МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.

Дано:

Ω, ω - окр.

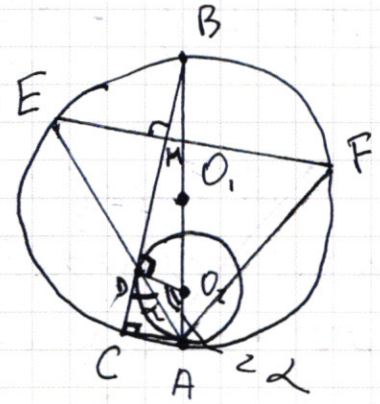
$CD = 12$

$BD = 13$

R_1, R_2 - ?

$\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle ABF}$ - ?



O_1 - центр Ω

R_2 - радиус Ω

O_2 - центр ω

R_1 - радиус ω

$R_2 > R_1$

1) $O_2D \perp CB$, CB - касательная

2) $\triangle DO_2A$, $\angle DO_2A = 2\alpha$, центральный

$\angle CDA = \alpha$ - угол между касательной и хордой

$\angle DAO_2 = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$, $\triangle DO_2A$ - равнобедр

$DO_2 = O_2A = R_2$

3) $\angle CDA = \alpha = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CA} + \overset{\smile}{EB})$

$\angle CBA = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CA}$, впис в окр Ω

$\triangle$ $\angle EAB = 90 - \alpha = \frac{1}{2}\overset{\smile}{EB}$, впис в окр Ω

Имеем: $\alpha = \angle CBA + 90 - \alpha$

$\angle CBA = 2\alpha - 90°$

~~4) $\triangle DBO_2$, $\angle CBA + \angle DO_2B = 90° \Rightarrow \angle DO_2B + 2\alpha - 90° = 90°$~~

4) $\triangle CBA$, $\angle BCA = 90°$ - впис, опирается на диаметр

$\triangle CDA$ $\cos\alpha = \frac{CD}{AD}$

$AD = \frac{CD}{\cos\alpha}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{CA}{CD} = \frac{CA}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

5) Δ CBA

$$tg(2\alpha - 90°) = \frac{CA}{CB_1} = \frac{CA}{25}$$

из 4) и 5) $\Rightarrow$ $25\, tg(2\alpha - 90°) = 12\, tg\alpha$

$$\frac{25 \sin(2\alpha - 90°)}{\cos(2\alpha - 90°)} = 12\, tg\alpha \; ; \quad -\frac{25 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 12 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$-50 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 12 \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$-50 \cancel{\sin\alpha}(1 - \sin^2\alpha) = 12 \cancel{\sin\alpha}(1 - 2\sin^2\alpha)$$

$\sin\alpha \neq 0$, $-50 + 50 \sin^2\alpha = 12 - 24\sin^2\alpha$

$74 \sin^2\alpha = 62$; $\sin^2\alpha = \frac{31}{37}$

$$\frac{-25 \sin(90 - 2\alpha)}{\cos(90 - 2\alpha)} = \frac{12 \sin\alpha}{\cos\alpha} \; ; \quad \frac{-25 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{12 \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$-25(1 - 2\sin^2\alpha) \cdot \cos\alpha = 24 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$$

$\cos\alpha \neq 0$, $-25 + 50\sin^2\alpha = 24 \sin^2\alpha$

$26 \sin^2\alpha = 25$; $\sin^2\alpha = \frac{25}{26} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{26}$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$$

6) Δ DAO_2 по теореме косинусов

$$AD^2 = 2R_1^2 - 2R_1^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{CD^2}{\cos^2\alpha} = 2R_1^2 \cdot \left(1 + \frac{12}{13}\right) \; ; \quad \frac{12^2 \cdot 26}{1} = 2R_1^2 \cdot \frac{25}{13}$$

$$R_1^2 = \frac{12^2 \cdot 13^2}{25} \; ; \quad R_1 = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$$

7) Δ CBA , $\cos\angle CBA = \cos(2\alpha - 90°) = \frac{25}{2R_2}$

$$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R_2} \; , \quad 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{25}{2R_2} \; ; \quad 2 \cdot \frac{5}{26} = \frac{25}{2R_2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4R_2 \cdot 5 = 25 \cdot 26$

$R_2 = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot \cancel{26}^{13}}{\cancel{20}_{\cancel{4}\,2}} = \frac{65}{2}$

