МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

+ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

+ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

+ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

± 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

Пусть p - некоторое простое число

$f(1)=f\left(\frac{p}{p}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)=0=\left[\frac{p}{4}\right]+f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right)=-\left[\frac{p}{4}\right]=-f(p)$

~~Пусть~~

Разложим x и y на простые множители (p_i и p_j' могут совпадать и повторяться)

$x=p_1p_2\ldots p_n$

$y=p_1'p_2'\ldots p_l'$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(p_1p_2\ldots p_n)+f\left(\frac{1}{p_1'}\cdot\frac{1}{p_2'}\ldots\right)$

$\Rightarrow f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_n)+f\left(\frac{1}{p_1'}\right)+f\left(\frac{1}{p_2'}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{p_l'}\right)<0$

$\Rightarrow f(p_1)+\ldots+f(p_n)-f(p_1')\ldots-f\left(\frac{1}{p_l'}\right)<0$

$\Rightarrow \left[\frac{p_1}{4}\right]+\left[\frac{p_2}{4}\right]+\ldots\left[\frac{p_n}{4}\right]<\left[\frac{p_1'}{4}\right]+\left[\frac{p_2'}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{p_l'}{4}\right]$

Для каждого простого числа до 28 выпишем $\left[\frac{p}{4}\right]$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$\left[\frac{p}{4}\right]$	0	0	1	1	2	2	3	3	3

Теперь, используя эту таблицу, для каждого n: $4\leq n\leq 28$

~~вычислим $\sum f(p_i)$ ($n=p_1p_2\ldots p_i$)~~ и $n=z_1z_2\ldots z_r$ (z_i - простые)

вычислим $\left[\frac{z_1}{4}\right]+\ldots\left[\frac{z_r}{4}\right]=g(n)$

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sum\left[\frac{z_i}{4}\right]$ $g(n)$	0	1	0	1	0	0	1	2	0	2	1	1	0	3	0	3	1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

n	21	22	23	24	25	26	27	28
g(n)	1	2	3	0	2	2	0	1

Теперь будем искать подходящие пары (X, Y).

Как было получено раньше, необходимо, чтобы выполнялось условие $g(x) < g(y)$

1) $g(x) = 0 \Rightarrow g(y) = 1, 2$ или 3

таких чисел 9 таких чисел 16

$\Rightarrow$ всего $9 \cdot 16 = 144$ варианта

2) $g(x) = 1 \Rightarrow g(y) = 2$ или 3

8 чисел 8 чисел

всего $8 \cdot 8 = 64$ варианта

3) $g(x) = 2 \Rightarrow g(y) = 3$

3 3

всего $3 \cdot 3 = 9$ вариантов

$\Rightarrow$ Всего $144 + 64 + 9 = 217$ вариантов

Ответ: 217 вариантов.

Задача №2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

Преобразуем первое выражение

$$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \Rightarrow y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$$

$$\Rightarrow y^2 - 13xy + y + 36x^2 + 6x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + y(1 - 13x) + (36x^2 + 6x - 6) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{(1-13x)^2-4\cdot1\cdot(36x^2+6x-6)}-1+13x}{2}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{169x^2-26x+1-144x^2-24x+24}-1+13x}{2}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{25x^2-50x+25}-1+13x}{2} = \frac{\pm5(x-1)-1+13x}{2}$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=9x-3 \\ y=4x+2 \end{array}\right.$ Теперь каждый из вариантов подставим во второе уравнение

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x-3)^2-9+(y-6)^2-36=45$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

A) $y=9x-3$

$9(x-1)^2+(9x-9)^2=90$

$(9+81)(x-1)^2=90 \Rightarrow (x-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ из этого варианта получаются пары (x,y) решений: $(0,-3)$ и $(2,15)$. Вторая пара входит в ОДЗ. А первая нет, т.к $y-6x=-3=\sqrt{}$, а такого не бывает, т.к корень неотрицательный.

