МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad tg\,\alpha - ?$$

Рассмотрим 2-ое уравнение: $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

Подставляем $\sin(2\alpha+2\beta)$ из первого равенства, получаем:

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| \cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \Rightarrow 2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \qquad 2\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$tg\,\alpha$ не сущ-ет при $\cos\alpha = 0$ $\qquad tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big|\cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin 2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = 0 \quad ; \quad \sin\alpha = -2\cos\alpha$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$tg\,\alpha = 0 \qquad tg\,\alpha = -2$

Ответ: $tg\,\alpha = -2; -\frac{1}{2}; 0$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

ОДЗ: $x-2y\geq 0$ $\Downarrow$ $x\geq 2y$

Замена: $x-2=a$ $a-2b=x-2-2y+2=x-2y$

$y-1=b$ $\Downarrow$

ОДЗ для a и b:
$$\begin{cases} a-2b\geq 0 \\ ab\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

Подставляем: $\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ При условии, что $a-2b\geq 0$ первое ур-ие возведем в квадрат: $\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$$

Приравняем два уравнения:
$$a^2-5ab+4b^2=a^2+9b^2-25$$
$$5b^2=25-5ab \Rightarrow b^2=5-ab \Rightarrow$$

$\Rightarrow a=\frac{5-b^2}{b}$. Подставим в первое уравнение: $\frac{5-b^2}{b}-2b=\sqrt{5-b^2}$

$\frac{5-3b^2}{b}=\sqrt{5-b^2} \Rightarrow \frac{5-3b^2}{b}\geq 0 \Rightarrow b\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right]\cup\left(0;\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$

Возведем в квадрат: получаем, что $2b^4-7b^2+5=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D=49-40=9 \Rightarrow b^2=\frac{7\pm 3}{4}=\frac{5}{2};\ 1 \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}};\ \pm 1$

$b=\sqrt{\frac{5}{2}}$ и $b=-1$ – не подходят по ОДЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ и $b=1 \Rightarrow a=\frac{5-1}{1}=5 \Rightarrow x=7$
$y=2$

$\Downarrow$

$a=\frac{5-\frac{5}{2}}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

при $y=2$ $x=6$
при $x=7$ решений нет

$y=1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ – не подходит, т.к. $xy<0$

$y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$ Ответ: $(6;2)$ $\left(2+\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$

$EH \cdot BD = BE \cdot ED$ в $\triangle BED$ ($\angle BEA = 90^\circ$ т.к опирается на диам)

$ED \cdot DA = AD \cdot DC = 17 \cdot 8 \Rightarrow ED = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$EA = ED + AD = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$BE^2 = \cancel{HE}\ 17^2 - \frac{9 \cdot 34}{4} = \frac{5\sqrt{34}}{2} \Rightarrow EH = \frac{BE \cdot ED}{BD} = \frac{15}{2}$

$HD = \sqrt{\frac{9 \cdot 34}{4} - \frac{15^2}{4}} = \frac{\sqrt{306 - 225}}{2} = \frac{9}{2}$

$\triangle EHD \sim \triangle EAH_2$ $\quad \frac{HD}{AH_2} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow AH_2 = \frac{25}{2}$

$\frac{AH_2}{AF} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow AF = \frac{5\sqrt{34}}{2}$

$H_2F = \sqrt{\frac{25 \cdot 34}{4} - \frac{25^2}{4}} = \frac{15}{2}$

$EH_2 \cdot H_2F = AH_2 \Rightarrow EH_2 = \frac{125}{6}$

$EF = \frac{85}{3}\left(\frac{125}{6} + \frac{15}{2}\right)$; $S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AH_2 = \frac{2125}{12}$

Ответ: $R_1 = \frac{85}{6}$; $R_2 = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$

$S_{AFE} = \frac{2125}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b^2=t \quad t\geq 0$

$2t^2-7t+5=0$

$D=49-40=9$

$t=\frac{7\pm 3}{6}=\frac{5}{3};\ \frac{2}{3} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{5}{3}};\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$b=\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow a=\frac{(5-\frac{5}{3})\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{10}{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{15}}$