~~Ответ:~~ $R_1 = \frac{156}{5}$; $R_2 = \frac{65}{2}$

8) $\angle AFE = \frac{1}{2}\breve{AE} = \frac{1}{2}(\breve{CE} + \breve{AC})$, впис в Ω

$\frac{1}{2}\breve{CE} = \angle CAE = 90° - \alpha$, из $\triangle CDA$

$\frac{1}{2}\breve{AC} = \angle CBA = \cancel{90}\ 2\alpha - 90°$, из $\triangle CBA$

$\Rightarrow \angle AFE = \alpha$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$

9) $\triangle AEF$ вписан в окр Ω , по теореме синусов

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R_{\cancel{2}2} \Rightarrow AE = 2 \cdot \frac{65}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{25\sqrt{26}}{2}$

~~$\triangle AEB$, $\angle AEB = 90°$, окм~~

$\cancel{\triangle}$ AEDH - прям. по усл $\Rightarrow \angle AEF = 90 - \alpha \Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр Ω, $EF = 2R_2$

$S = \frac{1}{2} AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot 65 \cdot \sin(90 - \alpha) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot 65 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{65 \cdot 25}{4} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R_1 = \frac{156}{5}$, $R_2 = \frac{65}{2}$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$, $S = \frac{1625}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$tg\alpha - ?$

1) пусть $2\alpha = u$, $2\beta = v$

$\begin{cases} \sin(u+v) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(u+2v) + \sin u = -\frac{2}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin u \cdot \cos 2v + \sin 2v \cdot \cos u + \sin u = -\frac{2}{17} & (2) \end{cases}$

(2): $\sin u(1+\cos 2v) + \sin 2v \cdot \cos u = -\frac{2}{17}$

$2\sin u \cos^2 v + 2\sin v \cdot \cos v \cdot \cos u = -\frac{2}{17}$

$2\cos v\,(\underbrace{\sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u}_{= -\frac{1}{\sqrt{17}} \text{ из } (1)}) = -\frac{2}{17}$

$-2\cos v \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{17}$

$\cos v = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin v = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

2) $\sin v = +\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos v = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin u \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin u + 4\cos u = -1 \qquad (3)$

~~$4\cos u = -1 - \sqrt{1-\cos^2}$~~

$\sin v = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin u - 4\cos u = -1 \qquad (4)$

$\left[\begin{array}{l} \sin u + 4\cos u = -1 \\ \sin u - 4\cos u = -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 1 = 0 \\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha - 4 + 1 = 0 \\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 4 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha - 3 = 0 \\ 8\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha - 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-2\sin\alpha \pm \sqrt{4\sin^2\alpha + 96}}{16} \\ \cos\alpha = \dfrac{2\sin\alpha \pm \sqrt{4\sin^2\alpha + 160}}{16} \end{array}\right.$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to \left[\begin{array}{l} tg\alpha = \dfrac{16}{-2\sin\alpha \pm \sqrt{4\sin^2\alpha + 96}} \\ tg\alpha = \dfrac{16}{} \end{array}\right.$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2 \pm \sqrt{4 + \frac{96}{\sin^2\alpha}}$$

$$\left[\begin{array}{l} 5\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cancel{tg^2\alpha}\ \ \cos^2\alpha \neq 0 \\ 3\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha - 5\sin^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha \neq 0 \end{array}\right.$$

по усл

$$\left[\begin{array}{l} -3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0 \\ -5tg^2\alpha - 2tg\alpha + 3 = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0 \\ 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

№2.

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

$(2): \ (3x-3)^2+(y-6)^2 = 45+45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 90$

$(1):$ возв. в кв.

$$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6 \\ y-6x \geq 0 \end{cases}$$

$\cancel{y^2} - (y-6)^2+36(x-1)^2 = 13xy-6x-y+6-12y-72x+72$

$90 = 13(xy-6x-y+6)$

$xy-6x-y+6 = \frac{90}{13} \Rightarrow y-6x = \sqrt{\frac{90}{13}}, \ y = 6x+\sqrt{\frac{90}{13}}$

подставим во (2)

$9x^2+\left(6x+\sqrt{\frac{90}{13}}\right)^2-18x-72x-12\sqrt{\frac{90}{13}}-45=0$

