МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

Решим первое ур-ние: $\begin{cases} y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \\ y-6x\geq 0 \longrightarrow y\geq 6x \end{cases}$

$$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$$

$$y^2-y(13x-1)+(36x^2+6x-6)=0$$

$$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=$$

$$=25(x^2-2x+1)=(5(x-1))^2$$

$y_1=\dfrac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3$ $\qquad$ $y_2=\dfrac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2$

$9x-3\geq 6x$ $\qquad$ $4x+2\geq 6x$

$3x\geq 3$ $\qquad$ $2\geq 2x$

$x\geq 1$ $\qquad$ $x\leq 1$

$\Rightarrow$ при $x>1$ $\quad y=9x-3$; при $x<1$ $\quad y=4x+2$;

при $x=1$ - корни совпадают, $y=6$

Подставим найденные значения y во второе ур-ние:

1) $x>1: 9x^2+81x^2-54x+9-18x-108x+36=45$

$$90x^2-180x=0$$

$90x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \not> 1 \Rightarrow$ не подходит

$x=2 \Rightarrow y=9\cdot 2-3=15$

2) $x=1 \Rightarrow y=6$: $9+36-18-72=45$, но $-45\neq 45 \Rightarrow$ нет реш.

3) $x<1 \Rightarrow 9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24=45$

$$(9x^2-18x+9)+(16x^2-32x+16)=90$$

$$9(x^2-2x+1)+16(x^2-2x+1)=90$$

$25(x-1)^2 = 90$

$5(x-1)^2 = 18 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ x-1 = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$

$x = 1 + \frac{3\sqrt{10}}{5} > 1 \Rightarrow$ не подходит

$x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow y = 4 - \frac{12\sqrt{10}}{5} + 2 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$

Ответ: $(2; 15)$, ~~(1;6)~~ $\left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}; 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

N3.

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

ОДЗ: $\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ |x^2 - 26x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 26x < 0 \\ x^2 - 26x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-26) < 0 \\ x(x-26) \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (0; 26)$

Пусть у нас есть $\log_b c$, где $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$

$\log_b c = \log_e c$

Воспользуемся св-вом логарифмов о новом основании: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a$ (т.к. по св-ву $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$)

$a > 0$, $a \neq 1$; Возведём a в эти степени

по св-ву: $a^{\log_b c} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_b a}$

по основному лог. тожд.: $a^{\log_a c} = c$

$\Rightarrow a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\Rightarrow$ Если $26x - x^2 \neq 1$ и по ОДЗ $26x - x^2 > 0$, то

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq (26x - x^2)^{\log_5 13}$

$26x - x^2 > 0 \Rightarrow$ модуль раскрываем со знаком "–"

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + (26x - x^2) - (26x - x^2)^{\log_5 13} \geq 0$

$26x - x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 26x + 1 > 0$

$D = 676 - 4 = 672 = (4\sqrt{42})^2 \Rightarrow x = \frac{26 \pm 4\sqrt{42}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{42}$

на ОДЗ

$\Rightarrow x \in (0; 13 - 2\sqrt{42}) \cup (13 + 2\sqrt{42}; 26) \rightarrow$ ф-ция

$13 - 2\sqrt{42} \vee 0$

$169 > 168$

$13 + 2\sqrt{42} \vee 26$

$2\sqrt{42} \vee 13$

$168 < 169$

$(26x - x^2)^a$ – возр.

$\Rightarrow$ при $x \in (13 - 2\sqrt{42}; 13 + 2\sqrt{42})$ – убыв (по т. Пиф.) $= 12\sqrt{26}$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (по св-ву ∩ хорд)

$DE = \frac{13 \cdot 12}{12\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$AE = AD + DE = \frac{24\sqrt{26}}{2} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{25\sqrt{26}}{2.}$

$\angle AFB$ опир. на диам. $AB \Rightarrow \angle AFB = 90°$ (по св-ву)

$\Rightarrow \sin\angle EBA = \frac{AE}{AB}$ (по опр) $= \frac{\frac{25\sqrt{26}}{2}}{2 \cdot 65}$ ~~$=$~~ $= \frac{5\sqrt{26}}{26}$

$\angle EBA = \angle EFA$ (опир. на $\breve{AE}$) $\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$

$\sin\angle EBD = \frac{ED}{BD}$ (по опр) $= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2} \cdot 13} = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos\angle EBD = \sqrt{1 - \frac{1}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\cos\angle EBD = \frac{BE}{BD} \underset{\text{(по опр)}}{\Rightarrow} BE = 13 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{2.}$ (по осн. триг. тожд.)

$EC^2 = BE^2 + BC^2 - 2BE \cdot BC \cdot \cos\angle EBD$ (по т. кос.)