$b=-\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow a=-\frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=-\frac{10}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{10}{\sqrt{15}}$

$b=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow a=\frac{\frac{13}{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{13}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{13}{\sqrt{6}}$

$b=-\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow a=-\frac{13}{\sqrt{6}}$

$a\geq 2b$

1) $\frac{10}{\sqrt{15}}\geq\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ – да

2) $-\frac{10}{\sqrt{15}}\geq\frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ – да

3) $\frac{13}{\sqrt{6}}\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ – да

4) $-\frac{13}{\sqrt{6}}\geq\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{-13}{\sqrt{6}}\not\geq\frac{-4}{\sqrt{6}}$
нет

$a=\frac{10}{\sqrt{15}};\ -\frac{10}{\sqrt{15}};\ \frac{13}{\sqrt{6}}$

$\frac{5-3b^2}{b}\geq 0$

$b=\sqrt{\frac{5}{3}};\ -\sqrt{\frac{5}{3}};\ \sqrt{\frac{2}{3}}$

~~5 − 5~~

$x=\frac{10}{\sqrt{15}}+2;\ -\frac{10}{\sqrt{15}}+2;\ \frac{13}{\sqrt{6}}+2$

$y=\sqrt{\frac{5}{3}}+1;\ -\sqrt{\frac{5}{3}}+1;\ \sqrt{\frac{2}{3}}+1=\frac{\sqrt{15}}{3}+1;\ 1-\frac{\sqrt{15}}{3};\ \frac{\sqrt{6}}{3}+1$

Ответ: $\left(\frac{10+2\sqrt{15}}{\sqrt{15}};\ \frac{3+\sqrt{15}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{15}-10}{\sqrt{15}};\ \frac{3-\sqrt{15}}{3}\right)\left(\frac{13+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}};\ \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq 13^{\log_{12}|x^2+18x|}-18x$$

$$\cancel{\left(5^{\log_{12}(x^2+18x)}-13^{\log_{12}|x^2+18x|}>\right)}$$

$$13^{\log_{12}|x^2+18x|}-5^{\log_{12}(x^2+18x)} \leq x^2+18x$$

Замена: $x^2+18x=t$

$$13^{\log_{12}|t|}-5^{\log_{12}t} \leq t$$

$$|t|^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5} \leq t$$

1) $t\geq 0$ $x(x+18)\geq 0$ $x\in(-\infty;-18]\cup[0;\infty)$

$$t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5} \leq t$$

$$\log_{12}13\,\log_{12}t-\log_{12}5\,\log_{12}t \leq \log_{12}t$$

$$\log_{12}t\left(\log_{12}\frac{13}{5}\right) \leq \log_{12}t$$

$$\log_{12}t\left(\log_{12}\frac{13}{5}-1\right) \leq 0$$

$$\log_{12}t \geq 0$$

$$t\geq 1 \Rightarrow x^2+18x-1\geq 0$$

$$D_1=81+1=82$$

$$x=-9\pm\sqrt{82}$$

$$x\in(-\infty;-9-\sqrt{82}]\cup[-9+\sqrt{82};\infty)$$

2) $t<0$

$$-t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}\leq t$$

$$t^{\log_{12}13}+t^{\log_{12}5}\geq -t$$

$$\log_{12}13\log_{12}t+\log_{12}t\log_{12}5+\cancel{\log_{12}t}\geq 0\log_{12}-t$$

$$t^{\log_{12}13}+t^{\log_{12}5}+t\geq 0$$

$t\in R$

$\Downarrow$

$t<0$ – не подходит по ОДЗ

$x^2+18x<0$

$x(x+18)<0$

$x\in(-18;0)$

Ответ: $x\in(-\infty;-9-\sqrt{82}]\cup\cancel{(-18;0)}\cup(-9+\sqrt{82};\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

