МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}; & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; & (2) \end{cases}$$

(2) $(x^2-4x+4)-4+(9y^2-18y+9)-9=12.$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2.$

(1) $(x-2y)^2=xy-x-2y+2.$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2.$

~~x^2+9~~ ~~$x^2-4x+(9y^2-18y-12)=0.$~~

$x^2-4xy+x-xy+4y^2+2y-2=0$

$x^2-5xy+x+(4y^2+2y-2)=0.$

$x^2-x(5y-1)+(4y^2+2y-2)=0.$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$

$=(3y-3)^2.$

$x_{1,2}=\dfrac{5y-1\pm(3y-3)}{2}\Rightarrow x_1=\dfrac{5y-1+3y-3}{2}=\boxed{4y-2}.$

$x_2=\dfrac{5y-1-3y+3}{2}=\boxed{y+1}$

(2') $x=4y-2.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0.$$

$$\times\begin{array}{r}\overset{4}{25}\\ 8\\ \hline 200\end{array}$$

$$16y^2+4-16y+9y^2-16y\overset{+8}{-}18y-12=0$$

$$25y^2-50y\cancel{-8}=0.$$

~~$D=25^2+25\cdot8=625+$~~ $25y(y-2)=0.$

$$\begin{pmatrix}y_1=0\\x_1=-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_2=2\\x_2=6\end{pmatrix}$$

2) $x=y+1$

$$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y-12=0.$$

$$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-12-18y=0.$$

$$10y^2-20y-15=0 \Rightarrow 2y^2-4y-3=0$$

$$y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+6}}{2}=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow\left(2\pm\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

Проверка: $x-2y\geq0$

1) $(-2;0)$ – не подх. 2) $(6;2)$ – подх.

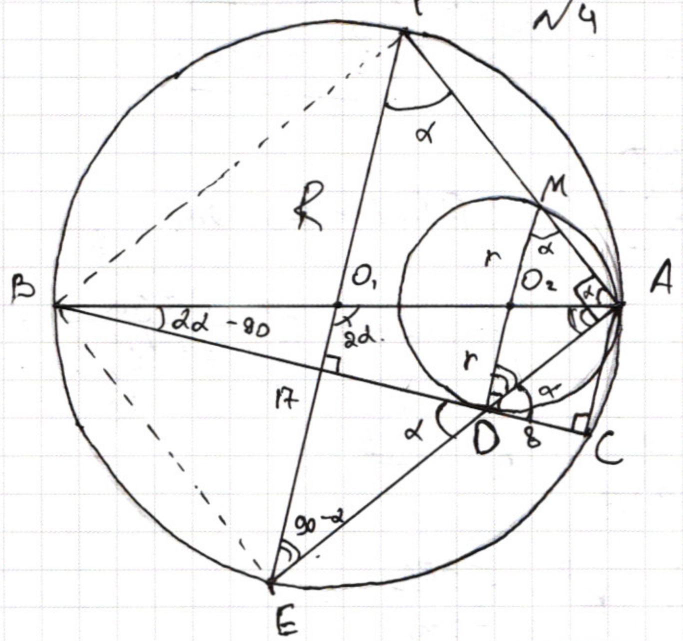
3) $\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\Rightarrow 2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}<0$ – не подх.

4) $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\Rightarrow 2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}>0$ – подх.

Ответ: $(6;2);\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$r; R = ?; \angle AFE = ?; S_{\Delta AFE} = ?$

$CD = 8; BD = 17;$

$$17 \cdot 8 = 136$$

Решение: $\angle FAE = \angle BCA = 90°$ (опирает. на диаметр).

DM – диаметр (т.к $\angle MAD = 90°$); $\angle ADC = \angle DMA = \alpha$.

(угол между касат. и хордой). $\Rightarrow FE \parallel MD (\angle DMA = \angle EFA)$.

$BD \cdot DC = ED \cdot DA \quad \Delta EFA \sim \Delta DMA \Rightarrow \dfrac{AD}{ED + AD} = \dfrac{r}{R}$.

$8 \cdot 17 = ED \cdot DA \Rightarrow ED = \dfrac{8 \cdot 17}{DA}$

$$\frac{AD}{\frac{8 \cdot 17}{AD} + AD} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{AD^2}{8 \cdot 17 + AD^2} = \frac{r}{R} \Rightarrow RAD^2 - r \cdot AD^2 = 136 r.$$

$\Delta ABC \sim \Delta O_2BD \; \left(k = \dfrac{25}{17}\right)$, $k = \dfrac{AC}{r}$.