$EC^2 = \frac{25 \cdot 26}{4} + 25^2 - 2 \cdot \frac{5\sqrt{26}}{2} \cdot 25 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{25 \cdot 13}{2} \Rightarrow EC = BE = AF$

Пусть $BC \cap FE = M$

$EM \perp BC$ (по усл.) $\Rightarrow EM$ - выс. $\triangle BEC$

$\triangle BEC$ - р/б (по опр)

$\Rightarrow EM$ - мед. (по св-ву р/б $\triangle$)

$\Rightarrow BM = MC = \frac{25}{2} \Rightarrow EM = \sqrt{EC^2 - MC^2}$ (по т. Пиф.) $= \sqrt{\frac{25 \cdot 13}{2} - \frac{25^2}{4}}$
$= \sqrt{\frac{25}{2}\left(13 - \frac{25}{2}\right)} = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$

$EM \cdot MF = BM \cdot MC$ (по св-ву ∩ хорд) $\Rightarrow FM = \frac{BM^2}{EM} =$ ~~[illegible]~~

$FM = \frac{25^2 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{5^3}{2} = \frac{125}{2} = 62{,}5$

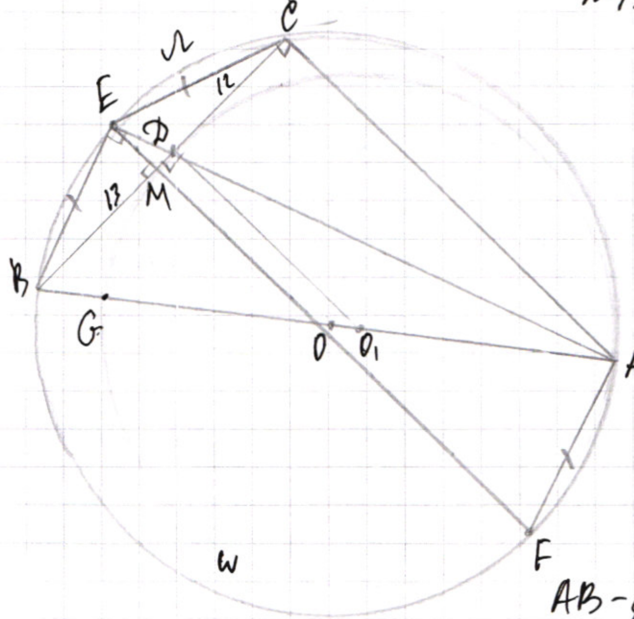
$FE = FM + ME = 62{,}5 + 2{,}5 = 65$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot FE \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot 65 \cdot \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = \frac{65 \cdot 25}{4} = 406{,}25$

Ответ: $R = 32{,}5$; $r = 31{,}2$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$; $S_{AFE} = 406{,}25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Пусть O – центр Ω, O_1 – центр ω

Пусть $AB \cap \omega = G$

Пусть $AO_1 = O_1G = O_1D = r$,

$AO = OB = R$.

~~BG~~ BD – касат. к ω (по усл)

$\Rightarrow BD^2 = BG \cdot BA$ (по св-ву кас.)

$169 = (2R - 2r) \cdot 2R = 4R(R-r)$

AB – диам. $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ (по св-ву, т.к. опир. на диам.)

$AC \perp BC$ (по опр. $\perp$)
$O_1D \perp BD$ (по св-ву кас.) $\Big| \Rightarrow AC \parallel O_1D$ (по св-ву $\perp$ пр.)

$\angle BDO_1 = \angle BCA$
$\angle CBA$ – общ. $\Big| \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ (по $2\angle$) $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{AB}$

(по опр. подобных $\triangle$) $\Rightarrow \frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$\Rightarrow 26R = 50R - 25r \Rightarrow 25r = 24R \Rightarrow R = \frac{25}{24}r$

$\Rightarrow 169 = 4 \cdot \frac{25}{24}r\left(\frac{25}{24}r - r\right) = \frac{25}{6}r^2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{25}{144}r^2 = \left(\frac{5}{12}r\right)^2$

$\Rightarrow 13 = \frac{5}{12}r \Rightarrow r = \frac{156}{5}$ ~~r~~ $= 31{,}2$

$\Rightarrow R = \frac{25}{24} \cdot \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$

$AC \perp BC$ (см. выше)
$EF \perp BC$ (по усл.) $\Big| \Rightarrow AC \parallel EF$ (по св-ву $\perp$ пр.) $\Big| \Rightarrow ACEF$ – трап. (по опр)
$ACEF$ – впис. (по опр.)

$\Rightarrow ACEF$ – р/б трап. (по призн.) $\Rightarrow CE = AF$ (по опр.)

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$ (по т. Пиф.) $= \sqrt{65^2 - 25^2} = 60 \Rightarrow AD = \sqrt{DC^2 + AC^2}$

N1.