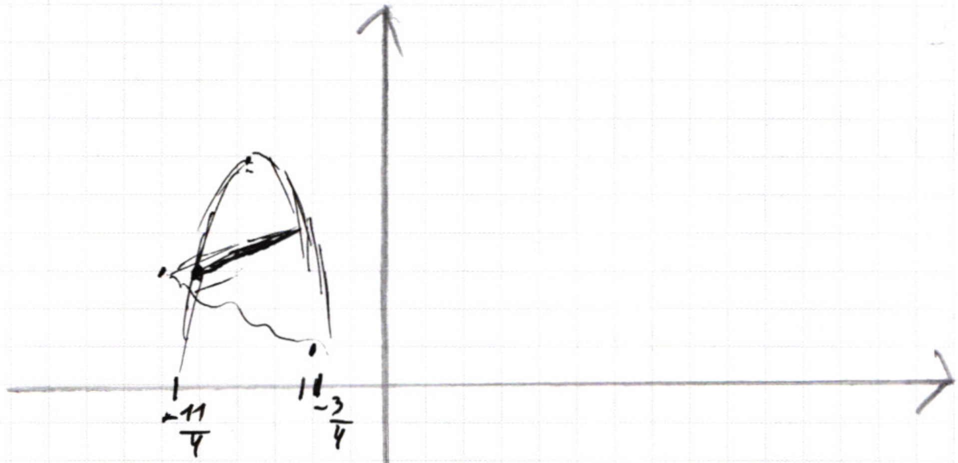
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad x\in\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$-8x^2-30x-17=0$

$x_0 = \frac{15}{\cancel{-16}8} = -\frac{15}{\cancel{16}8}$



$g(x)=\frac{12x+11}{4x+3} \qquad f(x)=-8x^2-30x-17 \qquad f'(x)=-16x-30=0$

$x=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

$g'(x)=(12x+11)'(4x+3)-(4x+3)'(12x+11)=0$

$12(4x+3)-4(12x+11)=$

$=48x+36-48x-44=-8$

$g(x) \searrow$ ф-я

$\frac{12\cdot -\frac{3}{4}+11}{4\cdot -\frac{3}{4}+3} = \frac{2}{}$

$g(-2)=\frac{-13}{-5}=\frac{13}{5}$

$f(-2)=-8\cdot4+60-17=11$

$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ \underline{12x+9} & 3 \\ 2 & \end{array}$

$\frac{2}{4x+3}+3$

$\cancel{ax+b} \quad -\frac{11}{4}a+b \ge \frac{-33+11}{-8}$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \ge \frac{11}{4} \\ -\frac{11}{4}a+b \le -8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot11}{4}-17 \\ -\frac{15}{8}a+b \le -8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot15}{8}-17 \\ -\frac{3}{4}a+b \le -8\frac{9}{16}+\frac{3\cdot3}{4}-17 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2(\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

а) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

б) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Downarrow$

$2\sin 2\alpha - 1\cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \qquad tg\,\alpha = -2$

$\Downarrow$

$\cos\alpha = \pm 1$

$\Downarrow$

$tg\,\alpha = 0$

Ответ: $0; -2; -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

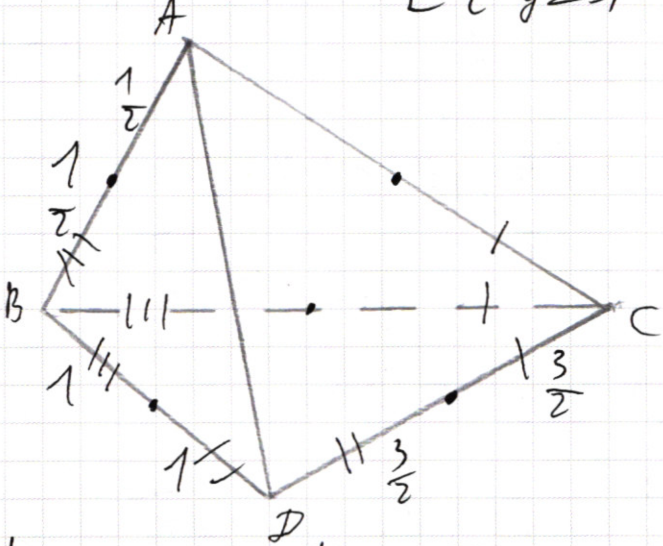
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{7}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ y < 1 \end{cases}\end{array}\right.$

