МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$(3): \begin{cases} \sin(2\alpha) = \frac{3}{5} > 0 \\ \cos(2\alpha) = \frac{4}{5} > 0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha \text{ в I четверти} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\arccos(\frac{4}{5}) + 2\pi k,\ k \in Z}{\cancel{\arcsin}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{4}{5}\right) + \pi k,\ k \in Z$$

$$tg\,\alpha = tg\left(\frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) \ominus$$

$$0 \le \arccos\left(\frac{4}{5}\right) < \pi \Rightarrow 0 \le \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{4}{5}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha \ge 0$$

$$\ominus \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\{-1;\ \frac{1}{3};\ 3\}$.

№3.

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \ge x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$10x - x^2 = t,\ t > 0$

$$t + t^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3 t}$$

$\log_3 t = c$

$$3^c + 4^c \ge 5^c \Rightarrow c \le 2 \Rightarrow t \le 9$$

$$\begin{cases} 0 < 10x - x^2 \\ 10x - x^2 \le 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x(10 - x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 10 \\ (x-9)(x-1) \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 10 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 9 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0;\ 1] \cup [9;\ 10)$$

Ответ: $x \in (0;\ 1] \cup [9;\ 10)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\beta) = -\frac{2\sqrt5}{5}$;

$\sin(2\alpha)\cdot\frac{\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{5} - \cos(2\alpha)\cdot\left(-\frac{2\sqrt5}{5}\right) \quad \Big| : \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin(2\alpha) = -1 + 2\cos(2\alpha)$

$\sin^2(2\alpha) = 1 - 4\cos(2\alpha) + 4\cos^2(2\alpha)$

$1 - \cos^2(2\alpha) = 1 - 4\cos(2\alpha) + 4\cos^2(2\alpha)$

$5\cos^2(2\alpha) - 4\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha) = 0\\ \cos(2\alpha) = \frac45\end{array}\right.$

$\cos(2\alpha) = 0$: $\sin(2\alpha) = -1 + 2\cdot 0 = -1$ – подходит, но уже было

$\cos(2\alpha) = \frac45$; $\sin(2\alpha) = -1 + 2\cdot\frac45 = \frac35$ – подходит.

В итоге у нас есть 3 варианта:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\sin(2\alpha) = -1\\ \cos(2\alpha) = 0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}\sin(2\alpha) = \frac35\\ \cos(2\alpha) = -\frac45\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}\sin(2\alpha) = \frac35\\ \cos(2\alpha) = \frac45\end{cases} & (3)\end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases}\sin(2\alpha) = -1\\ \cos(2\alpha) = 0\end{cases} \Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\alpha = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$

(2): $\begin{cases}\sin(2\alpha) = \frac35 > 0\\ \cos(2\alpha) = -\frac45 < 0\end{cases} \Rightarrow 2\alpha$ во II-й четверти $\Rightarrow 2\alpha = \arccos\left(-\frac45\right) + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha = \frac12\cdot\arccos\left(-\frac45\right) + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$tg\,\alpha = tg\left(\frac12\cdot\arccos\left(-\frac45\right)\right) \ominus$

$0 \le \arccos\left(-\frac45\right) < \pi \Rightarrow 0 \le \frac12\cdot\arccos\left(-\frac45\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\left(\frac12\cdot\arccos\left(-\frac45\right)\right) \ge 0$

$\ominus \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{1+\frac45}{1-\frac45}} = \sqrt{\frac{9\cdot5}{5\cdot1}} = \sqrt9 = 3.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

(2):

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{\sqrt5}{5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\beta) = -\frac{2}{5} : \left(-\frac{2\sqrt5}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos(2\beta) = \frac{\sqrt5}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2\alpha)\cdot\frac{\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{5} - \cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) \\ \cos(2\beta) = \frac{\sqrt5}{5} \\ \left[\begin{array}{l} \sin(2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5} \\ \sin(2\beta) = -\frac{2\sqrt5}{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\sin(2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5}$:

$$\sin(2\alpha)\cdot\frac{\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{5} - \cos(2\alpha)\cdot\frac{2\sqrt5}{5} \quad \Big| : \frac{\sqrt5}{5}$$

$$\sin(2\alpha) = -1 - 2\cos(2\alpha)$$

$$\sin^2(2\alpha) = 1 + 4\cos^2(2\alpha) + 4\cos(2\alpha)$$

$$1-\cos^2(2\alpha) = 1 + 4\cos(2\alpha) + 4\cos^2(2\alpha)$$

$$5\cos^2(2\alpha) + 4\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}. \end{array}\right.$$