$\Rightarrow$ остается $(2,15)$

в) $y = 4x+2$

$9(x-1)^2 + (4x-4)^2 = 90$

$(9+16)(x-1)^2 = 90 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{90}{25} \Rightarrow x-1 = \pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$

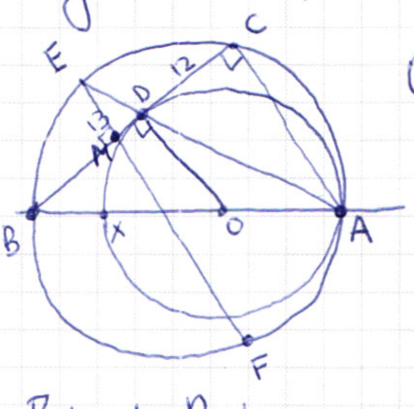
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ x = 1-\frac{3}{5}\sqrt{10} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ получаются следующие пары

$\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{10}, 6+\frac{12}{5}\sqrt{10}\right), \left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10}, 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

Первая пара не подходит, т.к $y-6x = 6+\frac{12}{5}\sqrt{10} - 6 - \frac{18}{5}\sqrt{10} = -\frac{6}{5}\sqrt{10} < 0$, а корень не может быть отрицательным. Вторая пара входит в ОДЗ $\Rightarrow$ остается $\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10}, 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

$\Rightarrow$ Итоговый ответ: $(x,y) \in \left\{\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10}, 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right), (2,15)\right\}$

Задача № 4



Обозначим центр O окружности ω

$(BC) \perp (OD)$ т.к это касательная к окружности ω. Также $\widehat{BCA} = 90^\circ$, т.к BA – диаметр Ω.

Пусть R – радиус Ω, а r – радиус ω. Тогда

~~ЮА~~ $BO = 2R - r$, $BA = 2R$. $\triangle CBA$ подобен $\triangle DBO$ по прямому углу и общему углу $\widehat{DBO}$. $\Rightarrow$

$\frac{2R}{25} = \frac{2R-r}{13} \Rightarrow 26R = 50R - 25r \Rightarrow 25r = 24R$

$\Rightarrow r = \frac{24}{25}R$.

Далее посчитаем степень точки B относительно окружности ω.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

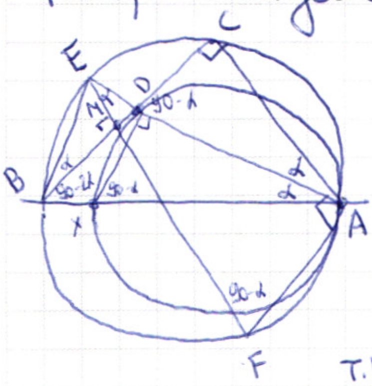
$BX \cdot BA = BD^2$

$BX = 2R-2r \Rightarrow 2R(2R-2r) = 13^2 \Rightarrow 4R(R-r) = 13^2$

$r = \frac{24}{25}R \Rightarrow \frac{4}{25}R^2 = 13^2 \Rightarrow R^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{2^2} \Rightarrow R = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$

и $r = \frac{24 \cdot 13 \cdot \cancel{5}}{\cancel{25}_5 \cdot 2} = \frac{24 \cdot 13}{10} = 31,2$

Теперь найдем угол $\widehat{AFE}$



$\widehat{XDA} = 90^\circ$, т.к XA - диаметр ω.