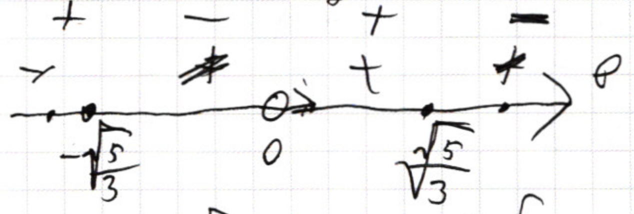
ABCD – пирамида



$\frac{5-3b^2}{b} \geq 0$

$b^2 = \frac{5}{3}$ $\qquad b = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$b = 0$ $\qquad b = 0$



$y = 1$

$x = 7$ $\qquad 7-2 = \sqrt{\cancel{14}7-}$

~~$b \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{3}; 0\right) \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{3}; \infty\right)$~~

$b \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right] \cup \left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$

$\approx \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$

$\frac{5}{2} : \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$7-4 = \sqrt{14-7-4+2}$

$x-4 = \sqrt{2x-x-4+2}$

$x-4 = \sqrt{x-2}$ $\qquad x-4 \geq 0$

$x-2 \geq 0$

$x^2-8x+16 = x-2$ $\qquad x \geq 4$

$x^2-9x+18 = 0$

$\cancel{D} =$ $\qquad 6-4 = \sqrt{12-6-4+2}$

$\begin{cases} (x-2)^2 = 16 \\ (x-2-4) = 0 \\ (x-2+4) = 0 \\ x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + 2y + x - 2 = 0$

$x - 2 = \frac{5 - (y-1)^2}{y-1}$ $\quad x - 2 = \frac{5 - y^2 + 2y - 1}{y-1} = \frac{-y^2 + 2y + 4}{y-1}$

$x = \frac{-y^2 + 2y + 4}{y-1} + 2$ $\quad (y-1)^2 = 1$

$(y - 1 - 1)(y - 1 + 1) = 0$

$(y-1)^2 = \frac{5}{2}$ $\quad y = 2 \quad y = 0 \quad x = \sqrt{2 - x}$

$x^2 = 2 - x$

$(y - 1 - \sqrt{\frac{5}{2}})(y - 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}) = 0$ $\quad x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2; 1$

$y = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \quad y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

$x = 1; 0$

$(x-2)^2 + 9 \cdot \frac{5}{2} = 25$

$(x-2)^2 = \frac{5}{2}$

$(x - 2 - \sqrt{\frac{5}{2}})(x - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}) = 0$

$x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} \quad x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{\sqrt5}{\cancel{5}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt5}}{\cancel{2}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha + 1\cos 2\alpha = -1$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cancel{\mp} + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \Rightarrow 2tg\alpha = -1 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{2} \quad |:\cos^2\alpha$

$\cos\alpha \neq 0$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$

$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

② $\sin(2\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} - \frac{\sqrt5}{5} = \frac{-4-\sqrt5}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta-2\alpha-4\beta}{2}\right)+\sin 2\alpha = \frac{-4-\sqrt5}{5}$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha = \frac{-4-\sqrt5}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2(\sin 2\alpha \cos 3\beta + \sin 3\beta \cos 2\alpha)\cos\beta + \sin 2\alpha = \frac{-4-\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ:

$x \geq 2y$

$xy-x-2y+2 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 2y \\ (x-2)(y-1) \geq 0 \end{cases}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2+9(\cancel{x}y-1)^2=25$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена: $x-2=a$

$y-1=b$

$a-2b=x-2-2y+2=x-2y$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$ab \geq 0$
$a-2b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$$

$a^2-5ab+4b^2=a^2+9b^2-25$

$5b^2=25-5ab$

$b^2=5-ab$ $\quad a=\frac{5-b^2}{b}$

$a^2-5ab+4(5-ab)=a^2-9ab+20=0$

$\frac{5-b^2}{b}-2b=\sqrt{5-b^2}$

$\frac{5-b^2-2b^2}{b}=\sqrt{5-b^2}$

$\frac{5-3b^2}{b}=\sqrt{5-b^2}$ $\quad$?