$tg\,\alpha = \dfrac{AC}{8}$; $\angle DAC = 90 - \alpha$; $\angle ABC = 90 - (90 - \alpha) \cdot 2 =$

$= 2\alpha - 90 \Rightarrow tg(2\alpha - 90) = -Ctg\,2\alpha = \dfrac{AC}{25}$

$$-\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha} = -\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{AC}{25}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{17} \\ \times 9 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\frac{\frac{AC^2}{64}-1}{\frac{\cancel{2}AC}{\cancel{8}4}} = \frac{AC}{25} \Rightarrow \frac{AC^2}{64} - 1 = \frac{AC^2}{100} \Rightarrow \frac{36AC^2}{6400} = 1$$

$$AC = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cancel{40}^{5}}{3\cdot\cancel{8}} = \boxed{\frac{5}{3} = \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{17} = \frac{\cancel{40}^{8}}{3r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{136}{15}} \qquad \angle FO_1A = 180 - 2\alpha$$

$$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}R\cdot\cancel{2}R\cdot\sin 2\alpha = R^2\cdot\sin 2\alpha = R^2\cdot\frac{2\overset{\frac{5}{3}}{\operatorname{tg}\alpha}}{1+\underset{\frac{25}{9}}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= R^2\cdot\frac{\frac{10}{3}}{\frac{34}{9}} = R^2\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{34}_{17}} = R^2\cdot\frac{15}{17}$$

$$\triangle EFA \sim \triangle DMA\ \left(k = \frac{R}{r}\right) \quad k^2 = \frac{S_{EFA}}{S_{DMA}}$$

$$AD = \frac{8}{\cos\alpha} \Rightarrow AD^2 = \frac{64}{\cos^2\alpha} = 64\left(\overset{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}\right) = 64\cdot\left(1+\frac{25}{9}\right) =$$

$$= \frac{64\cdot 34}{9} \Rightarrow R = 136r/AD^2 + r = \frac{136\cdot 136}{15}\cdot\frac{9}{8\cdot 8\cdot 17\cdot 2} + r =$$

$$= \frac{17\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{17}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{9}^{3}}{\underset{5}{\cancel{15}}\cdot\cancel{17}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{8}\cdot 2} = r\left(\frac{\cancel{136}\cdot 9}{\cancel{17}\cdot 2\cdot\cancel{8}\cdot 8} + 1\right) = \frac{136}{\underset{3}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\cancel{25}^{5}}{16} = \frac{17\cdot\cancel{8}\cdot 5}{3\cdot 2\cdot\cancel{8}} =$$

$$= \boxed{\frac{85}{6} = R}$$

$$\Rightarrow S = \frac{17\cdot 5\cdot\cancel{17}\cdot 5}{6\cdot\cancel{6}_{2}}\cdot\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{17}} = \frac{125\cdot 17}{12} = \boxed{\frac{2125}{12}}$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$; $S = \frac{2125}{12}$; $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b & ① \\ -8x^2-30x-17 \geq ax+b & ② \end{cases}$$

$4x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{4}$

$$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3} \leq ax+b \Rightarrow \underbrace{\left(3+\frac{2}{4x+3}\right)}_{=f(x)} \leq ax+b$$

~~$f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3} - ax - b = 3 + 2(4x+3)^{-1} - ax - b$~~

~~$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(4x+3)^2} - a.$~~

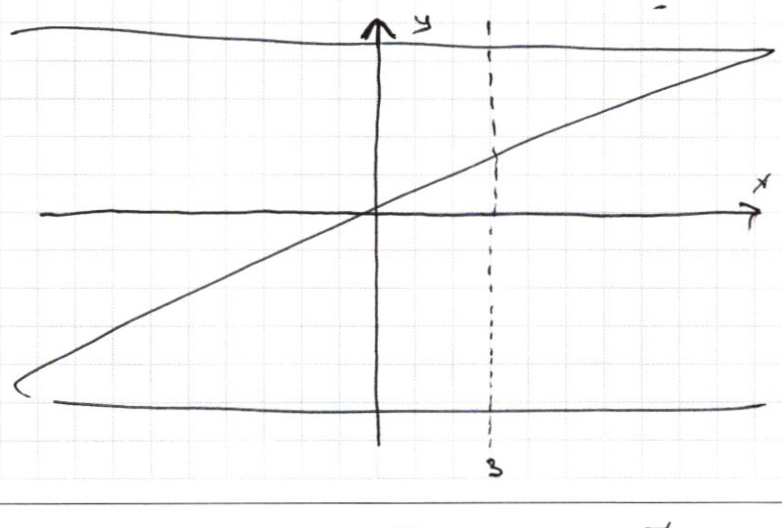
$$f(x) = 3 + \frac{2}{4(x+\frac{3}{4})} = \left(3 + \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{4}}\right) \downarrow$$