Пусть $\widehat{EAB} = \alpha \Rightarrow \widehat{DXA} = 90 - \alpha$, но

$\widehat{DXA} = \widehat{CDA}$ (опираются на одну дугу $\overset{\smile}{DA}$)

$\Rightarrow \widehat{CDA} = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \widehat{CAD} = \alpha$

т.к $\widehat{EMD} = 90^\circ$ и $\widehat{EDM} = \widehat{CDA} = 90 - \alpha$, $\widehat{AEF} = \alpha$

$\widehat{CBA} = 90^\circ - 2\alpha$, $\widehat{EBC} = \cancel{ECA}\ \widehat{EAC} = \alpha$ (опир. на одну дугу)

$\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{CBA} = 90^\circ - \alpha = \widehat{EBA} = \widehat{EFA}$ (т.к они опираются на одну дугу). Осталось найти α. Из $\triangle BCA$:

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2}$

~~Найдем~~ $\Rightarrow \widehat{AFE} = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2}$

Найдем площадь $\triangle AEF$.

$\widehat{EAF} = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow EF$ - диаметр $\Omega \Rightarrow EF = 65$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} EA \cdot AF = \frac{1}{2}\cos\alpha \sin\alpha \cdot EF^2 = \frac{\sin 2\alpha}{4} EF^2$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{25 \cdot 65^{\cancel{2}}}{4 \cdot \cancel{65}} = \frac{25 \cdot 65}{4} = \frac{6500}{16} = 406,25$

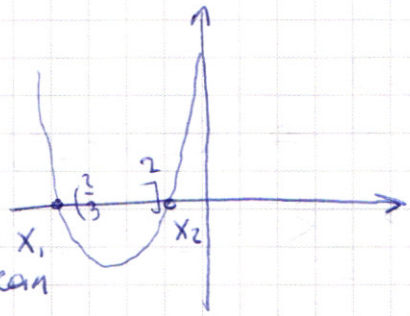
Задача № 6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ ~~на~~ для $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

Рассмотрим сначала второе неравенство

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$0 \geq 18x^2-(51+a)x+(28-b)$



Чтобы это выполнялось необходимо, чтобы весь отрезок $(\frac{2}{3}, 2]$ лежал между корнями x_1 и x_2 уравнения $18x^2-(51+a)x+(28-b)=0$ (т.к парабола направлена ветвями вверх).

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{(51+a)^2-4\cdot 18(28-b)}+51+a}{36} = \frac{\pm\sqrt{D}+51+a}{36}$$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{D}+51+a}{36} \geq 2$ и $\frac{51+a-\sqrt{D}}{36} \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \sqrt{D}+a \geq 21$ и $a-\sqrt{D} \leq -27$

$\Rightarrow 2\sqrt{D} \geq 48 \Rightarrow \sqrt{D} \geq 24 \Rightarrow D \geq 24^2$

$\Rightarrow (51+a)^2+62b-62\cdot 28 \geq 24^2$

Теперь рассмотрим левое равенство

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \Rightarrow 8-6x \geq 3ax^2+\cancel{(18-2a)x}+(3b-2a)x-2b$

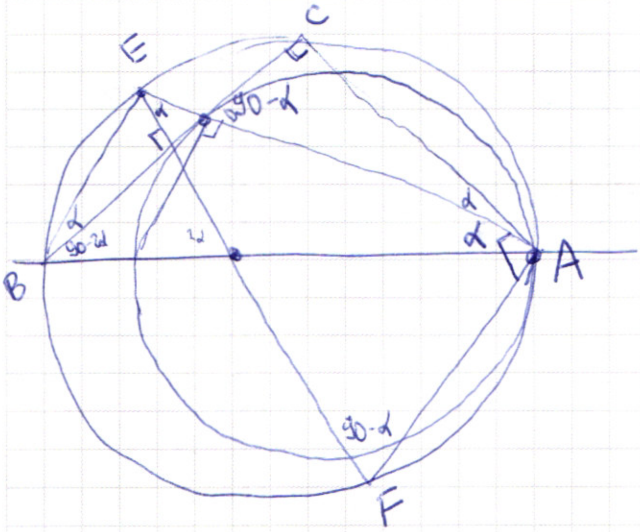
$\cancel{-18\cdot 2-57\cdot 3}$

$\cancel{=-36-153=-189}$

Далее можно получить условие на a и b способом, аналогичным рассмотрению второго нер-ва.