$5-3b^2=b\sqrt{5-b^2}$

$(5-3b^2)^2=b^2(5-b^2)$

$25+9b^4-30b^2=5b^2-b^4$

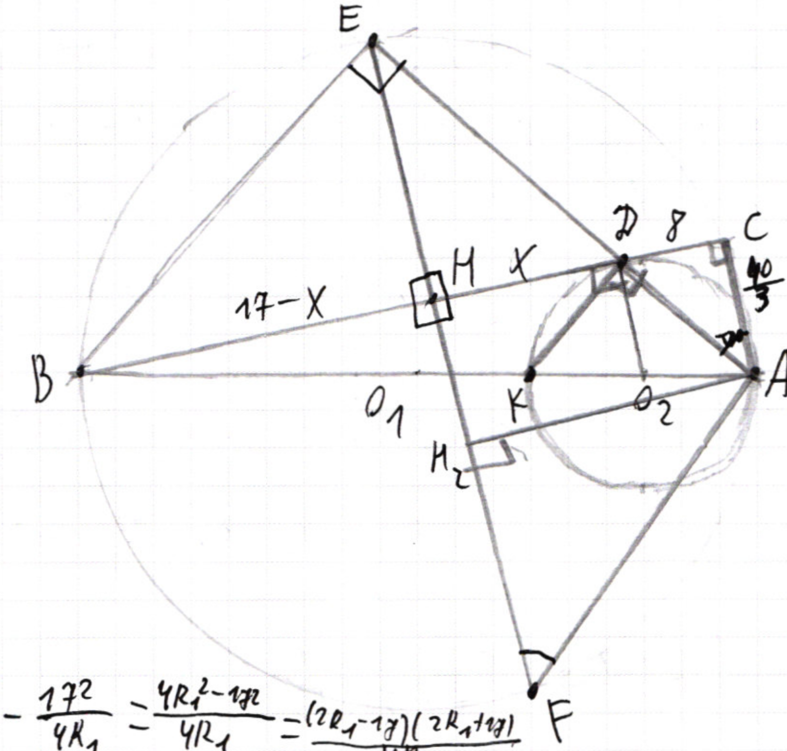
$10b^4-35b^2+25=0$

$2b^4-7b^2+5=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



R_1, R_2 − ?

$\angle AFE$ − ?

S_{AEF} − ?

$CD = 8$

$BD = 17$

BC − кас.

$R_1 - R_2 = \frac{17^2}{4R_1}$

$R_2 = R_1 - \frac{17^2}{4R_1} = \frac{4R_1^2 - 17^2}{4R_1} = \frac{(2R_1-17)(2R_1+17)}{4R_1}$

$\angle AFE = \angle CAE$ $\quad CD \cdot BD = ED \cdot DA = 17 \cdot 8$

$BD^2 = BK \cdot BA$ $\quad BK = 2R_1 - 2R_2$

$17^2 = 4R_1(R_1 - R_2)$ $\quad 17^2 = 4R_1^2 - 4R_1R_2$ $\quad BA = 2R_1$

т. к BC − кас $\Rightarrow DO_2 \perp BC \Rightarrow DO_2 \parallel AC \Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

по I пр $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{R_2}{AC} \Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{R_2}{AC} \Rightarrow AC = \frac{25R_2}{17}$

$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow \frac{25^2R_2^2}{17^2} + 25^2 = \cancel{2R_1}\, 4R_1^2$

$25^2R_2^2 + 17^2 \cdot 25^2 = 17^2 \cdot 4R_1^2$

$R_2^2 = \frac{(2R_1-17)^2(2R_1+17)^2}{16R_1^2}$ $\quad \cancel{25^2 \cdot 16R}$

$25^2(2R_1-17)^2(2R_1+17)^2 + 16R_1^2 \cdot 17^2 \cdot 25^2 = 17^2 \cdot \cancel{4}64R_1^4$

$R_1^2 = t \quad t \geq 0 \quad 25^2(\cancel{2}4R_1^2 - 17^2)^2 + 16R_1^2 \cdot 17^2 \cdot 25^2 = 17^2 \cdot 64R_1^4$

