\ \begin{cases} t<1 \\ \log_{12} 60 \le \log_{12} 13 \end{cases} \end{array}\right.$

$t>1,$
$x^2+18x-1>0$
$D=b^2-4ac=328$
$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-18+\sqrt{328}}{2} \\ x=\frac{-18-\sqrt{328}}{2} \end{array}\right.$

$18 \cdot 18 = 324$

$5^0+1 \ge |1|^{\log_{12} 13}$ $2>$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$tg\,\alpha - ?$

$\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2(\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$\frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot\cos2\beta-\sin\alpha\cdot\sin2\beta}{\cos\alpha}$

$(\sin\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos\alpha)\cos(\alpha+2\beta)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$(\sin\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cdot\cos2\beta-\sin\alpha\cdot\sin2\beta)+$

$+\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\cancel{-\frac{\sqrt3}{5}}$ $\frac{\sqrt3}{5}$ $\frac{1}{\sqrt3} = \sin\delta$

~~$360 > 2 > 180°$~~

$\begin{cases} 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\alpha+\beta = t$

$\beta = t-\alpha$

$t+t-\alpha = 2t-\alpha$

$\alpha = t-\beta$

$\begin{cases} 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cdot\cos\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sin t\cdot\cos t = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2t-\alpha)\cdot\cos(2t-\alpha)+2\sin\alpha\cdot\cos(t-\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\frac{\sqrt5}{5} = \cancel{\frac{1}{\sqrt5}}$ $\frac{2,1}{4,2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

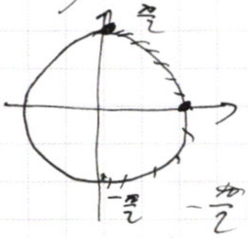
$|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac15} = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin 2\beta = \begin{cases} \frac{\sqrt5}{5}, \ \pi n \le \beta < \frac{\pi}{4}+\pi n \\ -\frac{\sqrt5}{5}, \ -\frac{\pi}{4}+\pi m \le \beta < \pi m \end{cases}$

$\sin(2\alpha+2\beta) =$

$= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$



$-\frac{\pi}{2}+2\pi n \le 2\beta \le \frac{\pi}{2}+2\pi n$

$-\frac{\pi}{4}+\pi m \le \beta \le \frac{\pi}{4}+\pi n$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \,|\cdot\sqrt5 \ (1) \\ \beta .. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \,|\cdot\sqrt5 \ (2) \\ \beta .. \end{cases} \end{array}\right.$

(1): $\sin 2\alpha \cdot 2 + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin x + \cos x = -1$

$2\sin 2x + \cos^2 x = -\cos x$

$\sin 2x + 1 - \sin^2 x = -1$

$\sin^2 x - \sin 2x - 2 = 0$

$\sin^2 x - \sin 2x = 2 \Leftrightarrow$

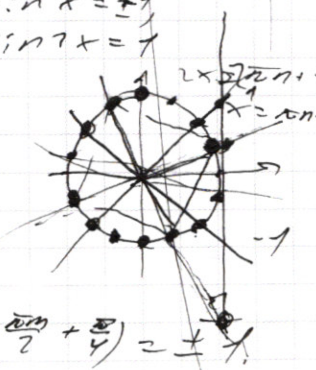
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\alpha = \pi n + \frac{\pi}{2} \\ 2\alpha = \pi n + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} \end{cases}$

$x = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$

$2x = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$

$x = \pi n + \frac{\pi}{4}$



$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi m}{2} + \frac{\pi}{8}$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(n-m)}{2} = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi m}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$

$\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8}\right) =$

(2): $\sin x \cdot 2 - \cos x \cdot 1 = -1$

$2\sin x - \cos x = -1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

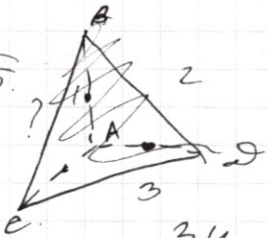
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \,/\cdot \sqrt5$



$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \pm (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = 0$

$34 \cdot 4 = 136$, $136 - 9 = 127$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{\cos^2\alpha} + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0, \\ -\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0 \end{array}\right.$

17:46.

17:36 → man

16:40

16:30 - ж.