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}\end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad 2\beta=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\\ 2\alpha+2\beta=\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}2\alpha=-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\\ 2\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\\ 2\alpha=-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\\ 2\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$$

$$tg^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \Rightarrow tg\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

1) $\cos 2\alpha=\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot\cos(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})+\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot \times$

$\times\ \sin(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})$

$\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}=\beta \Rightarrow \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}}=0 \Rightarrow tg\,\alpha=\pm 1$

2) $\cos 2\alpha=\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot\cos(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})-\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot\sin(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})$

$=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}}=\frac{8}{17}$

$\Rightarrow tg\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{\frac{9}{17}}{\frac{25}{17}}}=\pm\frac{3}{5}$

3) $\cos 2\alpha=\cos(\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})\cdot\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})+\sin(\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})\cdot$

$\cdot\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})=$

$=-\cos(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\sin(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=$

$=-\frac{4}{17}-\frac{4}{17}=\frac{-8}{17}$

$\Rightarrow tg\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

4) $\cos 2\alpha=\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot\cos(\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})-\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})\cdot\sin(\pi-\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})$

$=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})-\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin(\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}})=0$

$\Rightarrow tg\,\alpha=\pm 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$~~

~~$2\sin(2\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$~~

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-1}{17} \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos 2\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{17} \Rightarrow \underline{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

1) $2\beta \in I$ ч $\Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$-\frac{15}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

~~$\frac{18}{17}$~~ $\frac{2}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17}\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + 4) + \cos 2\alpha($

~~$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sqrt{17}(\sin 2\alpha \cdot \sin\varphi$~~

$2\alpha + 2\beta = \arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha = -\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\left(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)}{\cos\left(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)}$

$\operatorname{tg}\alpha = \sin(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$F'(x) = \log_5 12\cdot(26x - x$~~

$F'(x) = (26-2x)\left(\log_5 12\,(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}} + 1 - \log_5 13\,(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}\right)$

$\frac{17-\sqrt{65}}{17} \vee \frac{1}{3}$

$17-\sqrt{65} \vee 4.$

$13 > \sqrt{65}$

$\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{y-2}{-4}.$

$y = \frac{3(-4x+\frac{8}{3})}{4} + 2$

$y = \frac{-12x+8}{4} + 2$

$= -3x+4$

$ax + b$

$a(x + \frac{b}{a})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $tg\alpha \in \{-\frac{5}{3}; -1; -\frac{3}{5}; \frac{3}{5}; 1; \frac{5}{3}\}$

№6.

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

верно $\forall x \in (\frac{2}{3}; 2]$

$$-2+\frac{4}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-57x+28$$

$y = \frac{4}{3x-2} - 2$ – гипербола

x	1	2	3	0	-1	-2
y	2	-1	$-1\frac{3}{7}$	-4	-2,8	-2,5

$y = 18x^2-57x+28$ – парабола, ветви вверх

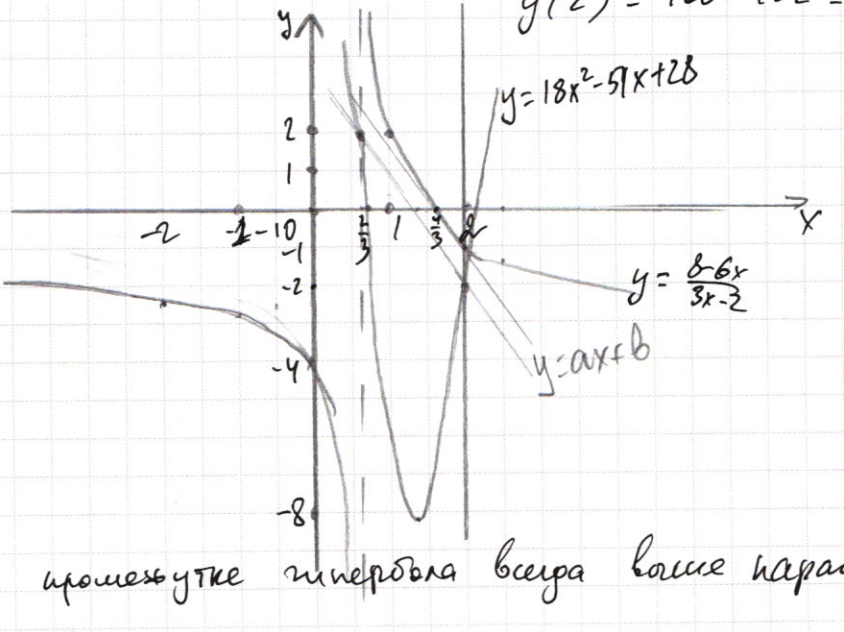
$$x_B = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

$$y_B = 18\cdot\frac{17^2}{12^2} - 3\cdot\frac{17^2}{12} + 28 = -\frac{17^2}{8} + 28 = \frac{224-289}{8} = -\frac{65}{8}$$

x	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{12}$	2	3
y	28	2	$-8\frac{1}{8}$	-2	

$y(\frac{2}{3}) = 18\cdot\frac{4}{9} - 57\cdot\frac{2}{3} + 28 = 2$

$y(2) = 100 - 102 = -2$



На указанном промежутке гипербола всегда выше параболы

$$18x^2-57x+28=0$$

$$D = 2601-2016 = 585 = (3\sqrt{65})^2$$

$$x = \frac{51 \pm 3\sqrt{65}}{36} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{12}$$

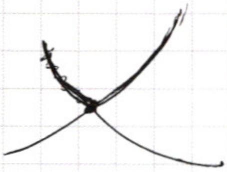
$$x < 1 \Rightarrow x = \frac{17-\sqrt{65}}{12}$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geqslant 0.$

$\underbrace{t^{\log_5 12}}_{\text{возр.}} \geqslant \underbrace{t^{\log_5 13} - t}_{\text{убыв.}}$

если $t > 1.$



$t^{\log_5 12} = t^{\log_5 13} - t.$

~~$t \geq 1$~~ ~~lo~~ ~~$\log_5 t \cdot \log_5$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = ax+b = a\left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)$ − пучок прямых, проходящих через точку $\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$

Чтобы нер-во вып. $\forall x \in \left(\frac{2}{3};\ 2\right]$: $-\frac{b}{a} \in \left[\frac{17-\sqrt{65}}{12};\ \frac{4}{3}\right]$.