$\cancel{51\cdot 2+28\cdot 3}$

$\cancel{102+60+18}$



2α находим из $\triangle BCA$

$S = \frac{1}{2} EA \cdot FA = \frac{1}{2} EF \cdot \cos\alpha \cdot EF \cdot \sin\alpha$

$= \frac{1}{2}\cos\alpha \sin\alpha \; EF^2$

$= \frac{\sin 2\alpha}{4} EF^2$

$(2,15)$

$3 = \sqrt{30-12-15+6} =$

$36-27=9.$

$90 = 9 \cdot \cancel{8} \cdot 2 =$

$9(x-1)+(y-6)^2 = 90$ $\sqrt{\frac{90}{25}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

$\times \begin{array}{r} 13 \\ 24 \\ \hline 52 \\ 26 \\ \hline 312 \end{array}$

$4 \cdot 18 = 62$

$40+32$

$y-6x$ $\quad 6 + \frac{12}{5}\sqrt{10} - 6 - \frac{18}{5}\sqrt{10} < 0.$

$y-6x = 6 - \frac{12}{5}\sqrt{10} - 6 + \frac{18}{5}\sqrt{10} = \frac{6}{5}\sqrt{10}.$

4

$xy = 6 - \frac{12}{5}\sqrt{10} - \frac{18}{5}\sqrt{10} + \frac{36}{25} 10^2 = \cancel{6 + \frac{72}{5}} \cancel{> 8.6\sqrt{10}}$

$-6x = -6 + \frac{18}{5}\sqrt{10}$ итого

$x(y-6) = \left(1 - \frac{3}{5}\sqrt{10}\right)\left(-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right) = -\frac{12}{5}\sqrt{10} + \frac{72}{5}$

$\cancel{6} \quad -\frac{12}{5}\sqrt{10} + \frac{72}{5} - 6 + \cancel{\frac{12}{5}\sqrt{10}} + 6 = \frac{72}{5}$

$\left(\frac{6}{5}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{36 \cdot 10^2}{25}.$

$3-6x \geq (18x^2 - 51x + 28)$

$\begin{array}{r} 51 \\ 24 \\ \hline \end{array}$

$24.$

$\sqrt{a}$ $\quad 21 \quad a$

$36 \cdot 2 = 72$

$72 - 51 = 21$

$24 - 51$

$31 - 4$

$30 - 3$

$(3x-2)(ax+6)$

$18 \quad 2a$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~1) Л.ч = 0 ⇒ $X = 2^k \cdot 3^n$~~

~~П.ч > 0 ⇒ Y = любое, кроме $2^k 3^n$~~

2) Л.ч

X:	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Л.ч g(x)	0	1	0	1	0	0	1	2	0	2	1	1	0	3
	18	19	20	21	22	23	24							
Л.ч g(x)	0	3	1	1	2	3	0							

$g(x) < g(y)$

Кол-во чисел

g(k)	number (k)
0	8
1	7
2	3
3	3

9
8
5
3

$8 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 3$

$= 9 + 42 + 80 + 24 = 155.$ нар чисел.