$25^2(4t - 17^2)^2 + 16t \cdot 17^2 \cdot 25^2 = 64t^2 \cdot 17^2$

$\frac{17}{\cdot 8}$ / 136

$$64t^2\cdot 17^2 - 25^2(4t-17^2)^2 - 16t\cdot 17^2\cdot 25^2 = 0$$

$$8^2t^2\cdot 17^2 - 25^2(4t-17^2)^2 - 16\cdot 17^2\cdot 25^2 t = 0$$

$$(8t\cdot 17 - 25(4t-17^2))(17\cdot 8t + 25(4t-17^2)) - 16\cdot 17^2\cdot 25^2 t = 0$$

$$(136t - 100t + 25\cdot 17^2)(136t + 100t - 25\cdot 17^2) - 16\cdot 17^2\cdot 25^2 t = 0$$

$$(36t + 25\cdot 17^2)(236t - 25\cdot 17^2) - 16\cdot 17^2\cdot 25^2 t = 0$$

$$36\cdot 236t^2 - 25\cdot 17^2\cdot 36t + 25\cdot 17^2\cdot 236t - 25^2\cdot 17^4 - 16\cdot 17^2\cdot 25^2 t = 0$$

$$36\cdot 236t^2 + 25\cdot 17^2\cdot 200t - 16\cdot 17^2\cdot 25^2 t - 25^2\cdot 17^4 = 0$$

$$36\cdot 236t^2 + 25\cdot 17^2(200t - 16\cdot 25t) - 25^2\, 17^4 = 0$$

$$36\cdot 236t^2 - 25\cdot 17^2\cdot 200t - 25^2\cdot 17^4 = 0$$

$$D = 25^2\cdot 17^4\cdot 200^2 + 4\cdot 36\cdot 236\cdot 25^2\cdot 17^4 = 25^2\cdot 17^4(200^2 + 4^2\cdot 9\cdot 236) =$$

$$= 25^2\cdot 17^4\cdot 4^2(50^2 + 9\cdot 236) = 25^2\cdot 17^4\cdot 4^2\cdot 2^2(25^2 + 9\cdot 59)$$

$59 \times 9 = 531$; $625 + 531 = 1156$; 34×34: 136, 102, 1156; 36×36: 216, 108, 1296

$$t = \frac{25\cdot 17^2\cdot 200 \pm 25\cdot 17^2\cdot 4\cdot 2\cdot 34}{2\cdot 36\cdot 236} =$$

$$= \frac{25\cdot 17^2\cdot 4(50+68)}{2\cdot 36\cdot 236} = \frac{25\cdot 17^2\cdot(25+34)}{9\cdot 236} =$$

$$= \frac{25\cdot 17^2\cdot 59}{9\cdot 236} = \frac{25\cdot 17^2}{9\cdot 4} = \frac{5^2\cdot 17^2}{3^2\cdot 2^2}$$

$$R_1^2 = \frac{5^2\cdot 17^2}{3^2\cdot 2^2} \Rightarrow R_1 = \frac{5\cdot 17}{3\cdot 2} = \frac{85}{6}$$

$$17^2 = 4\cdot\frac{85}{6}\left(\frac{85}{6} - R_2\right) \qquad \frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{17}{25} \Rightarrow$$

$$50R_1 - 25R_2 = 34R_1 \Rightarrow 25R_2 = 16R_1 \Rightarrow R_2 = \frac{16R_1}{25} =$$

$$= \frac{16\cdot\frac{85}{6}}{25} = \frac{8\cdot\frac{85}{3}}{25} = \frac{8\cdot 85}{3\cdot 25} = \frac{8\cdot 17}{3\cdot 5} = \frac{136}{15} - R_2$$

$$AC = \frac{25R_2}{17} = \frac{25\cdot\frac{136}{15}}{17} = \frac{5\cdot 136}{3\cdot 17} = \frac{5\cdot 8}{3} = \frac{40}{3} - AC$$