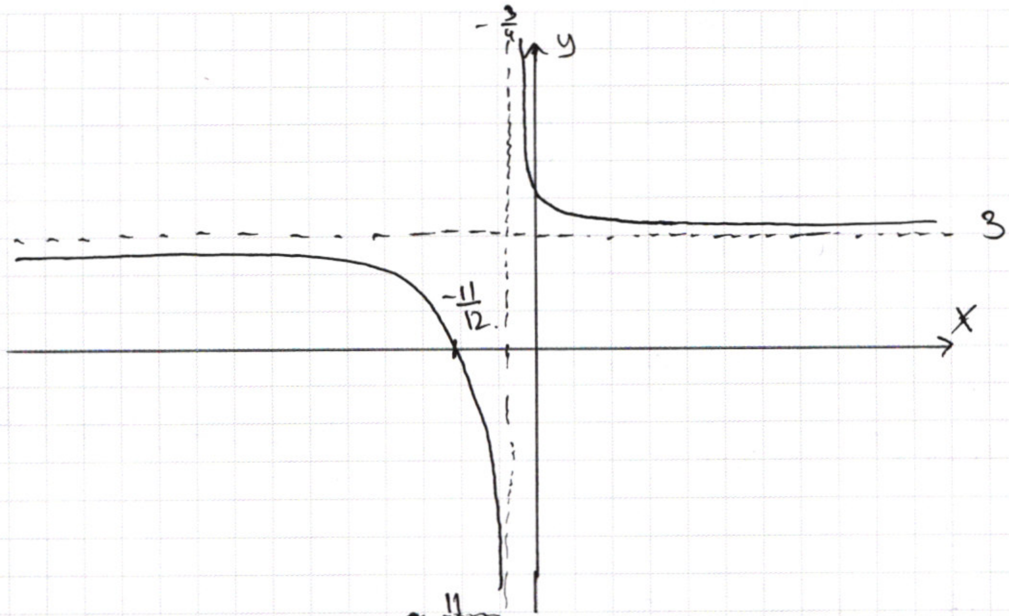
$$(\underbrace{-8x^2-30x-17}_{=g(x)})' = -16x-30 \leq 0$$