$\forall x \Rightarrow$ нижняя прямая проходит через $\left(\frac{2}{3};2\right)$ и $(2;-2)$

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{2-\frac{2}{3}} = \frac{y-2}{-2-2}$$

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{y-2}{-4}$$

$$-(3x-2) = y-2 \Rightarrow y = 4-3x \Rightarrow a=-3,\ b=4$$

$-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3} \rightarrow$ входит в промеж.

Касат. к гиперболе в т. $\frac{4}{3}$:

$$y_{кас} = \frac{4}{2} - 2 + y'\left(\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right) = y'\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

$$y'(x) = \left(\frac{8-6x}{3x-2}\right)' = \frac{-6(3x-2)-(8-6x)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-12}{(3x-2)^2} \Rightarrow y'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-12}{(4-2)^2} = -3.$$

$y_{кас} = -3x+4$ — та же прямая

Ответ: $a=-3,\ b=4$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}+1-t^{\log_5\frac{13}{5}}\geqslant 0.$

$t^{\log_5\frac{12}{15}}+1\geqslant t^{\log_5\frac{13}{5}}.$

$3744 \mid 4$
$936 \mid 4$
$234 \mid 2$
$117 \mid 9$
$13 \mid 13$
$1 \mid$

$4^2\cdot 3^2\cdot 26$

$AB=2R=65.$

$AC=\sqrt{65^2-25^2}=\sqrt{40\cdot 90}=60$

$AD=\sqrt{144+3600}=\sqrt{3744}=(12\sqrt{26})^2$

$AD\cdot DE=BD\cdot DC=13\cdot 12.$

$DE=\frac{13\cdot 12}{12\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{13}{2}}.$

$\cos\angle EBD=\sqrt{1-\frac{1}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin\angle EBD=\frac{\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}\cdot 13}}{}=\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{26}}{26}$

$BE^2=\cancel{AB}\,65^2-\frac{25^2\cdot \cancel{26}13}{\cancel{2}}=\frac{25\cdot 13^2\cdot 2-25^2\cdot 13}{2}=\frac{25\cdot 13}{2}(26-25)=\frac{5^2\cdot 13}{2}$

$BE=\cancel{5}\,\frac{5\sqrt{26}}{2}$

$EC^2=\frac{25\cdot 13}{2}+25^2-25\sqrt{26}\cdot 25=\frac{25\cdot 13}{2}=BE^2$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

~~$\frac{1}{2}h\cdot EF+\frac{1}{2}h\cdot AC$~~ $\frac{S_\Delta}{S_{тр}}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot EF}{\frac{1}{2}h(EF+AC)}=\frac{EF}{EF+AC}.$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$BM=\frac{25}{2}$

$EM=\sqrt{\frac{25\cdot 13}{2}-\frac{25^2}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}\left(13-\frac{25}{2}\right)}=\sqrt{\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))=\cos\alpha\cos$

$\frac{6500}{16}=\frac{3250}{8}=\frac{1625}{4}=406{,}25$

FM

$\frac{65\cdot 25}{4}=\frac{6500}{16}$

~~6500~~

$\mathrm{tg}\,\alpha=$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

62
×25
310
124
1550 | 4
−12 | 387
35
−32
30
−28
2

65
×25
325
130
1625 | 4
−16 | 406
25

6500 | 16
−64 | 406
100
−96
4

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha.$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(4\alpha+4\beta)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{-2}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{17}$

$\cancel{2}(\cos(2\beta+4\alpha)+\cos 2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta(\cos 4\alpha+1)+\sin 2\beta\cdot\sin 2\alpha-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha)\cos(2\beta+2\alpha)=\frac{-1}{\sqrt{17}}\Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{8-6x-(3x-2)(18x^2-57x+28)}{3x-2}\geq 0.$$

$$\frac{8-6x-(54x^3-153x^2+84x-36x^2+102x-56)}{3x-2}\geq 0.$$

$$\frac{-54x^3+189x^2-192x+64}{3x-2}\geq 0.$$

189
-36
$153 \div \cancel{3} = 3 = 51$
$102.$

$\frac{-59\cdot 2}{3}$
$\frac{-177\cdot 2}{9} = \frac{-118}{3}$

$$\frac{54x^3-189x^2+192x-64}{3x-2}\leq 0.$$

$72-189=-117.$ $\frac{117}{3}=39$ $39\cdot 4=156$ $192-156=36.$

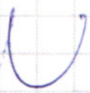
$\frac{171}{3}=57.$ $192-57=135.$ $\frac{135}{3}=45.$