$\left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0, (1) \\ 2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0 (2): \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \\ \end{array}\right.$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} = |t > 0.$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

(1): $\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \text{ прот. усл. задачи.} \\ \cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \end{array}\right.$

$\cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \,/\cdot\cos\alpha \,/\, \cos^2\alpha + 2\sin 2\alpha = 0,$

$\cos\alpha = -2\sin\alpha \,/\cdot \frac{1}{\cos\alpha}$

$\cancel{1-25} + \sin^2\alpha + \sin 2\alpha = 0.$

$\sin^2\alpha + \sin 2\alpha = 1$

$\frac{\log_5 t}{\log_5 12} =$

$-2\,tg\,\alpha = 1$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

(2) $\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha = 0, \\ \sin\alpha + 2\cos\alpha = 0. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -2\cos\alpha \,/ \\ \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha = \pm 1$

$\pm 1 = 0.$

$\varnothing$.

Ответ: $-2; 0; -\frac{1}{2}$

$6800 / 325 = 20{,}8$

$6800 / 5 = 1360$

$325 / 5 = 65$

(2) $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -2, \\ tg\,\alpha = 0 \end{array}\right.$

$850 / 25 = 34$

$12{,}5^2 = (25 \cdot 0{,}5)^2$

$\frac{0{,}5^2 \cdot 25^2 + 0{,}5^2 \cdot 5^2}{5} = 0{,}5^2.$

$15^2 = 225$

$25^2 = 625$

850

830

$240 + 85 = 325$

$170 \cdot 40 = 6800$

$1360 / 5 = 272$

$\frac{85}{6} - \frac{15}{2} = \frac{85 - 45}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2 2.

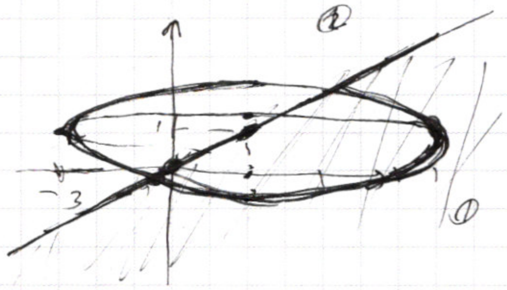
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ x^2-2\cdot2\cdot x+2^2+(3y)^2-2\cdot3\cdot3y+3^2=12+2^2+3^2=12+4+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \end{cases}$$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2.$

25



$(y-1)^2=1$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2.$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$(x+2y+1)(x-4y-2)=0$

$x^2-2xy-2x-2xy+4y^2+4y+x-2y-2=0$

$~~x^2-4xy+x+4y^2+2y-2=0~~$

$(x-2)^2=5^2$

$x-2=\pm5.$

$\begin{cases} x=7 \\ x=-3 \end{cases}$

$x=2,\ 9(y-1)^2=5^2$

$3(y-1)=\pm5.$

$y-1=\pm\frac{5}{3}$

$\begin{cases} y=\frac{8}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$

$y<\frac{x}{2}$ $y=\frac{x}{2}.$

(1): $y=0$:

$x-2y=$

$=2-0=2>0.$

$y-x+1$ $4y-x-2$

$~~(x-4y+1)(x+4y-2)=~~$

$=~~x^2-4xy-2x-xy+4y^2+2y~~$

$x^2-4xy-2x-xy$

$4y^2-4xy-2y$

$+4y-x-2=0$

$(-y+x-1)(-4y+x+2)=0$

$4y^2-xy-2y=4xy+x^2+2x+4y-x-2$

$$\begin{cases} x-2y\geq0 & x\geq2y \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 & (2) \end{cases}$$

(2): $~~x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0~~=4y^2-5xy+2y-x^2+x-2$

$~~x^2-8xy+x-4y^2+4xy+2y-2=0~~$

$~~x(x-y+1)+2(y(2y-2x+y)-1)=0~~$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2+x+2y-xy-2=0$

$~~x(x-y)+4y(y-x)+x+2y-2=0~~$

$(x-y)(x-4y)+x+2y-2=0$

$(x-y)(x-4y)+x-4y+6y-2=0$

$~~(x-y)(x-4y)~~$ $~~(x-4y)(x-y+x-4y)+6y-2=0~~$

$~~(x-4y)(2x-5y)+6y-2=0~~$

$x^2+x-5xy+4y^2+2y-2=0$

$x(x+1-y)+4y(y-x-1)+6y-2$

$(x+1-y)(x-4y)+6y-2=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)