104

113

25 − 9

16

+ 144
64
208

160 − 16
= 144

+ 208
9
217

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 22$

$8 - \frac{102}{3} + 28$

$x = 2$

$\frac{3}{2}$

$9x - 8 \Rightarrow (3x-2)(18x^2 - 51x + 22)$

$18 \cdot 4 = 40 + 32$

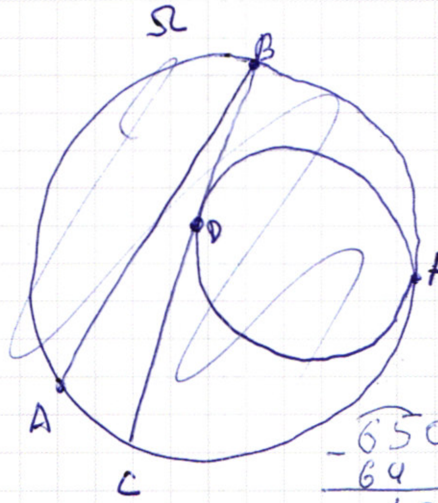
$62 + 28 = 8 \cdot 90$

-12

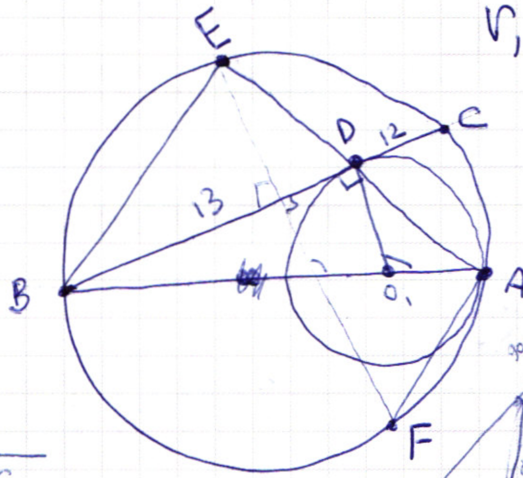
-102

$-12 \quad 4$

$4 \cdot (22 + 2 \cdot 51 - 4 \cdot 81)$



64



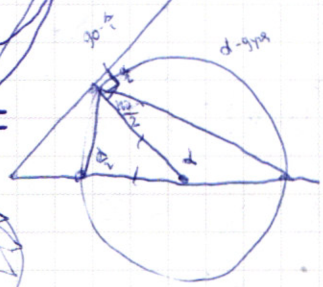
$r, R - ?$

$\widehat{AFE} - ?$

$S_{AEF} - ?$

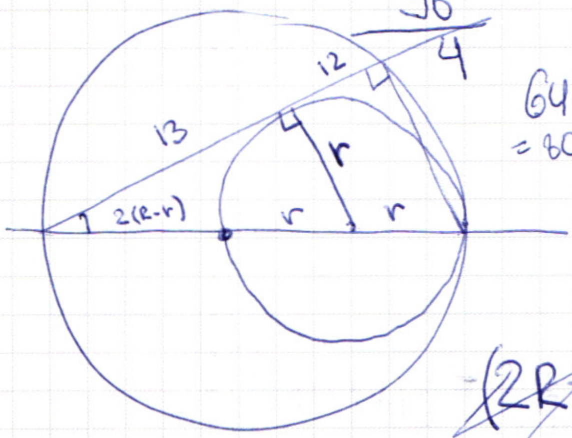
$CD = 12$

$BD = 13.$



$$\begin{array}{r|l} 6500 & 16 \\ \underline{64} & \overline{406} \\ 100 & \\ \underline{96} & \\ 4 & \end{array}$$

$EF \parallel DO_1$



$64+16$
$=80$

$$13^2 = 2(R-r)\cdot(2(R-r)+2r)$$

$$= \cancel{2R}\, 4R(R-r) = 169$$

$$\cancel{(2R-r)^2 - r^2 = 13^2}$$

$$\cancel{4R^2 - 4Rr + r^2 =}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 24 \\ 13 \\ \hline 72 \\ +\,24 \\ \hline 312 \end{array}$$