8 $\cancel{4}\,\cancel{100}-102=-2.$

$162 \mid 6$
$-12 \quad 27.$
42

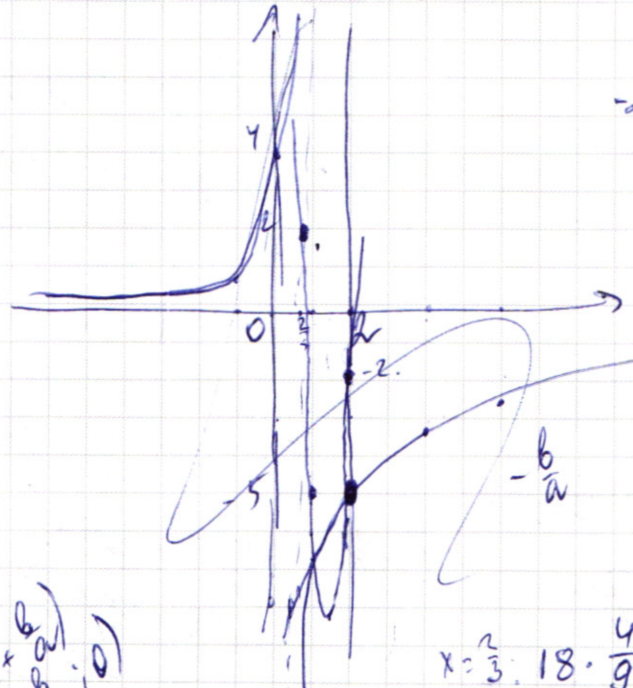
	54	−189	192	−64
2	54	−81	30	
4	54	27.	300	
$\frac{2}{3}$	54	−153	90.	−4.
$\frac{2}{9}$	54	−177.		
$\frac{4}{3}$	54.	−117	36.	−16.
$\frac{1}{3}$	54.	−171	135.	−19.
$\frac{1}{6}$	54	−180	162.	
$\frac{16}{9}$				

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-\cancel{51}x+28.$$



$$-\left(\frac{6x+8}{3x-2}\right)=-\left(2+\frac{12}{3x-2}\right)$$

$$-2-\frac{12}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$



$18\cdot\frac{4}{9}-57\cdot\frac{2}{3}+28=36-34=2.$

$-2-\frac{12}{3x-2}.$

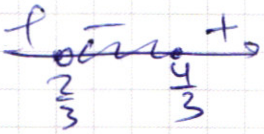
x	2	4	6	0	−2	−1
y	−5	−3,2	−2,75	4	$-\frac{1}{2}$	0,4

~~$-2+\frac{12}{-14}$~~ ~~$2+\frac{12}{31}$~~

$\frac{8-6x}{3x-2}\geq 0.$

$\frac{4-3x}{3x-2}\geq 0$

$\frac{3x-4}{3x-2}\leq 0$



$18+28-57=-5.$

$-2.$

$\frac{51}{36}=\frac{17}{12}.$

$y_в = 18\cdot\frac{17^2}{12^2}-17\cdot\cancel{3}\frac{17}{\cancel{12}}+28$

$x=\frac{2}{3}.\ 18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=2.$ $\frac{18}{144}\cdot 17^2-\frac{1}{4}\cdot 17^2+28.$

$-\frac{17^2}{8}+28.$

$\frac{-289+224}{8}=\frac{-65}{8}=-8\frac{1}{8}.$

$y=a(x+\frac{b}{a})$
через $(-\frac{b}{a};0)$

$y\in(\ \ ;2)$

$ax+b=18x^2-51x+28$ $36.$

$2\geq\ \ldots\ \geq -5.$

$\frac{8-6x}{3x-2}=\cancel{-2}\ (3x-2)(-2)=4-6x.$

$y=-2+\frac{4}{3x-2}.$

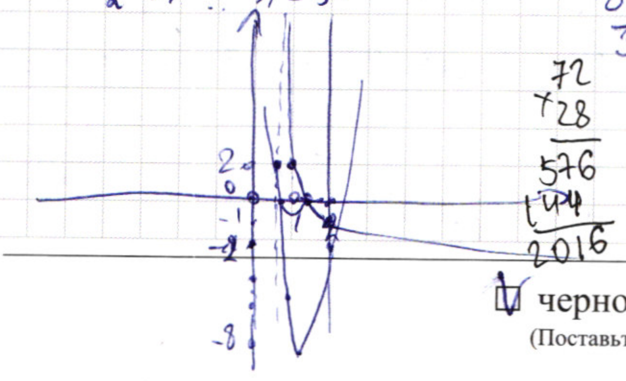
x	1	2	3
y	2	−1	−1

72
$\times 28$
576
144
2016

$585 \mid 5$
$-5 \quad 117$
8
-5
35

$117 \mid 9$
$-9 \quad 13$
27
-27
0

51
$\times 51$
51
255
2601



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$9x^2-18x$

Если $x<1$: $y=4x+2$.

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24=45$.

$25x^2-50x-65=0$.