$\cos(2\alpha)=0$: $\sin(2\alpha) = -1-2\cdot 0 = -1$ – подходит.

$\cos(2\alpha) = -\frac{4}{5}$: $\sin(2\alpha) = -1-2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$ – подходит.

№ 5.

$f(1\cdot b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = f(b) - f(b) = 0.$

$f(1) = f(\frac{1}{a}) + f(a) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = \underset{0}{\underbrace{f(1)}} - f(a) = -f(a)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Количество пар?

Запишем таблицу $f(k)$ для $k \in [2; 25]$:

k	f(k)	Как получено
2	0	$[\frac{2}{4}] = 0$
3	0	$[\frac{3}{4}] = 0$
4	0	$f(4) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$
5	1	$[\frac{5}{4}] = 1$
6	0	$f(6) = f(2) + f(3) = 0 + 0 = 0$
7	1	$[\frac{7}{4}] = 1$
8	0	$f(8) = f(2) + f(4) = 0 + 0 = 0$
9	0	$f(9) = f(3) + f(3) = 0 + 0 = 0$
10	1	$f(10) = f(2) + f(5) = 0 + 1 = 1$
11	2	$[\frac{11}{4}] = 2$
12	0	$f(12) = f(3) + f(4) = 0 + 0 = 0$
13	3	$[\frac{13}{4}] = 3$
14	1	$f(14) = f(2) + f(7) = 0 + 1 = 1$
15	1	$f(15) = f(3) + f(5) = 0 + 1 = 1$
16	0	$f(16) = f(2) + f(8) = 0 + 0 = 0$
17	4	$[\frac{17}{4}] = 4$
18	0	$f(18) = f(2) + f(9) = 0 + 0$
19	4	$[\frac{19}{4}] = 4$
20	1	$f(20) = f(4) + f(5) = 0 + 1 = 1$
21	1	$f(21) = f(3) + f(7) = 0 + 1 = 1$
22	2	$f(22) = f(2) + f(11) = 0 + 2 = 2$
23	5	$[\frac{23}{4}] = 5$
24	0	$f(24) = f(4) + f(6) = 0 + 0 = 0$
25	2	$f(25) = f(5) + f(5) = 1 + 1 = 2$

Количество каждого значения:

$f(k) = 0$: 10

$f(k) = 1$: 7

$f(k) = 2$: 3

$f(k) = 3$: 1

$f(k) = 4$: 2

$f(k) = 5$: 1

Если $f(x) = 5$, то подходящих y 0.

Если $f(x) = 4$, то подх. y 1.

Если $f(x) = 3$, то подходящих y 3 ($f(y) = 4$ и $f(y) = 5$).

Если $f(x) = 2$: $1 + 2 + 1 = 4$

Если $f(x) = 1$: $3 + 1 + 2 + 1 = 7$

Если $f(x) = 0$: $7 + 3 + 1 + 2 + 1 = 14$.

Итого: $0 + 1 + 3 + 4 + 7 + 14 = 29$.

Ответ: 29.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

ОДЗ: $(x-6)(2y-1)\geq 0$

1) $x-6>0$:

Пусть $\sqrt{x-6}=a$. Т.к. $(x-6)(2y-1)\geq 0$ и $(x-6)>0$, то $(2y-1)\geq 0$.