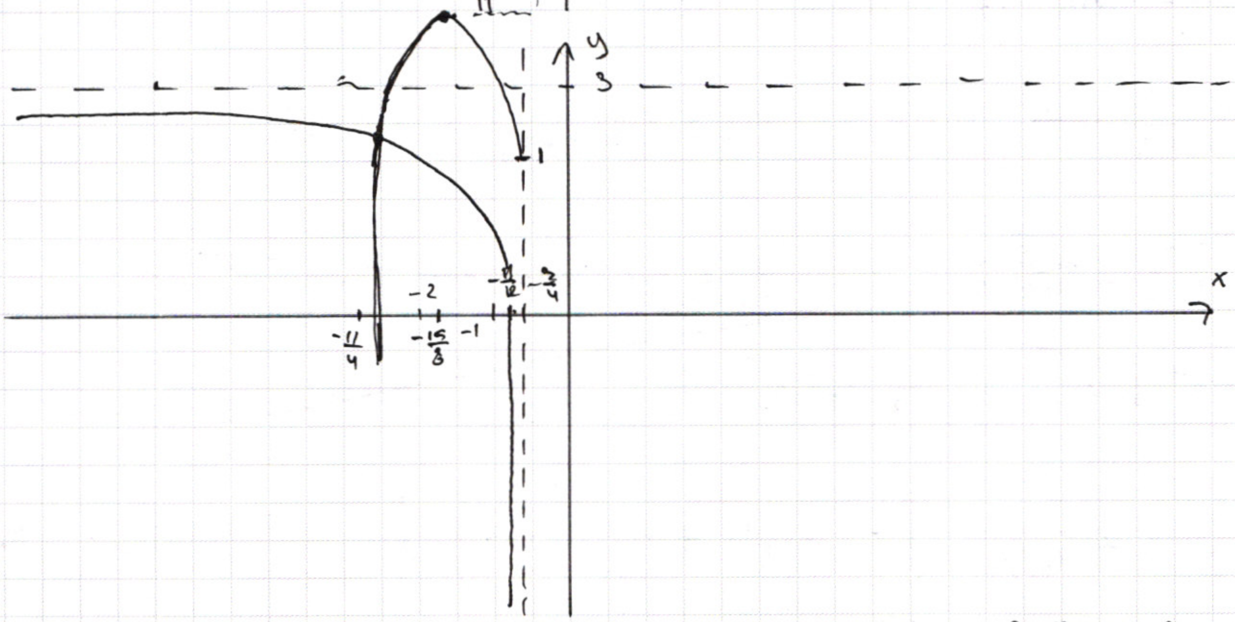
$8x+15 \geq 0$ ~~$\Rightarrow x \in$~~

$- \quad -\frac{15}{8} \quad +$

$\Rightarrow$ при $x \in [-\frac{15}{8}; +\infty) \downarrow$; $x \in (-\infty; -\frac{15}{8}] \uparrow$







$y_в = -8\cdot\left(\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{15\cdot 30}{8} - 17 = \frac{15\cdot 18}{8} - 17 = \frac{225 - 17\cdot 8}{8} = \frac{225-136}{8}$

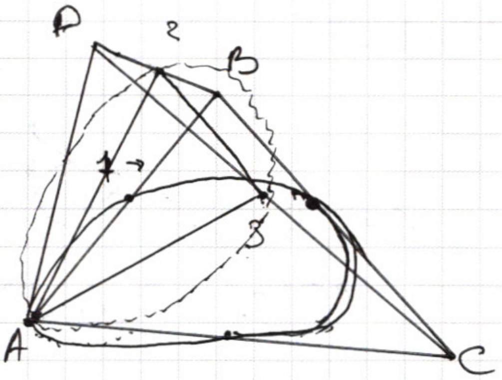
$= \frac{89}{8} \approx 11$

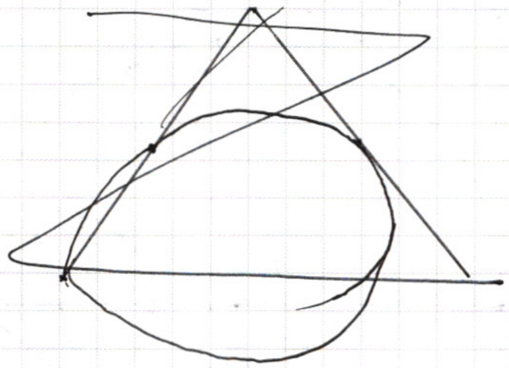
при $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow -8\cdot\frac{9}{16_2} + \frac{3}{4}\cdot 30 - 17 = \frac{90}{4} - \frac{18}{4} - 17 = 1.$

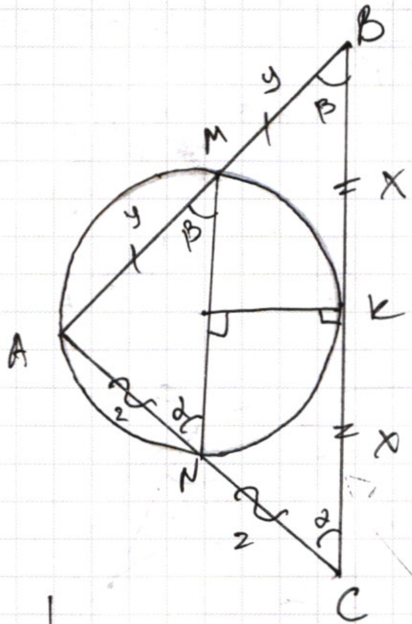
№7.