$5x^2-10x-13=0$

$D=100+260=360=(6\sqrt{10})^2$

$x=\frac{50+6\sqrt{10}}{50}=1+\frac{3\sqrt{10}}{25}>1\to$ н.п.

$x=1-\frac{3\sqrt{10}}{25}\Rightarrow y=6-\frac{12\sqrt{10}}{25}$

$x\geq 1$: $y=9x-3$

$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}\geq 0$

$t(t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}+1)\geq 0$

≥ 0

$t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}\geq -1$

$t^{\log_5 12-1}(1-t^{\log_5 13-1-\log_5 12+1})\geq -1$

1020	2
510	2
255	5
51	3
17	17

$9x^2+81x^2-54x+9-18x-108x+24-45=0$

$90x^2-180x-12=0$

$15x^2-30x-2=0$

$D=900+120=1020=2\sqrt{255}^2$

$9x^2-18x+(y-6)^2-36=45$. $x=\frac{180-2\sqrt{255}}{180}=1-\frac{\sqrt{255}}{180}<1$

$y=4x+2$

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90$ $y-6=4x-4$ $=1+\frac{\sqrt{255}}{180}$ $y=6+\frac{\sqrt{255}}{20}>6$. v

$~~225~~(x-1)^2=~~30~~\ 18$

$25x^2-50x-65=0$.

$5x^2-10x-13=0$.

$D=100+260=360=(6\sqrt{10})^2$

$\begin{cases}x-1=3\sqrt{2} & x=1+3\sqrt{2}\\ x-1=-3\sqrt{2} & x=1-3\sqrt{2}.\end{cases}$ $9+36-18-72$ $=\frac{10\pm 6\sqrt{10}}{10}=1\pm\frac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$

$\begin{array}{r}26\\ \times 26\\ \hline 156\\ 52\\ \hline 676\end{array}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7

ОДЗ: $26x-x^2\geq 0$

$x(26-x)\geq 0\Rightarrow x\in[0;26]$

$26x-x^2\geq 0\Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$26x-x^2-1=0$

$x^2-26x+1=0$

$D=672=(4\sqrt{42})^2$

$x=\frac{26\pm 4\sqrt{42}}{2}=13\pm 2\sqrt{42}$.

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-(26x-x^2)^{\log_5 13}~~\geq 0~~+(26x-x^2)\geq 0$.

$(26x-x^2)\left((26x-x^2)^{\log_5 12-1}-(26x-x^2)^{\log_5 13-1}+1\right)\geq 0$.

$26x-x^2=t,\ t\geq 0$. $t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}\geq 0$.

~~$26x-x^2=1$~~ ~~$x^2-26x+1=0$~~ ~~$++++$~~

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$t\geq t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$.

возр. убыв.

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\log_a a^{\log_b c}=\log_a c^{\log_b a}$

$\log_b c=\log_b a\cdot\log_a c=\frac{\log_b a}{~~1~~}\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c$

$a^{\log_b c}=(a^{\log_a b})^{\log_b a}$

$t(t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}+t^0)\geq 0$

$\log_5$ ≥ 0.

$t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}\geq -1$.

$(t-1)(\log_5 12-1-\log_5 13+1)\vee 0$.

$(t-1)(\log_5 12-\log_5 13)\vee 0$

$(t-1)(5-1)(-1)\vee 0$

$t-1\wedge 0$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$tg\,\alpha$ - ?

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) \in$ IV ч. $\Rightarrow$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \cancel{+} \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}.$

$\cos\frac{\pi}{2}$

$\cos(2\beta-\varphi) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$

$\cos\varphi = \sin(\overset{\frac{\pi}{2}}{\cancel{90°}}-\varphi) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45\cancel{90} \end{cases}$$