Пусть $\sqrt{2y-1}=b$. $a>0, b\geq 0$

$$\begin{cases} a^2-6b^2=ab \\ a^4+9b^4=90 \end{cases} \begin{cases} a^2-ab-6b^2=0 \\ a^4+9b^4=90 \end{cases} \begin{cases} a^2-3ab+2ab-6b^2=0 \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-3b)(a+2b)=0 \\ a^4+9b^4=90 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=-2b \end{array}\right. \\ \cancel{b=\sqrt[4]{\frac{90-a^4}{9}}} \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$$, но т.к. $b\geq 0$, то $-2b\leq 0$, но $a>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a\neq -2b$

$$\begin{cases} a=3b \\ 90b^4=90 \end{cases} \begin{cases} a=3b \\ b^4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \text{(т.к. } b\geq 0) \begin{cases} \sqrt{x-6}=3 \\ \sqrt{2y-1}=1 \end{cases} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$$

Из первого случая мы получили, что $(15; 1)$ – подходит.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

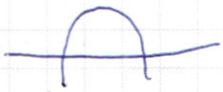
№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \quad \text{для всех} \quad x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b & (1) \\ ax+b \le -32x^2+36x-3 & (2) \end{cases}$$

Разберёмся с (2):

$$-32x^2 + x(36-a) - (b+3) \ge 0$$

Парабола выглядит так: 

Чтобы (2) выполнялось на $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$, достаточно проверить, чтобы выполнялось для точек $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$:

$$\begin{cases} -32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot (36-a) - (b+3) \ge 0 \\ -32 \cdot 1 + 1 \cdot (36-a) - (b+3) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 + 9 - \frac{1}{4}a - b - 3 \ge 0 \\ -32 + 36 - a - b - 3 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{4}a - b + 4 \ge 0 \\ -a - b + 1 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -a - 4b + 16 \ge 0 \\ a \le 1-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le 16-4b \\ a \le 1-b \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x-6=0$:

$\begin{cases} 6-12y=0 \\ 9(2y-1)^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ 9\cdot 0^2=90 \end{cases}$ — неверно $\Rightarrow x=6$ — не подходит.

3) $x-6<0$:

Т.к. $x-6<0$, то $6-x>0$.

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(6-x)(1-2y)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

Пусть $a=\sqrt{6-x}$. Т.к. $(6-x)(1-2y)\geq 0$ и $(6-x)>0$, то $1-2y\geq 0$.

Пусть $b=\sqrt{1-2y}$. $a>0$, $b\geq 0$

$\begin{cases} 6b^2-a^2=ab \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+ab-6b^2=0 \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+3ab-2ab-6b^2=0 \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$

$\begin{cases} (a+3b)(a-2b)=0 \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-3b \end{array}\right. \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$, но т.к. $b\geq 0$, то $-3b\leq 0$, но $a>0 \Rightarrow a\neq -3b$

$\begin{cases} a=2b \\ 25b^4=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2\sqrt[4]{\frac{18}{5}} \\ b=\sqrt[4]{\frac{18}{5}} \end{cases}$ $\begin{cases} 6-x=4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ 1-2y=\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=6-4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ y=\frac{1-\sqrt{\frac{18}{5}}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=6-\frac{4\sqrt{90}}{5} \\ y=\frac{5-\sqrt{90}}{10} \end{cases}$

Из 3-го случая мы получили, что $\left(6-\frac{4\sqrt{90}}{5}; \frac{5-\sqrt{90}}{10}\right)$ — подходит.

Ответ: $\left\{(15;1); \left(6-\frac{4\sqrt{90}}{5}; \frac{5-\sqrt{90}}{10}\right)\right\}$.

$\sin(2\beta) = -\frac{\sqrt{20}}{5}$:

$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{20}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha - 1$

$\sin^2 2\alpha = 4\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 1$

$1 - \cos^2 2\alpha = 4\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 1$

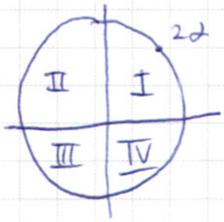
$5\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = \frac{4}{5} \end{array}\right.$

$\cos(2\alpha) = 0$: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ — подходит, тогда ~~ОДЗ~~

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

но уже рассмотрено.

$\cos(2\alpha) = \frac{4}{5}$: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$



$\cos 2\alpha > 0$ и $\sin 2\alpha > 0 \Rightarrow 2\alpha$ лежит в I четв.