~~$\angle AFE = \angle CAE \Rightarrow tg\angle AFE =$~~

Пусть $\angle CAE - \alpha$; тогда $\angle EC = 2\alpha$

$$AF = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{64\cdot 9 + 1600}{9}} = \frac{\sqrt{8(72+200)}}{3}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle AFE = \angle ABC + \angle CAE$ $\quad AD = \frac{\sqrt{8\cdot 272}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$ $\quad \frac{8\sqrt{34}}{3} - AD$

$\sin\angle CAE = \frac{8}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

~~$\angle ABC = \operatorname{tg}\angle ABC$~~

$\sin\angle ABC = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{85}{3}} = \frac{40}{85} = \frac{8}{17}$

$\cos\angle CAE = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\angle ABC = \frac{25\cdot 6}{85} = \frac{5\cdot 3}{17} = \frac{15}{17}$

$\sin\angle AFE = \sin(\angle ABC + \angle CAE) = \sin\angle ABC\cos\angle CAE + \sin\angle CAE\cos\angle ABC =$

$= \frac{8}{17}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{15}{17} = \frac{40+45}{17\sqrt{34}} = \frac{85}{17\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} - \sin\angle AFE$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$

$EH\cdot BD = BE\cdot ED$ $\qquad ED\cdot DA = AD\cdot DC = 17\cdot 8$

$EA = ED + AD = \frac{8\sqrt{34}}{3} + \frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{16\sqrt{34} + 9\sqrt{34}}{6}$ $\qquad ED = \frac{17\cdot 8\cdot 3}{8\sqrt{34}} = \frac{17\cdot 3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}} =$

$\Rightarrow EA = \frac{25\sqrt{34}}{6}$ $\qquad = \frac{3\sqrt{34}}{2} \Rightarrow ED^2 = \frac{9\cdot 34}{4}$

$BE^2 = 17^2 - \frac{9\cdot 34}{4} = \frac{17^2\cdot 4 - 9\cdot 34}{4} = \frac{17(68-18)}{4} = \frac{17\cdot 50}{4} = \frac{34\cdot 25}{4}$

$BE = \frac{5\sqrt{34}}{2} \Rightarrow EH = \frac{BE\cdot ED}{BD} = \frac{\frac{5\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{34}}{2}}{17} = \frac{\frac{15\cdot 34}{4}}{17} =$

$= \frac{15\cdot 34}{4\cdot 17} = \frac{15\cdot 2}{4} = \frac{15}{2} - EH$ $\qquad HD = \sqrt{\frac{9\cdot 34}{4} - \frac{15^2}{4}} = \frac{\sqrt{306-225}}{2} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \frac{9}{2}$

$\triangle EHD \sim \triangle EAH_2$ $\qquad \frac{HD}{h} = \frac{ED}{EA}$

$h = \frac{HD\cdot EA}{ED} = \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}}{\frac{3\sqrt{34}}{2}} = \frac{9\cdot 25\sqrt{34}}{12}\cdot\frac{2}{3\sqrt{34}} =$

$= \frac{25}{2} - h$ $\qquad \frac{h}{AF} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow AF = \frac{h\sqrt{34}}{5} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$H_2F = \sqrt{\frac{25\cdot 34}{4} - \frac{25^2}{4}} = \sqrt{\frac{25(34-25)}{4}} = \frac{5\cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$EH_2 \cdot H_2F = h^2 \Rightarrow EH_2 = \frac{h^2}{H_2F} = \frac{25^2}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}}{15} = \frac{25\cdot \cancel{25}^{5}}{2\cdot \cancel{15}_3} =$$

$$= \frac{125}{6}$$

$$EF = \frac{125}{6} + \frac{15}{2} = \frac{125}{6} + \frac{45}{6} = \frac{170}{6} = \frac{85}{3} - EF$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{85}{3} = \frac{25\cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 25 \\ 85 \\ \hline 125 \\ 200\ \ \\ \hline 2125 \end{array}$$

Ответ: $k_1 = \frac{85}{6}$; $k_2 = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$