$13\cdot 5 = 50$

$$\frac{2R}{25} = \frac{2R-r}{13} \Rightarrow 26R = 50R - 25r$$

$$\Rightarrow 25r = 24R$$

$$r = \frac{24}{25}R$$

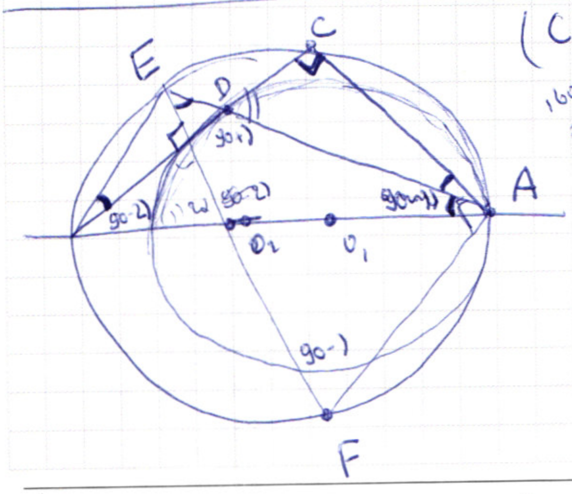
$$4R\left(R - \frac{24}{25}R\right) = 169$$

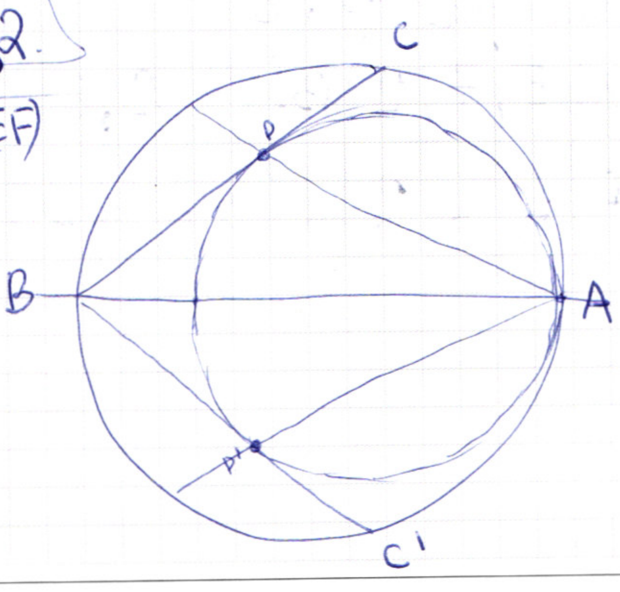
$$4R\cdot R\cdot\frac{1}{25} = 169 \Rightarrow R^2 = \frac{169\cdot 25}{4} \Rightarrow R = \frac{13\cdot 5}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$$

$$r = \frac{24\cdot 13\cdot \cancel{5}}{\cancel{25}_{5}\cdot 2} = \frac{24\cdot 13}{10} = \boxed{31{,}2}$$

$(CA) \parallel (EF)$

$160-\gamma)$
$=90+90-\gamma)$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f \to$ на Q_+

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad p \in \mathbb{P}$

$4 \le x, y < 28$

~~$f\left(\frac{x}{y}\right) \le 0 \Rightarrow f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x)$~~

Пусть число $\alpha = p_1 p_2 p_3 \ldots$

$f(\alpha) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots$

$f\left(\frac{p}{p}\right) = \left[\frac{p}{4}\right] + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = f(1) - \left[\frac{p}{4}\right].$

$= -\left[\frac{p}{4}\right].$

Пусть $x = p_1 p_2 \ldots p_n$

$y = l_1 l_2 \ldots l_z$

$\left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots \left[\frac{p_n}{4}\right] - \left[\frac{l_1}{4}\right] - \left[\frac{l_2}{4}\right] - \ldots \overset{<}{\cancel{\le}} 0$

$\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots \left[\frac{p_n}{4}\right] < \left[\frac{l_1}{4}\right] + \left[\frac{l_2}{4}\right] + \left[\frac{l_3}{4}\right].$

Допустимые p и l:

$\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$\Rightarrow$ max 4 множителя.