$\Rightarrow 2\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi k$

$tg(2\alpha) = \frac{2 tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ~~8~~ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

(2):

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} : \left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) = \frac{\sqrt5}{5}.$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos(2\beta) = \frac{\sqrt5}{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5} \\ \cos(2\beta) = \frac{\sqrt5}{5} \\ \left[\begin{array}{l} \sin(2\beta) = \frac{\sqrt{20}}{5} \\ \sin(2\beta) = -\frac{\sqrt{20}}{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\sin(2\beta) = \frac{\sqrt{20}}{5}$:

$$\sin 2\alpha = -1 - 2\cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\alpha = 1 + 4\cos 2\alpha + 4\cos^2 2\alpha$$

$$1-\cos^2 2\alpha = 1 + 4\cos 2\alpha + 4\cos^2 2\alpha$$

$$5\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \\ \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi k \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

$$\left(4b + \frac{4}{4x-5}\right)' = \frac{-(4x-5)' \cdot 4}{(4x-5)^2} = -\frac{16}{(4x-5)^2}$$

$$k = -\frac{16}{(4x-5)^2}$$

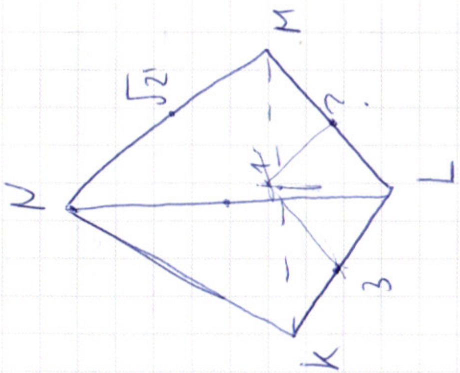
$$b = 4b + \frac{4}{4x_0-5} + \frac{16x_0}{(4x_0-5)^2} = 0$$

$$(4-b)(4x_0-5)^2 + 4(4x_0-5) + 16x_0 = 0$$

$$(4-b)(16x_0^2 - 40x_0 + 25) + 16x_0 - 20 + 16x_0 = 0$$

$$16(4-b) \cdot x_0^2 + x_0 \cdot (32 + (b-4) \cdot 40) + ((4-b) \cdot 25 - 20)$$

$$x_0 = -32 + (4-b) \cdot 40$$



$$\log_e 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 e}$$

$$5^c \cdot \log_3 5 - 3^c - 4^c \cdot \log_3 4$$

$$(5^c - 3^c - 4^c)' = 5^c \cdot \ln 5 - 3^c \cdot \ln 3 - 4^c \cdot \ln 4$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$ $\quad f(2,5)=1$

$f(2)=0$

$f(b)= f(a)+f(b)$

$f(3)=0$

$f(4)=4$

$f(1)$

$f(5)=1$

$16x-16-4ax^2+5ax+4bx-5b\geq 0$

$f(6)=0$

$f(2\cdot 2)=$

$f(y)=1$

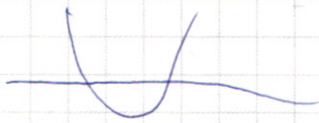
$-4ax^2+x(16+5a+4b)-(16+5b)\geq 0$

$f(11)=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(13)=3$

$f(5)=f(2,5)+f(2)$



$1 \quad 1 \quad 0$

$1-\cancel{\cos}^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos 2\alpha$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$\frac{16x-16-4ax^2+5ax+4bx-5b}{4x-5}\leq 0$

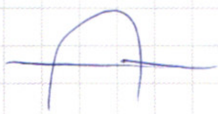
$f(1)=f(y)+f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(\frac{1}{y})=f(1)-f(y)$

$f(\frac{1}{y})=-f(y)$

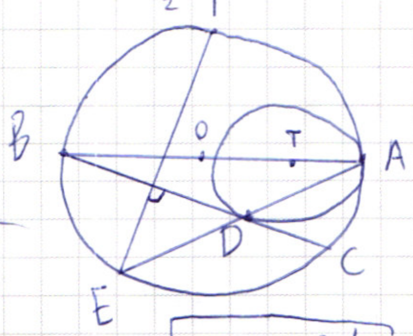
$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