$9(x^2-2x+1) + y^2-12y+36 = 90.$

$(3(x-1))^2 + (y-6)^2 = (3\sqrt{10})^2$

ОДЗ: $y(x-1)-6(x-1) \geq 0$

$(y-6)(x-1) \geq 0.$

1) $x \geq 1$, $y \geq 6.$

2) $x \leq 1$, $y \leq 6.$

~~$x^2-2x+1+\frac{1}{9}$~~ $O(1;6)$ $R = 3\sqrt{10}$

~~$8(x-1)^2+(x-1)^2+(y-6)^2$~~ $(3x-3)^2+(y-6)^2 = (3\sqrt{10})^2$

~~$y^2-12xy+36x^2$~~

$$\begin{cases} xy-6x-y+6 = y^2-12xy+36x^2 \\ y \geq 6x \end{cases}$$

$y^2-13xy+y+6x-6+36x^2 = 0$

$y^2 - y(13x-1) + 36x^2+6x-6 = 0$

$D = 169x^2-26x+1 - 144x^2-24x+24 = 25x^2-50x+25 =$

$= 25(x^2-2x+1) = (5(x-1))^2$

$y = \frac{13x-1+5x-5}{2} = 9x-3$

x	1	0
y	6	-3

$y = \frac{13x-1-5x+5}{2} = 4x+2.$

x	0	-1
y	2	-2

$9x-3 = 4x+2$

$5x = 5$

$x = 1$

$9x-3 \geq 6x.$

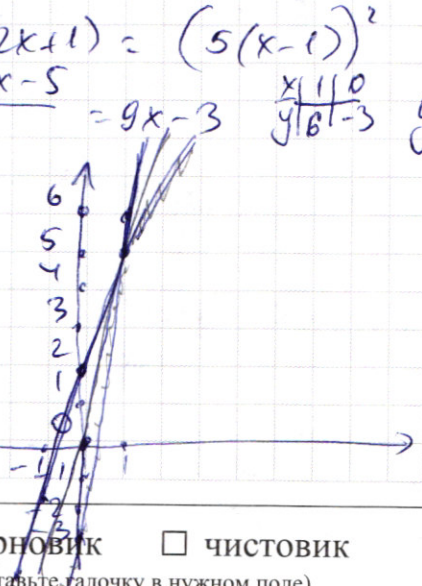
$3x \geq 3$

$x \geq 1.$

$4x+2 \geq 6x$

$2 \geq 2x$

$x \leq 1.$



$(26x-x^2)^{\log_5 12}\left(\cancel{(26x-x^2)}\,1-(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{12}}\right)$ $\cancel{?}\,26x-x^2 \geq 0.$

$\cancel{26x-x^2}$

$t^0 - t^{\log_5\frac{13}{12}} \vee 0.$

$(t-1)(-\frac{13}{12}) \vee 0$

$t-1 \wedge 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in (0; 26)$

1) $26x - x^2 > 1.$

$x^2 - 26x + 1 < 0.$ $\quad D = 672 = (4\sqrt{42})^2$

$x = \frac{26 \pm 4\sqrt{42}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{42}.$

$13 - 2\sqrt{42} < 0$

$13 + 2\sqrt{42} \vee 26$

$2\sqrt{42} \vee 13$

$4 \cdot 42 \vee 169$

$168 < 169$

при $x \in (0; 13 - 2\sqrt{42})$ $\quad 26x - x^2 > 1.$

$\Rightarrow (26x - x^2)^a$ – возр ф-ия

$t\,(t^{\log_5 12 - 1} - t^{\log_5 13 - 1} + 1) \geq 0$

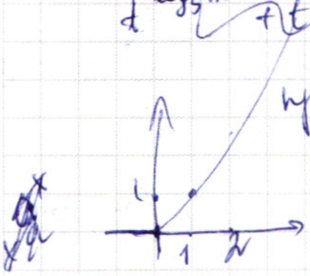
$t^{\log_5 12 - 1} - t^{\log_5 13 - 1} \geq -1$

$(\underset{>0}{t - 1})(\underbrace{\log_5 12 - \log_5 13}_{<0}) \vee 0$

$<.$

при $x \in [13 - 2\sqrt{42}; 26)$ $\quad 26x - x^2 < 1 \Rightarrow t(\ldots) > 0 \ \forall t \ldots$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$ $\quad t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13} - t$



при $x \in (0; 13 - 2\sqrt{42})$ $\quad t^a$ – возр

$\log_5 12 \cdot t^{\log_5 12 - 1} > 0$

$\log_5 13 \cdot t^{\log_5 13 - 1} - 1$

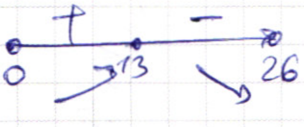
$t \geq t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12}.$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} + 1 \geq 0.$

$x = 13 \to$ т. max $<0.$

t – число $> 0.$

$\left((26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}}\right)' = \log_5 12 \cdot \underbrace{(26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}}}_{>0} \cdot (26 - 2x) = 0$



$F(x) = \ldots$

$F'(x) = \log_5 12\,(26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}}(26 - 2x) + (26 - 2x) - \log_5 13 \cdot (26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}}(26 - 2x)$

$= (26 - 2x)\left(\log_5 12 \cdot (26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}} - \log_5 13 \cdot (26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}} + 1\right)$

$= 0 : \ (\log_5 13)(26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}} = (\log_5 12)(26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} - (26x - x^2)^{\log_5 13}$ $\quad 13^{2\log_5 12} - 13^{2\log_5 13} + 13^2 \geq 0.$

13^2

$t^a + t \geq t^b.$

$\log_t (t^a + t) \geq \log_5 13.$

$y = -x^2 + 26x$

$y' = -2x + 26 \geq 0$

$x = 13$

$0 \nearrow 13 \searrow 26.$

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 13} \neq t.$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}.$

$t \in$ $\quad t_{min} = 0$

$t_{max} = \frac{13 \cdot 2 \cdot 13}{2 \cdot 13^2 - 13^2} = 169$

$M \in (0; 169 + 169^{\log_5 12}$

$t \in [0; 169]$

$t^{\log_5 13}$

$(0; 169^{\log_5 13}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad$ $4 \leq x, y \leq 28$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, p-простое. $\qquad$ $f(x/y) < 0.$