R:	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$\left[\frac{p}{4}\right]$	0	0	1	1	2	2	3	3	3

③ ~~Возьмем ln~~

$\cancel{k = \log_5 12 \cdot \ln |x^2 - 26x|}$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+6 \geqslant 18x^2 - 51x + 28 \qquad \left(\frac{2}{3}; 2\right].$$

$3x-2 > 0$

$$8-6x \geqslant (ax+6)(3x-2) \geqslant (18x^2-51x+28)(3x-2)$$

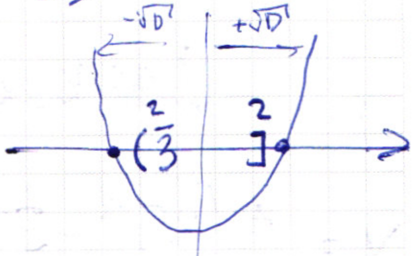
$$\cancel{8-6x \geqslant 3ax^2}$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+4+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

$$18x^2 - 51x + 28 \qquad x = \frac{\pm\sqrt{51^2 - 4\cdot 18\,28} + 51}{36}$$

$$ax+6 \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

$$0 \geqslant 18x^2 - (51+a)x + (28-6) \qquad \text{для } x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right].$$



$$x = \frac{\pm\sqrt{(51+a)^2 - 4\cdot 18(28-6)} + 51 + a}{36}$$

$x_2 > x_1$

$\left.\begin{array}{l} x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \leqslant \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$ условие на a и b.

$$\frac{5x-5-1+13x}{2} = \frac{18x-6}{2} = 9x-3$$

$$\frac{-5x+5-1+13x}{2}$$

$$\frac{8x+4}{2} = 4x+2$$

$\cancel{8-6}$ $8-6x \geqslant (ax+6)(3x-2)$

$8-6x \geqslant 3ax^2 \ldots$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+9-9+y^2-12y+36-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0$

$y^2+y(-13x+1)+(36x^2+6x-6)=0$

$y=\dfrac{\pm\sqrt{(-13x+1)^2-4(36x^2+6x-6)}+13x-1}{2}$

$y=\dfrac{\pm\sqrt{\cancel{196}\,169x^2+1-26x-144x^2-24x+24}+13x-1}{2}$

$y=\dfrac{\pm\sqrt{25x^2-50x+25}+13x-1}{2}=\dfrac{\pm5\sqrt{x^2-2x+1}+13x-1}{2}$

$y=\dfrac{\pm5(x-1)+13x-1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y_1=\dfrac{18x-6}{2}=9x-3 \\ y_2=\dfrac{8x+4}{2}=4x+2 \end{array}\right.$

на ОДЗ!

5

$15-9n=$

$18+28=30+16$

$\cancel{y-6x}$

120
24

62

$27\geq a+6$

$\dfrac{3x-2}{4}$

$32+400-\cancel{400}-320-36+200+160+12-64$

$8\cdot 54-189\cdot 4+186\cdot 2-64=32-36+12-24$

$32-36+12-64+40$

$54-189+186-64$

$40+32-102+28$

-18

2

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача №6~~

$$\cancel{\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+6 \geqslant 18x^2-51x+28}$$

~~Найдем решения уравнения~~

$$\cancel{(18x^2-51x+28)(3x-2) = 8-6x}$$

$$\cancel{54x^3-189x^2+180x-56 = 8-6x}$$

$$\cancel{54x^3-189x^2+186x-64=0}$$

~~Заметим, что~~

Задача №6

Подставим $\cancel{x=\frac{2}{3}}$ и $x=2$

$$\frac{8-6\cdot 2}{6-2} \geqslant 2a+6 \geqslant 18\cdot 4-51\cdot 2+28$$

$$-1 \geqslant 2a+6 \geqslant -2$$

~~Далее домножим на 3x-2 и подставим~~ $\cancel{x=\frac{2}{3}}$

$\cancel{3x-2=}$

$\cancel{8-\frac{2}{3}\cdot 6 \geqslant}$

Подставим 1:

$$1 \geqslant a+6 \geqslant -5$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)