$45x^2+12x\cdot\sqrt{\frac{90}{13}}+\frac{90}{13}-90x-12\sqrt{\frac{90}{13}}-45=0$

$45x^2+x\left(12\sqrt{\frac{90}{13}}-90\right)+\left(\frac{90}{13}-12\sqrt{\frac{90}{13}}-45\right)=0$

$\left(\sqrt{45}x+\left(6\sqrt{\frac{2}{13}}-\sqrt{45}\right)\right)^2-\frac{36\cdot 2}{13}-45+12\frac{\sqrt{90}}{13}+\frac{90}{13}-12\frac{\sqrt{90}}{13}-45=0$

$\left(\sqrt{45}x+6\sqrt{\frac{2}{13}}-\sqrt{45}\right)^2-90+\frac{18}{13}=0$

$\left(\sqrt{45}x+6\sqrt{\frac{2}{13}}-\sqrt{45}\right)^2 = 64\cdot\frac{18}{13}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{45}\,x+6\sqrt{\frac{2}{13}}-\sqrt{45}=8\cdot3\cdot\sqrt{\frac{2}{13}} \\ \sqrt{45}\,x+6\sqrt{\frac{2}{13}}-\sqrt{45}=-8\cdot3\cdot\sqrt{\frac{2}{13}} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt{45}\,x=\sqrt{45}+18\sqrt{\frac{2}{13}} \\ \sqrt{45}\,x=\sqrt{45}-30\sqrt{\frac{2}{13}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{\frac{2\cdot18^2}{13\cdot45}} \\ x=1-\sqrt{\frac{2\cdot30^2}{13\cdot45}} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=1+6\sqrt{\frac{2}{65}} \\ x=1-2\sqrt{\frac{10}{13}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+6\sqrt{\frac{2}{65}} \\ y=6+36\sqrt{\frac{2}{65}}+\sqrt{\frac{90}{13}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-2\sqrt{\frac{10}{13}} \\ y=6-12\sqrt{\frac{10}{13}}+\sqrt{\frac{90}{13}} \end{cases} \end{array}\right.$$

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5(26-x^2)}$$

1) $26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-13^{\log_5(26-x^2)}\geqslant 0$$

$26x-x^2=t,\quad t>0$

$$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}\geqslant 0$$

$$13^{\log_5 t}=\left(t^{\log_t 13}\right)^{\log_5 t}=t^{\frac{\log_t 13}{\log_t 5}}=t^{\log_5 13}$$

$$t+t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}\geqslant 0$$

~~2) при $t\neq1,\ t>0$~~

$t + t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \geqslant 0$, $t \geqslant t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12}$

прологарифмируем по основанию t, $t \neq 1$, $t > 0$ ~~по~~

$\log_t \left(t + t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \right) \geqslant 0$

$1 \geqslant \log_t \left(t^{\log_5 12} \left(t^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1 \right) \right)$

$\log_t \left(t^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1 \right) \leqslant 1 - \log_5 12$

$t + t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \geqslant 0$

1) $t \in [0; 1]$

$t \geqslant t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12}$, $\left(t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12} \right) \leqslant 0$, $t > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t \in [0; 1]$ равенство верно

2) $t > 1$

$t \left(1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} \right) \geqslant 0$ $t > 1 \Rightarrow$

~~$t >$~~ $1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}}$ ~~$)$~~ $\geqslant 0$

$1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}} \left(1 - t^{\log_5 \frac{13}{12}} \right) \geqslant 0$

$\log_5 t - \log_5 1 \leqslant 0$

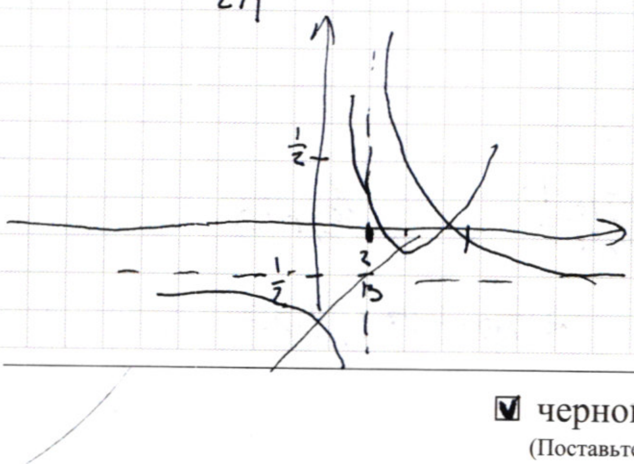
168	2
84	2
42	2
21	

51×51: 51, 255, 2601

$18 \times 4 = 72$

72×28: 576, 144, 2016

$2601 - 2016 = 585$



черновик ☑ чистовик ☑

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ~~8~~

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$t \in (0; 5$~~

$\left[\begin{array}{l} \log_5 t \geq 1 \\ t \in (0;1) \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t \geq 5 \\ t \in (0;1) \end{array}\right.$