$f(x \cdot y^{-1}) = f(x) + f(y^{-1}) < 0.$

$f(5) = 2.$ $\qquad$ $f(23) = 6$

$f(7) = 2.$ $\qquad$ $f(2) = 1 \Rightarrow f(4) = f(2) + f(2) = 2.$

$f(11) = 3$

$f(13) = 4$ $\qquad$ ~~$f(\frac{x}{y}$~~ $\quad$ $f(x/y) < 0.$

$f(17) = 5$

$f(19) = 5$ $\qquad$ x, y - нат. $\Rightarrow f(x) > 0.$ $\quad$ $f(x) + f(y^{-1}) < 0$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \qquad \forall x \in (\frac{2}{3}; 2].$$

$x = 1:$ $\frac{8-6}{3-2} \geq a+b \geq 18-51+28$

$2 \geq a+b \geq -5.$

$x = 2:$ $\frac{8-12}{4} \geq 2a+b \geq 72+28-102 =$

$-1 \geq 2a+b \geq -2.$ $\qquad$ $2+a \geq 2a+b \geq -5+a$

~~$3a+2a$~~ $\geq -7.$

$x = \frac{3}{2}:$ $\frac{8-9}{\frac{9}{2}-2} \geq \frac{3}{2}a+b \geq \frac{81}{2} - \frac{153}{2} + 28 =$ ~~$\frac{86}{2} - \frac{72}{2}$~~ $28 - 36 = -8$

$\frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$ $\qquad$ $-\frac{2}{5} \geq \frac{3}{2}a + b \geq -8.$

$a+b = -5+k, \; k \geq 0$ $\qquad$ $-5+k \leq 2.$ $\qquad$ $k \in [0; 7].$

$k \leq 7.$

$b = -5+k-a$ $\qquad$ $2a+b = a-5+k$

$-1 \geq a-5+k \geq -2$

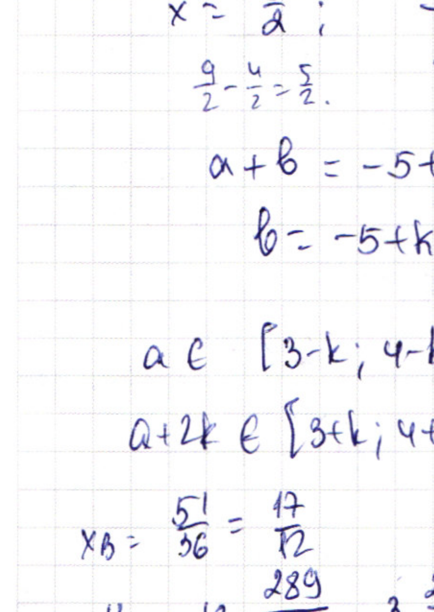
$a \in [3-k; 4-k].$ $\qquad$ $4 \geq a+k \geq 3.$

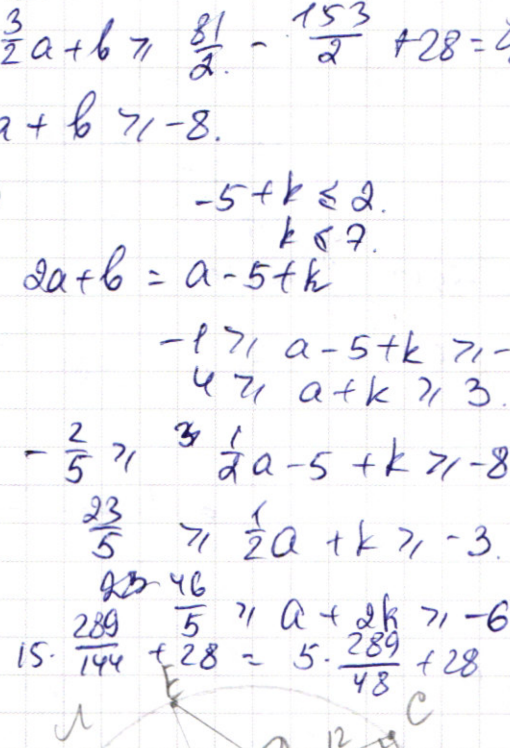
$a+2k \in [3+k; 4+k].$ $\qquad$ $-\frac{2}{5} \geq \frac{1}{2}a - 5 + k \geq -8.$

$\frac{23}{5} \geq \frac{1}{2}a + k \geq -3.$

$x_B = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$ $\qquad$ $\frac{46}{5} \geq a + 2k \geq -6.$

$y_B = 18 \cdot \frac{289}{144} - 3\frac{289}{144} + 28 = 15 \cdot \frac{289}{144} + 28 = 5 \cdot \frac{289}{48} + 28$





$169 = 2(R-r) \cdot 2R$

$169 = 4R(R-r)$

$AO_1 \parallel EF$

$169 + r^2 = (2R-r)^2$

$169 + r^2 = 4R^2 - 4Rr$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25}$

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r$

$R = \frac{25}{24}r$

$169 = \frac{25}{6}r \cdot \frac{1}{24}r$

$169 = \frac{5^2}{12^2}r^2$

$R = \frac{28^{5}}{12 \cdot 2} \cdot \frac{13 \cdot 12}{8} = \frac{65}{2} = 32{,}5$ $\qquad$ $13 = \frac{5}{12}r$ $\qquad$ $r = \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2.$