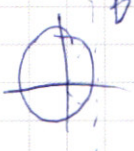
$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}}$

$f(x)-f(y)<0$



$f(x)<f(y)$





$-\frac{32}{16}+\frac{1}{4}\cdot(36-a)$

$-32x^2+x(36-a)-(b+3)\geq 0$

$x=\frac{a-36\pm\sqrt{(a^2-72a+36^2-128b-384}}{}$

$16-4b \vee 1-b$

$15 \vee 3b \qquad 5\vee b$

$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos(4\beta) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,5}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot (\cos(4\beta) + 1) + \cos 2\alpha \cdot \sin(4\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}+5}{5} +$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$

$\cos(2\beta) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{10}}$

$16x - 16 = 4ax^2 + 4bx - 5ax + 5b$

$4ax^2 + x(4b - 5a - 16) - 5b + 16 = 0$

$x = \frac{5a + 16 - 4b \pm \sqrt{\ }}{}$

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\frac{4^c}{2^c} = \frac{2^c \cdot 2^c}{2^c}$

$10x - x^2 > 0$

$2 \geq \log_2 5$

$2^c \geq 3{,}5^c + 1{,}5^c$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\frac{(2^{\log_2 3})^c}{2^c}$

$10x - x^2 > 0$ $\quad x \in (0; 10)$

$x(10 - x) > 0$

$-25 + 50 = 25$

$-x^2 + 10x$

$\frac{1}{5} + 6$

$2 \geq \frac{5^c}{2^c} - \frac{3^c}{2^c}$

$f(\frac{6}{5}) = -1$

$-$ $+$ $-$, 0, 10, x

$\frac{-10}{-2} = 5$

$f(6) = 0$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$f(5 \cdot \frac{6}{5})$

$10x - x^2 = t, \ t > 0, \ t \leq 25$

$(3^c + 4^c - 5^c)' = 3^c \ln 3 + 4^c \ln 4 -$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$- 5^c \ln 5$

$\log_3 t = c$

$3^c + 4^c \geq 5^c$

$3^c + (3^c)^{\log_3 4} \geq 5^c$

$4^c \geq (4+1)^c - (4-1)^c$

$\log_5(3^c + 4^c) \geq c$

$2 \geq 2^c \cdot (\ldots)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha + \sin\beta$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\alpha+\beta = x \qquad \alpha = \frac{x+y}{2}$

$\alpha-\beta = y \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(4\beta) = -\frac{1}{5}$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \vee \frac{1}{5}$

$\frac{20}{60} + \frac{15}{60} \vee 12 \qquad \cos(4\beta) = -\frac{1}{5} : \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$t^2 - tp - 6p^2 = 0$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$t = \frac{p \pm \sqrt{p^2+24p^2}}{2}$

$(x^2 - 12x + 36) + (36y^2 - 36y + 9) = 90$

$t = \frac{p \pm 5p}{2}$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$t = \left[\begin{array}{l} 3p \\ -2p \end{array}\right.$

$\sqrt{x-6} = t$

$\sqrt{2y(x-6) - (x-6)} = x - 12y \qquad \sqrt{2y-1} = p$

$\sqrt{(x-6)(2y-1)} = x - 12y$

$\begin{cases} tp = t^2 - 6p^2 \\ t^4 + 9p^4 = 90 \end{cases}$

$-x^2 + 10x$

25

$3^c + 4^c \geq 2\cdot 12^{\frac{c}{2}}$

$5 + 4\sqrt{5} \vee 5$

$\sqrt{3^2 + 4^2} \vee \sqrt{5}$

$3\cdot 5^c = 3^c\cdot 9 + 4^c\cdot 16$

$3\cdot(3^c + 4^c) \leq 3\cdot 5^c$

$3\cdot 3^c + 4\cdot 4^c \vee 5\cdot 5^c$

$3\cdot(3^c + 4^c) + 4^c \vee 5\cdot 5^c$

$3^c + 4^c = 5^c$