3) при $t=1$ равенство верно $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \in (0;1] \\ t \geq 5 \end{array}\right.$

2) при $t \neq 1$ $t \in (0; 1) \cup (1; 25]$

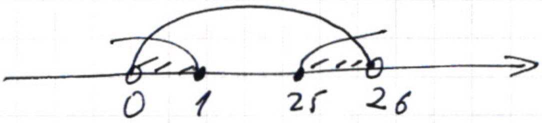
при $t=1$ равенство верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (0; 25]$

3) ~~$26x - x^2$~~ $\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \leq 25 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-26) < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geq 0 \end{cases}$

$x^2 - 26x + 25 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 25 \end{array}\right.$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

N6.

$(a; b) - ?$

$x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$, x любое

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

1) $f(x) = \dfrac{8-6x}{3x-2} = \dfrac{-6x+4+4}{3x-2} = -2 + \dfrac{4}{3x-2}$ – гипербола

вертикал. ассимптота $x = \frac{2}{3}$

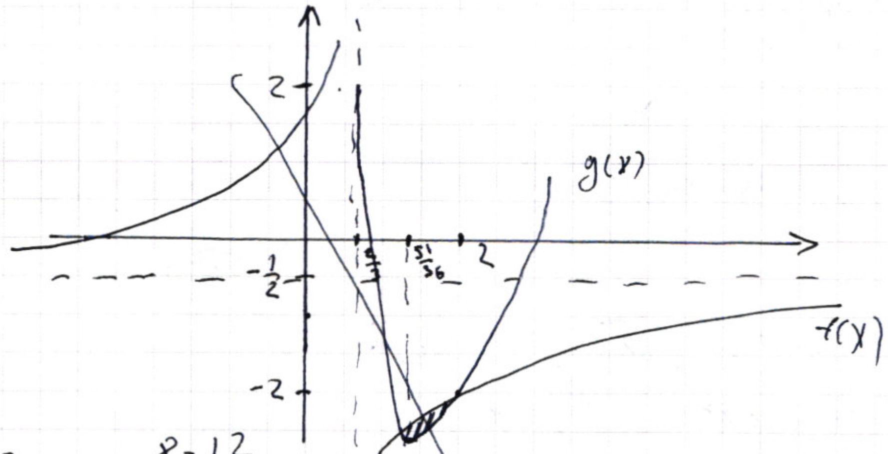
горизонт. ассимптоты $\underset{x \to +\infty}{f(x)} = -\frac{1}{2}$

$\underset{x \to -\infty}{f(x)} = -\frac{1}{2}$

2) $g(x) = 18x^2 - 51x + 28$

$x_в = \frac{51}{36}$, ~~нули~~: $D = 51^2 - 28\cdot 18\cdot 4 = 2601 - 2016 =$

$= 585$ нули $x = \frac{51 \pm \sqrt{585}}{36}$, $\frac{51-\sqrt{585}}{36} > \frac{2}{3}$



$f(\cancel{\tfrac{2}{3}}2) = \frac{8-12}{6-\cancel{4}2} = -\cancel{2}\,-1$

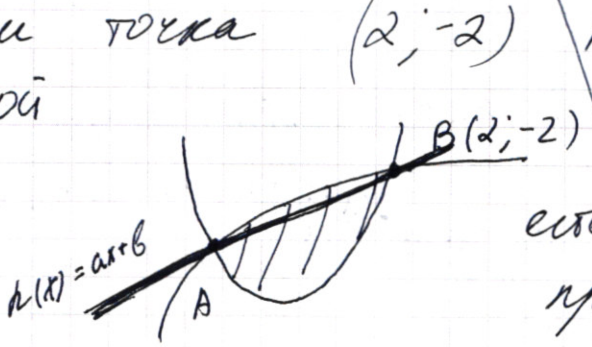
$g(\frac{2}{3}) = 18\cdot\frac{4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 36 - \frac{\cancel{51}^{17}\cdot 2}{\cancel{3}} = 2$

$g(2) = 18\cdot 4 - 102 + 28 = -2$

3) $\cancel{\frac{8-6x}{3x-2} = 18x^2 - 51x + 28}$

прямая ~~h(x)~~ $(ax+b)$ должна лежать в заштрихованной области

причем точка $(2;-2)$ принадлежит этой прямой



есть единственная ~~прям~~ прямая, при котором выполняются условия,

прямая проходит через точки A и B

точка A — пересечение графиков

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} = 18x^2 - 51x + 28, \qquad x > \frac{2}{3}$

$8-6x = 54x^3 - 153x^2 + 84x - 36x^2 + 102x - 56$

$\cancel{5x}\ 54x^3 - 189x^2 + 192x - 64 = 0$

$(x-2)(54x^2 - 81x + 32) = 0$

$8-6x = 54x^3 - 153x^2 + 84x - 36x^2 + 102x - 56$

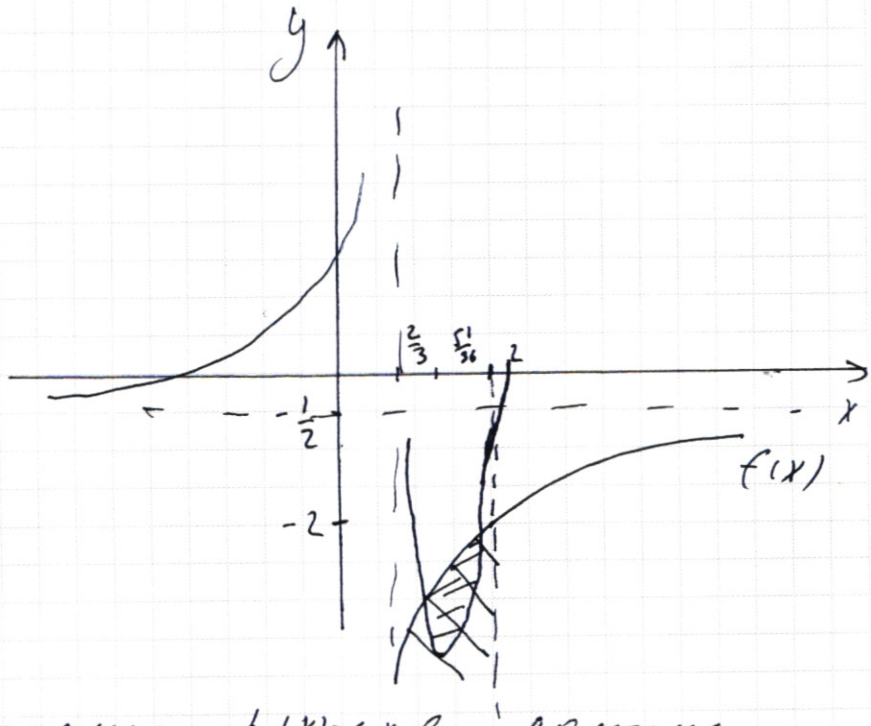
$54x^3 - 189x^2 + 192x - 64 = 0$

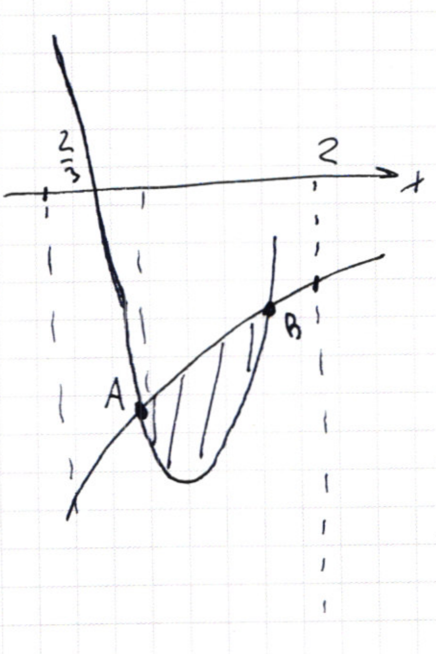
$(x-2)(54x^2 - 81x$

$f(2) = -1$

$g(\frac{2}{3}) = 2$

$g(2) = -2$





прямая $h(x) = ax + b$ должна проходить через точки A и B точки A и B - точки пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$ после нахождения точек напишем уравнение прямой, проходящей через 2 точки.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

коэффициент при x - a
свободный член - b

$$\begin{array}{r} \times\ 12 \\ 13 \\ \hline 36 \\ 12\ \ \\ \hline 156 \end{array}$$

$\frac{325}{10}$, $\frac{312}{10}$ разница $\frac{13}{10}$

$$\begin{array}{r} \times\ 65 \\ 25 \\ \hline 325 \\ 130\ \ \\ \hline 1625 \end{array}$$

$1+\cos 2\upsilon = 1+\cos^2\upsilon - \sin^2\upsilon = 2\cos^2\upsilon$

$\frac{25}{3} - \frac{10}{3} - \frac{15}{3}$ (б)

$\frac{9}{5} + \frac{6}{5} - \frac{15}{5}$ (б)

$90 - 45\cdot 13 = 45(2-13) = \frac{-11\cdot 45}{13}$

$\cancel{\cdot\sqrt{45}}$

$2\left(6\sqrt{\frac{90}{13}} - 45\right)$ $\left(6\sqrt{\frac{2}{13}} - \sqrt{45}\right)^2 = 45 + \frac{72}{13} - 12\sqrt{\frac{90}{13}}$

$\frac{-5\cdot 18\cdot 13 + 18}{13} = \frac{-18(64)}{13}$

$\frac{2\cdot 18\cdot \cancel{18}2}{13\cdot \cancel{45}_{5}} = \frac{4\cdot 2\cdot 9}{\cancel{65}\,13\cdot 5} = 6\sqrt{\frac{2}{65}}$

$\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}$

$\frac{\overset{10}{\cancel{30}}\cdot \overset{2}{\cancel{30}}\cdot 2}{13\cdot \cancel{45}_{3}} = 2\sqrt{\frac{10}{13}}$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26-x^2)}$

$26 - x^2$

$13^{\log_5 t} = \left(t^{\log_t 13}\right)^{\log_5 t} = t^{\frac{\log_t 13}{\log_t 5}} = t^{\log_5 13}$

посмотреть $t=1$

$t = 5^3$

$\log_a c + \log_{a} b = \log_a (bc)$

$125 + \left(5^{\log_5 12}\right)^3 - \left(5^{\log_5 13}\right)^3 =$

$t^3 - t^2 = t^2(t-1)$

$= 125 + 12^3 - 13^3 =$

$=$

$$\begin{array}{r} \times\ 12 \\ 12 \\ \hline 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144\ \ \\ \hline 1728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 13 \\ 13 \\ \hline 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ 169\ \ \\ \hline 2197 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t\left(1 + \cancel{\log} \, t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}}\right) \geq 0, \quad t > 0 \Rightarrow$

$1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} \geq 0$

$1 \geq \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}$; $1 \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 t}$

прологарифмируем по основанию $\frac{1}{5}$

$\log_{5^{(-1)}} 1 \geq \log_5 t$

$0 \geq \log_5 t$

$(5-1)(t-1) \leq 0$

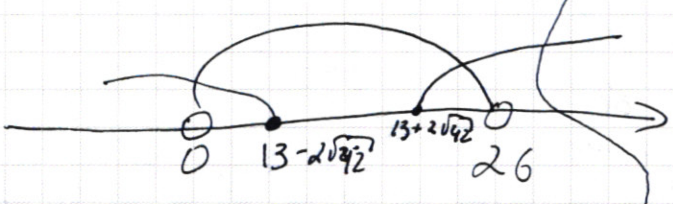
~~$t \leq$~~ с учетом ограничений $t \in (0;1)$

3) при $t=1$ равенство выполняется $\Rightarrow t \in (0;1]$

4) $\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-26) < 0 \\ x^2 - 26x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$x^2 - 26x + 1 = 0$

$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4}}{2} = 13 \pm \sqrt{13^2 - 1} = 13 \pm \sqrt{168} = 13 \pm 2\sqrt{42}$



~~25~~ $25 + 12^2 - 13^2$

Ответ: $x \in (0;\ 13 - 2\sqrt{42}] \cup [13 + 2\sqrt{42};\ 26)$