$AB = 1;\ BD = 2;\ CD = 3;$

$BC = ?;\ r_{min} = ?$





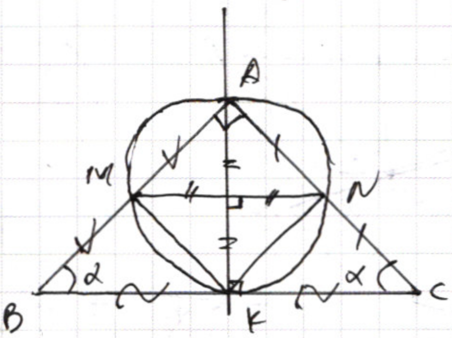


$x^2 = z \cdot 2z$

$x^2 = y \cdot 2y$

$\Rightarrow z = y = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow \beta = \alpha.$



т.к. MN – ср. линия, то

$MN = \frac{1}{2} BC$ и $MN \parallel BC$.

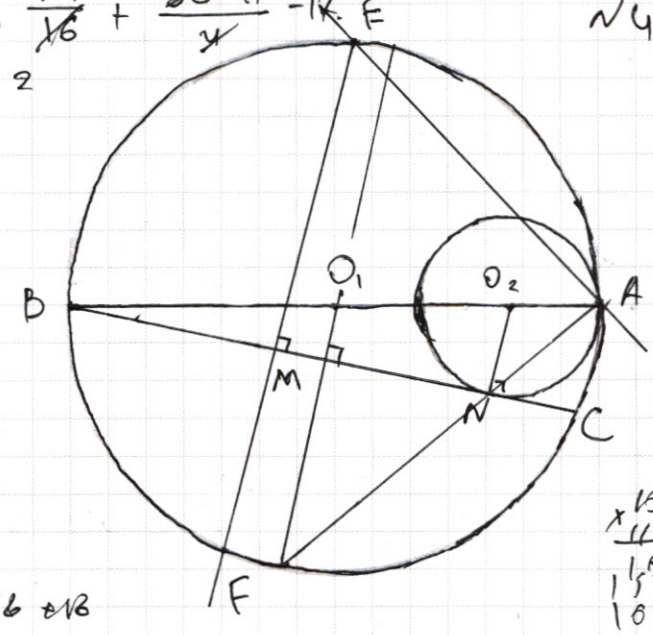
$\Rightarrow \alpha = 45^\circ.$

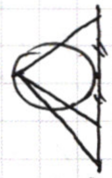
$AB = AC = 1 \Rightarrow \boxed{BC = \sqrt{2}}$ (по т. Пифагора).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\cancel{8}\cdot\frac{121}{\cancel{16}_2}+\frac{\cancel{36}\cdot 11}{\cancel{4}}-17$

№4.





$r=?;\ R=?;$

$\angle AFE=?;\ S_{\triangle AEF}=?$

$CD=8;\ BD=17.$

$4x+3=-4$ 13

$x=-\frac{7}{4}$

$\times\frac{125}{17}$
875
125
2125

$\times\frac{15}{11}$
15
15
165

$\frac{12x+11}{4x+3}$

66 + 13

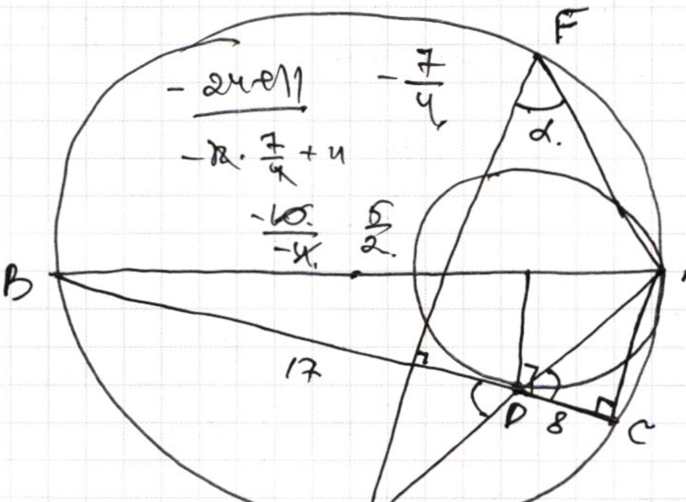
$\times\frac{31}{4}$
62

$\times\frac{17}{8}$
136

$-\frac{24+11}{}$ $\quad -\frac{7}{4}$

$-12\cdot\frac{7}{4}+4$

$\frac{-10}{-4}$ $\quad\frac{5}{2}$



$-\frac{12\cdot 11}{4}+4$

$-11+3$

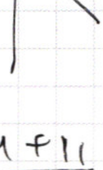
$=\frac{\cancel{22}}{\cancel{8}}\frac{11}{4}$