$S_{AFE} = \frac{2125}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; \infty)$

$$5^{\log_{12}|x^2+18x|} + x^2 \geq 13^{\log_{12}|x^2+18x|} - 18x$$

Замена: $x^2+18x=t$

$t>0$

т.к. по одз $x^2+18x>0$

$$13^{\log_{12}|t|} - 5^{\log_{12}t} \leq \cancel{x^2+18}\ t$$

1) $t \geq 0$

$$13^{\log_{12}t} - 5^{\log_{12}t} \leq t$$

$$t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5} \leq t$$

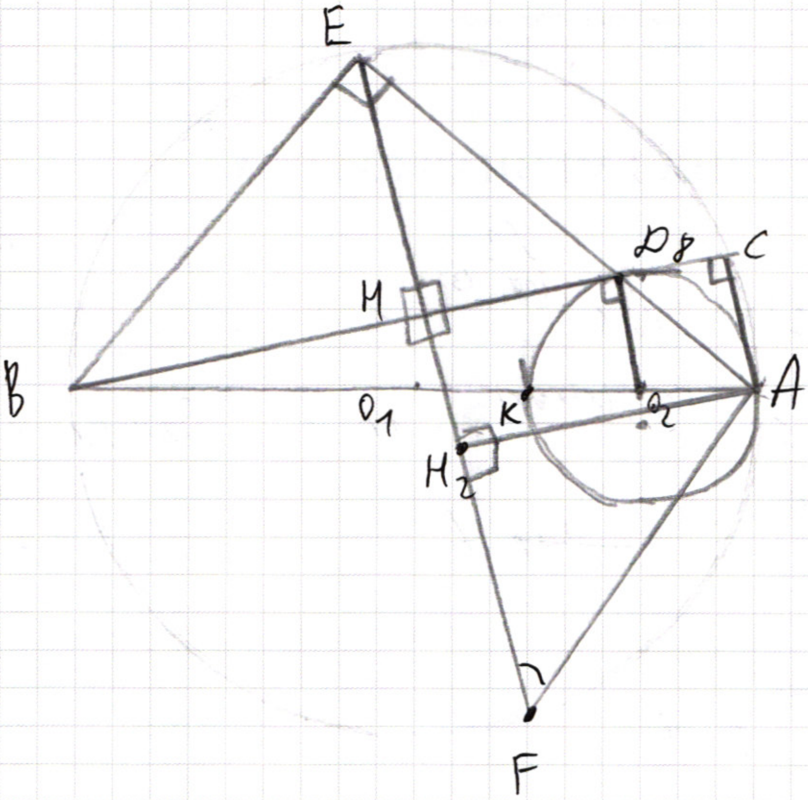
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№4



BD – кас

$BD = 17$

$DC = 8$

AB – диам

R_1, R_2 – ?

$\angle AFE$ – ?

S_{AEF} – ?

$BD^2 = BK\cdot BA \Rightarrow 17^2 = (2R_1 - 2R_2)\cdot 2R_1 = 4R_1(R_1 - R_2)$

т.к BD – кас $\Rightarrow DO_2 \perp BC \Rightarrow DO_2 \parallel AC \Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BAC$

по I пр $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{R_2}{AC} \Rightarrow AC = \frac{25R_2}{17}$

$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow 25^2\cdot R_2^2 + 17^2\cdot 25^2 = 17^2\cdot 4R_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_2^2 = \frac{(2R_1-17)^2(2R_1+17)^2}{16R_1^2} \Rightarrow 25^2(2R_1-17)^2(2R_1+17)^2 +$

$+16R_1^2\cdot 17^2\cdot 25^2 = 17^2\cdot 64R_1^4$. Решая это уравнение получаем, что $R_1 = \frac{85}{6} \Rightarrow R_2 = \frac{16R_1}{25} = \frac{136}{15}$

$AC = \frac{25R_2}{17} = \frac{40}{3} \Rightarrow AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$\angle AFE = \angle CAE + \angle ABC \Rightarrow \sin\angle AFE = \sin(\angle CAE + \angle ABC)$

$\sin\angle CAE = \frac{DC}{AD} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \cos\angle CAE = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\angle ABC = \frac{AC}{2R_1} = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos\angle ABC = \frac{15}{17}$

$\sin\angle AFE = (\sin\angle CAE\cos\angle ABC + \sin\angle ABC\cos\angle CAE) = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow$