МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

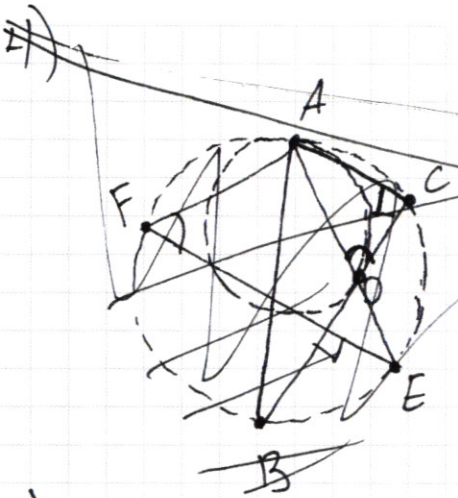
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

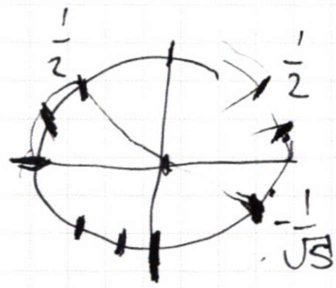
~~1)~~



~~$CD = 8$ $BD = 17 \Rightarrow BC = 25$~~

~~$\angle AFE = \angle ABE$, т.к. опираются на $\cup AE$~~

~~$\angle EOA = \angle AFE$, как~~



$$1)\begin{cases} \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\cdot\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$2\cdot -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \qquad \cos 2\beta = \frac{4}{5} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5\cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$1)\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\,\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

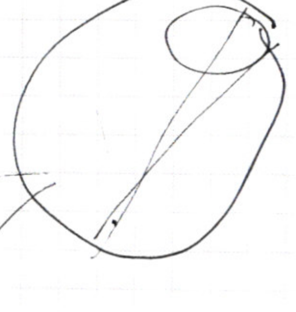
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{-2\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4\cdot 5}{5\cdot 3}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{15\cdot 3}{2} - 17 =$$

$$\frac{131}{43}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$t^{\log_{12}5} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

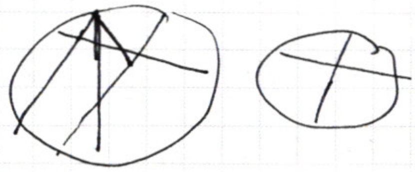
$x^a + x^c \geqslant$

$\sin 2\alpha \cos 4\alpha + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$[\cancel{-12}\ \cancel{2{,}8}\ \ -2{,}75;\ -0{,}75]$



$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq$

$8x^2+30x-17 =$ $D = 900 + 17\cdot 32 = 2(450+17\cdot 16)$

$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$

$-\frac{11}{4}\cdot 12 + 11 = -33+11 = \frac{-22}{-11+3} = -\frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$

$\frac{11^2}{4^2}\cdot 8 + 30\cdot\frac{11}{4} - 17$ $\quad 11\cdot 26 - 34$

$\frac{11^2}{2} + \frac{15\cdot 11}{2} - 17 = \frac{11(11+15)-34}{2}$

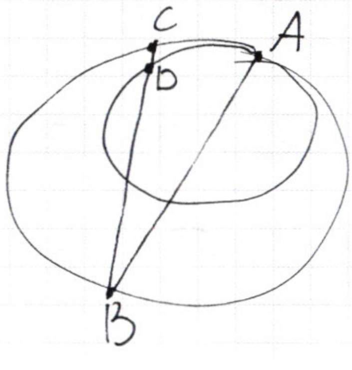
$\frac{9}{16}\cdot 8 + \frac{3}{4}\cdot 30 - 17$

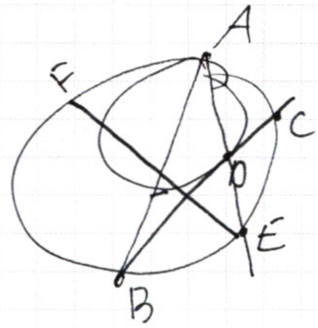
$\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17$

$27 - 17$

$\frac{8}{(4x+3)^2} = \frac{8}{16x^2+24x+9}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$



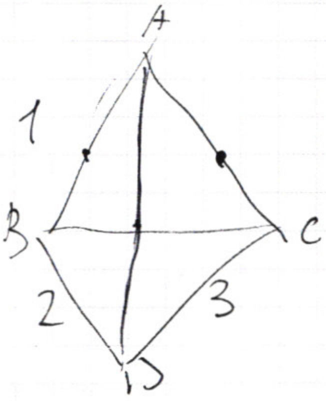


2A3C

$9^t + 16^t \geqslant 25^t$

~~3+4>5~~

$18\cdot 18 = 324$ $\quad 24\cdot 24 = 576$, $576 + 324 = 900$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad 2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\left(\cancel{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 4\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\cos 2\alpha+\sin^2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta +$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) = -\frac{4}{5}-\cos 2\alpha\sin 4\beta$

2) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $\quad x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$ $\quad x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$ $\quad D=\cancel{(1-5y)^2}\ 1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$ $\quad$ 1) $\frac{8y-4}{2}=4y-2$

2) $\frac{2y+2}{2}=y+1$ $\quad x-2y\geq 0$ $\quad \cancel{1-5y}\ 3y-3\geq 0$ $\quad y-1\geq 0$

$x^2-\cancel{4x}+4+9y-18y+9=25$

$x^2+9y-\cancel{4x}-18y=12$ $\quad 5y-1+3y-3=8y-4$

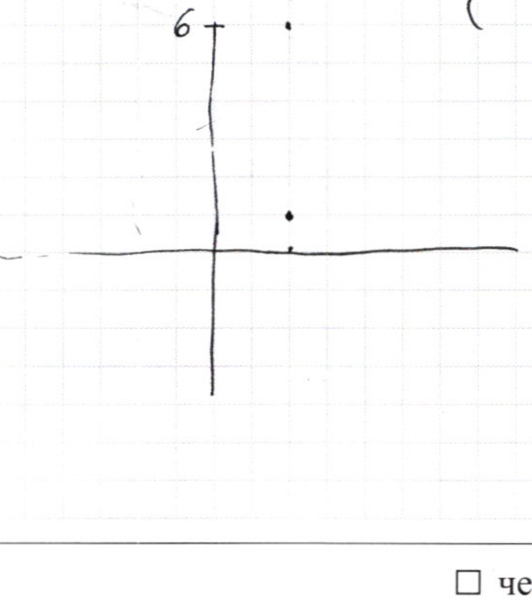
$5y-1-3y+3=2y+2$

$5y-1$

$\cancel{x-2y=x-}$ $\quad 4y-2-2y=2y-2\geq 0$

$y+1-2y=1-y\geq 0$ $\quad y\leq 1$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2$



$0+9\cdot x=5^2$

$x=\frac{5^2}{}$

$(x-1)^2=\frac{5}{3}$ $\quad x=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$

$x-1=-\frac{5}{3}$ $\quad x=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$

y

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x=4y-2$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

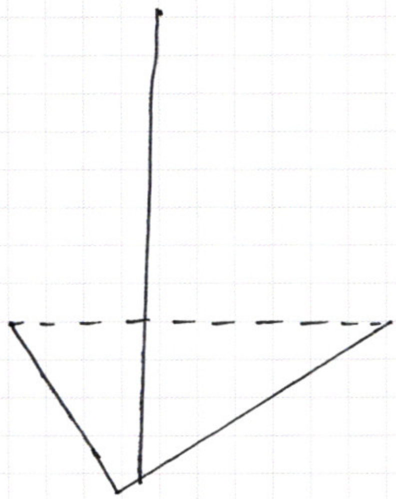
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)



$2\sin(2x+2y)\cos(2y)$

$\sin2\gamma\cos4\gamma + \sin4\beta\cos2\gamma + \sin2\alpha =$

$\sin2\alpha(\cos4\beta+1) + \sin4\beta\cos2\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \end{cases}$

$x-2y\geq 0 \qquad x^2-4yx+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0 \qquad D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\dfrac{5y-1+|3y-3|}{2} \qquad x_2=\dfrac{5y-1-|3y-3|}{2}$

1) $y\geq 1: \quad x_1=4y-2 \quad x_2=y+1$

2) $y<1 \quad x_1=y+1 \quad x_2=4y-2$

Учтем то, что $x-2y\geq 0$: $x=4y-2$

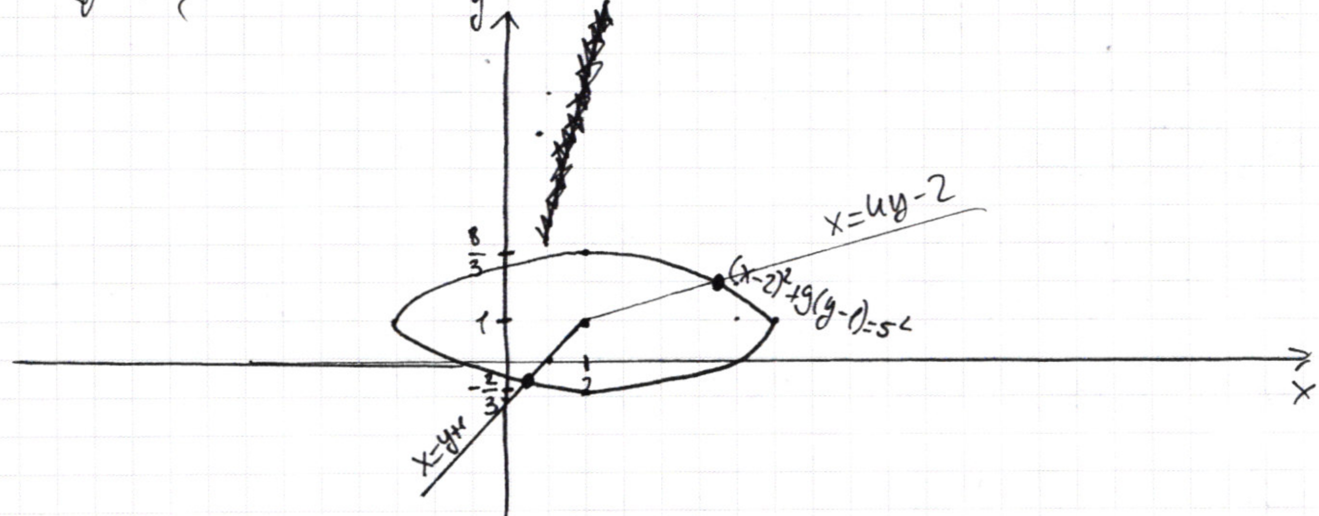
$4y-2-2y\geq 0 \quad y\geq 1$

$x=y+1 \quad : \quad y+1-2y=1-y\geq 0 \quad y\leq 1$

$\Rightarrow$ корень $x=4y-2$, $y\in[1;\infty)$

$x=y+1$, $y\in[-\infty;1]$

изобразим корни графически



По графику можно заметить, что есть 2 пересечение.

$x=4y-2:\quad (4y-4)^2+(3y-3)^2=25$

$16y^2-32y+16+9y^2-18y+9=25\qquad 25y^2-50y=0$

$25y(y-2)=0\quad y=0\quad y=2$, т.к $y\geq 1$, то $y=2$

$x=6$

$x=y+1:\quad (y-1)^2+(3y-3)^2=25$

$y^2-2y+1+9y^2-18y+9=25\qquad 10y^2-20y-15=0\ :5$

$2y^2-4y-3=0\quad D=16+24=40$

$y=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$, т.к $y\leq 1$, то $y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}\quad y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$; $x=6\quad y=2$

3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0\qquad x(x+18)>0\qquad x\in(-\infty;-18)\cup(0;\infty)$

$\Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

пусть $t=x^2+18x\qquad t>0$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}\geq 0\qquad y=\frac{\log_{12}t}{2}$

$5^{2y}+12^{2y}\geq 13^{2y}$

$25^y+144^y\geq 169^y\Rightarrow y\leq 1\Rightarrow \log_{144}t\leq 1$

$\log_{144}{x^2+18x}\leq\log_{144}144$

$x^2+18x-144\leq 0\qquad D=324+576=30^2$

$x=\frac{-18\pm30}{2}=-9\pm15\qquad x_1=6\quad x_2=-24\Rightarrow x\in[-24;6]$,

учтем ОДЗ, $\Rightarrow x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$x \in [-2{,}75; -0{,}75)$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$, функция убывает

при $x \in (-1\frac{7}{8}; \infty)$

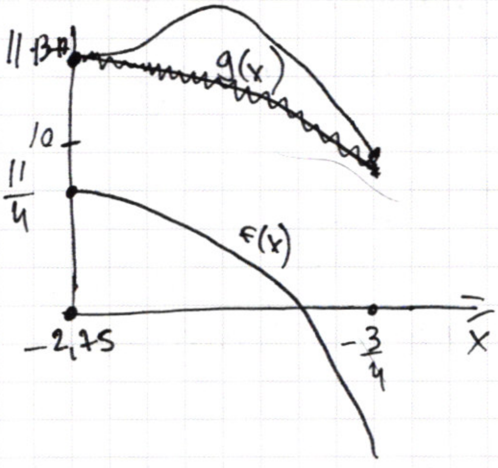
функция $-8x^2-30x-17$ тоже убывает, её max значение достигается при $x = \frac{30}{-16} = -1\frac{7}{8}$

при $x=-2{,}75$ $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{11}{4}$

$-8x^2-30x-17 = 11\cdot 13-17$

при $x=-0{,}75$ $-8x^2-30x-17=10$

пусть $f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}$ $g(x)=-8x^2-30x-17$



$ax+b$ тоже должен убывать при $x \in [-2{,}75; -\frac{3}{4})$

$$\begin{cases} -\frac{a\cdot 11}{4}+b \le 11\cdot 13-17 \\ -\frac{a\cdot 11}{4}+b \ge \frac{11}{4} \end{cases}$$

$(ax+b)' < g'(x)$ $(ax+b)' > f'(x)$

$a < -8x-30$

$a > \frac{8}{(4x+3)^2}$

Заметим, что $a=0$ $b=10$ - подходит

пусть $ax+b \le 10$ $ax+b \ge \frac{11}{4}$

$a=0$ $b=\frac{11}{4}$ - подходит

Ответ: ~~(a=0, b=10)~~ $a=0$; $b \in [\frac{11}{4}; 10]$

5) $f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(1)=[\frac{1}{4}]=0$ $f(2)=[\frac{2}{4}]=0$ $f(3)=[\frac{3}{4}]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

т.к функция f определена только на множестве рациональных чисел, то $f(4)$ нельзя записать, как $f(-2)+f(-2)$

$\Rightarrow \frac{p}{4}$ не может быть отрицательным, т.к $p \geq 0$,

$\Rightarrow \min [\frac{p}{4}]=0 \Rightarrow f(x)+f(\frac{1}{y})$ всегда ≥ 0,

Ответ: 0

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\frac{-2}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac{4}{5}$ $\cos2\beta=\frac{4\cdot\sqrt5}{5\cdot2}=\frac{2}{\sqrt5}$ $\sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin(2\alpha+\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha=2\pi n \Rightarrow \alpha=\pi n \quad tg(\alpha) \text{ не определен } (n\in Z) \\ 2\alpha=\pi - 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) \quad tg(\pi-2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))=-tg(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))= \\ =\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{5}}=\frac{4\cdot5}{5\cdot3}=\frac{4}{3} \end{array}\right.$

2) $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}))=-\frac{1}{\sqrt5}$

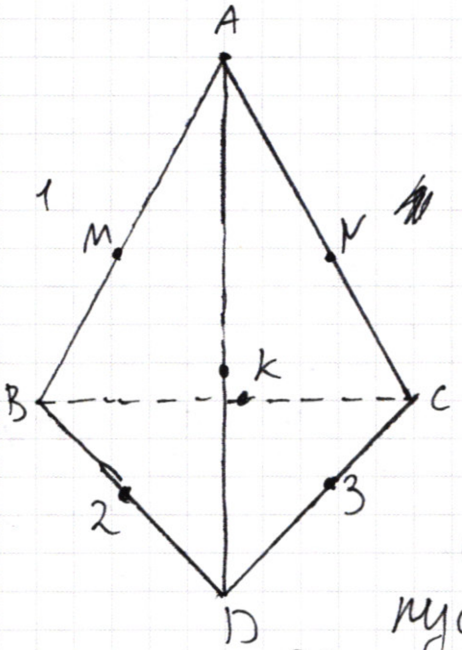
$2\alpha=\pi n$ $\alpha=\frac{\pi n}{2}$ $tg\alpha=\pm1$, но при $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $n\in Z$

$2\alpha=-2\arcsin(\frac{1}{\sqrt5})=-\frac{4}{3}$

Ответ: $tg(\alpha)=\pm1$; $tg(\alpha)=\pm\frac{4}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)

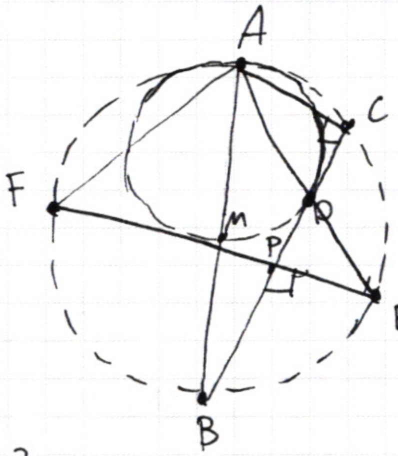


~~Т.к точки а лежат на сфере, и середины AB и AC, назовем их M, N соответственно, то AM=NA=BM=NC (т.к это середины ребер) => AB=AC=1~~

Т.к ~~окружность~~ шар лежит на серединах ребер CD, BD, BC, то пусть k — середина BC.

$BC=BK+KC=\frac{BD}{2}+\frac{CD}{2}=1{,}5$, т.к касательные из одной точки к сфере равны.

4)



$CD=8 \quad BD=17$

Пусть AB пересекает окр. W в точке M, AM — диаметр W, т.к если провести касательную к точке A, то $AM \perp$ касательной, т.к $BD \perp$ касательной. ~~BM~~ $BM \cdot BA = BD^2 = 17^2$ $\angle BCA$ — прямой $\triangle ACD \sim \triangle DPE$ (P — точка пересечения BC и FE) по двум углам (прямые и $\angle PDE = ADC$ как верт.) $\frac{PE}{AC} = \frac{PD}{DC} = \frac{DE}{AC}$ $AC \parallel PE$. $AC = PE$ $\Rightarrow PD = DC = 8$ $BP = 9$ $\angle ABC = 30^\circ$ $AB = \frac{2BC}{\sqrt{3}} = \frac{50}{\sqrt{3}}$ — $2R$ большей
$BM = \frac{17^2 \cdot \sqrt{3}}{50}$ $AM = AB - BM = \frac{50}{\sqrt{3}} - \frac{17^2 \cdot \sqrt{3}}{50} = 2r$ маленькой окр

Ответ: $r(\Omega) = \frac{25}{\sqrt{3}}$, $r(W) = \frac{25}{\sqrt{3}} - \frac{17^2\sqrt{3}}{100}$

~~AE=2DE~~