$\frac{11}{4}$

225 − 366

$-\frac{225}{136}$
89

$-\frac{\cancel{12}\cdot 11}{\cancel{16}_2}+\frac{36\cdot 11}{4}-17$



$\frac{11}{3};\ \frac{23}{7}.$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

$\frac{168-121-17\cdot 2}{2}.$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

$\frac{-24+11}{-8+3}$

77 69

$-8\cdot\frac{7^2}{4^2}+\cancel{36}\cdot\frac{7}{\cancel{4}}$

$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1.$

$-17=$

$\frac{-13}{-5}$

$4x+3=4\Rightarrow x=\frac{1}{4}.$

$x=-\frac{7}{4}.$

$12\cdot -\frac{7}{4}$

$\Rightarrow\frac{-49}{2}+\frac{105-34}{2}$

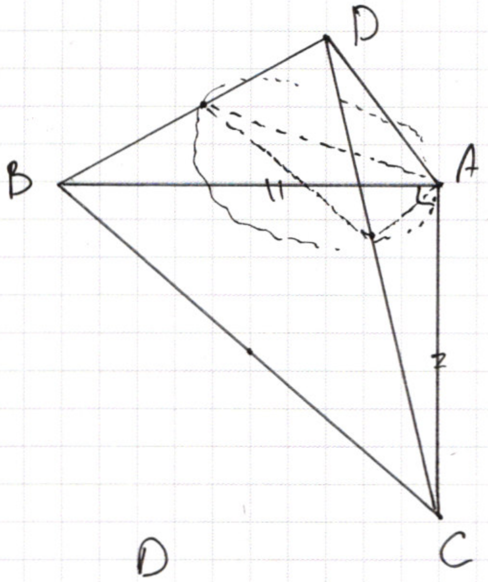
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

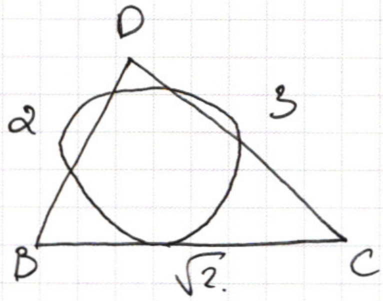
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

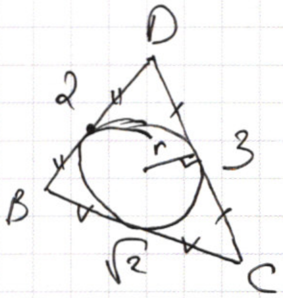
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

№1.

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1) $\qquad$ (2): $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

(2)

$\cancel{2}\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{\cancel{4}\,2}{5}$.

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4\cdot\cancel{5}}{\cancel{25}\,5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(1) $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. $\qquad \boxed{\sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$.

1) $\sin 2\beta = +\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$.

$\cancel{4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1.}$

$\cancel{\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - (\sin^2\alpha - 1) = 0.}$

$2\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$,

$4tg\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - \cancel{tg^2\alpha} \Rightarrow 4tg\alpha = -2. \Rightarrow \boxed{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \frac{4\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$4tg\alpha - \cancel{1} + tg^2\alpha = -\cancel{1} - tg^2\alpha, \Rightarrow tg^2\alpha + 2tg\alpha = 0$

$tg\alpha(tg\alpha + 2) = 0. \Rightarrow \boxed{tg\alpha = 0}, \boxed{tg\alpha = -2.}$

Ответ: $-\frac{1}{2}; -2; 0$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~N2~~ N3

~~x – 2y~~ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow x(x+18)>0$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$ $\Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

$x^2+18x = t > 0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\overbrace{\log_{12}13}^{>1}} \Rightarrow \underbrace{5^{\log_{12}t}}_{>0 \text{ на ОДЗ.}} \geq \overbrace{t^{\log_{12}13} - t}^{\geq 0 \text{ на ОДЗ}(t\geq 1)}$

1) при $t \in (0;1) \to$ выполнимо всегда

2) $t > 1$

$5^{\log_{12}t} - (t^{\log_{12}13} - t) = f(x)$

~~$f'(x) = \ln 5 \cdot 5^{\log_{12}t} \cdot \frac{1}{\log_{12} 12 \cdot t}$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)