МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$x^2+6x=y$$

$D=36-4y=$
$=4(9-y)\geq 0$
$y\leq 9$.
$y\geq 0$.

$$3^{\log_4 y} \geq y^{\log_4 5}-y$$

$$\log_y(3^{\log_4 y}+y)\geq \log_4 5$$

$$\frac{\log_5(3^{\log_4 y}+y)}{\log_5 y}\geq \log_4 5$$

$$f(y)=\left(\frac{\ln(3^{\log_4 y}+y)}{\ln y}\right)$$

$$f'(y)=\frac{\frac{\ln y}{3^{\log_4 y}+y}-\frac{\ln(3^{\log_4 y}+y)}{y}}{(\ln y)^2}$$

$$3^{\log_4 y}=3^{\frac{\log_3 y}{\log_3 4}}=y^{\frac{1}{\log_3 4}}=y^{\log_4 3}$$

$$g(y)=y\ln y$$

$$g'(y)=1\cdot\ln y+\frac{1}{y}\cdot y=\ln y+1=0$$

$\ln y=-1$

$y=\frac{1}{e}=e^{-1}$

$$\xrightarrow[\quad - \quad \frac{1}{e} \quad + \quad]{} y$$

y

$$\frac{\log_5(3^{\log_4 y}+y)-\log_4 y}{\log_5 y}$$

$$\log_4 5=\frac{\log_y 5}{\log_y 4}$$

$$\log_4 y \geqslant \log_3 \left(y^{\log_4 5} - y \right)$$

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 4} \geqslant \log_3 y + \log_3 \left(y^{\log_4(5)-1} - 1 \right)$$

$$\log_3 \left(y^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1 \right)$$

$$\log_3 y \left(\underbrace{\log_4 3 - 1}_{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)} \right) \geqslant \log_3 \left(y^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} - 1 \right)$$

1) $\cancel{y}$ $\log_3 y > 0 \quad y > 1$

$\cancel{y > 1}$

$\cancel{\log_4 \frac{3}{4} \geqslant \log_y \left(y^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}\right.} - 1 \Big)$

$\cancel{\log_y \left(y^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} \right)}$

$\log_4 3 \geqslant 1 + \log_y \left(y^{\log_4 5 - 1} \right.$ $\cancel{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}$ $\Big)$

$\cancel{\log_4 3 \geqslant}$ $\qquad \cancel{1 + \log_4 5 - 1}$

$y < 1 \quad \log_3 y < 0$

$\log_4 3 \leqslant 1 + \log_y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $2\alpha + 2\beta = \gamma$ $|\cos\gamma| = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(\gamma + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin\gamma\cos 2\beta + \cos\gamma\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

1) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}(4\sin 2\beta - \cos 2\beta) = -\frac{8}{17} - \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

№2

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2 =$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$ $= 3y(x-1) - 2(x-1)$

$\underline{9y^2} + \underline{4x^2} - 15xy + 2x + 3y + 2 = \underline{3x^2} + \underline{3y^2} - 6x - 4y$

$6y^2 + x^2 - 15xy + 8x + 7y + 2 = 0$

$3x^2 - 6x + 3 - 3 + 3y^2 - 4y - 4 = 0$

$3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y - 7 = 0$

$\cancel{(x-1)^2 = \frac{3y^2 - 4y + 7}{3}}$

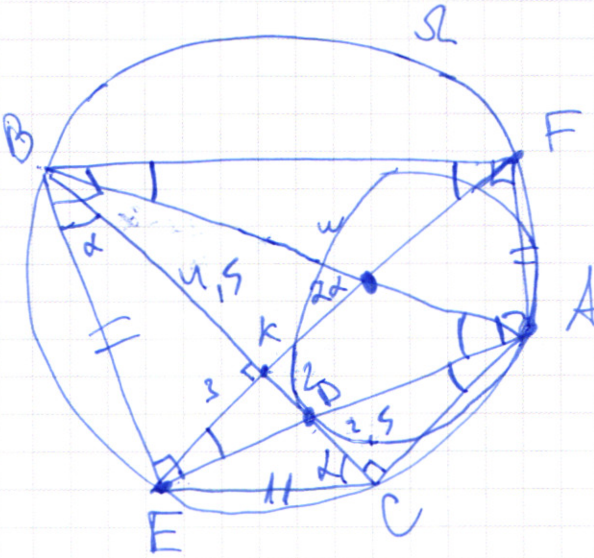
$\frac{3y - 2x}{3y - 2} = 3y - 2$

$(3y - 2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

$(3y-2)^2 =$
$= 9y^2 - 12y + 4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$CD = \frac{5}{2} = 2,5$ $\quad BD = \frac{13}{2} = 6,5$

$\boxed{EF \parallel AC}$ $\angle AFE - ?$

$S_{\triangle AEF} - ?$

$$\frac{EF}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{5} = \frac{BD}{CD}$$

$5AB = 13AC$

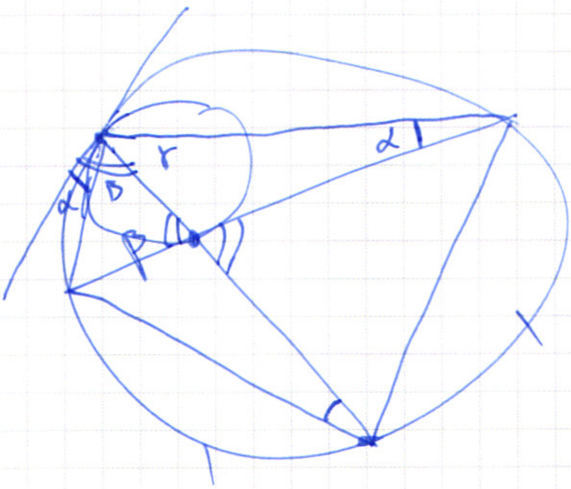
$BC = 9$ $\quad AC = x$ $\quad AB = \frac{13}{5}x$

$\gamma + \alpha = \beta$

$\gamma = \beta - \alpha$

$81 + AC^2 = AB^2$

$81 + x^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 x^2$



~~$\triangle ABE \sim \triangle ADC$~~

$9 = x \cdot \frac{12}{5}$

$\sin\alpha = \frac{CD}{AB}$ $\qquad x = \frac{9^3 \cdot 5}{12_4}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AC}$

$81 = x^2\left(\frac{169}{25} - 1\right) = x^2\left(\frac{12}{5}\right)^2$

$x = \frac{9^3 \cdot 5}{12_4} = \frac{15}{4}$

$\boxed{BK = KC = 4,5}$

~~$13AC = 5AB$~~

~~$13CD = 5BD$~~

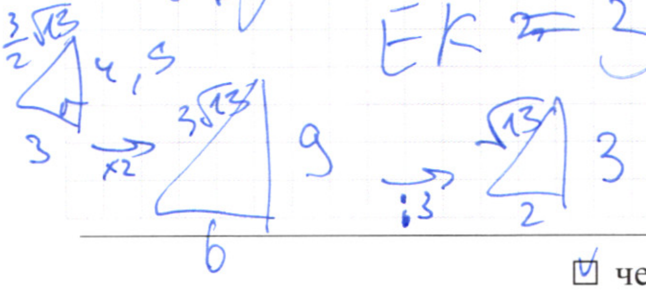
$\cos\alpha = \frac{9}{BE} = \frac{AC}{AD}$

$\sin\alpha = \frac{AF}{AB} = \frac{EK}{EC}$

$r = \frac{39}{8}$ $\qquad AB = \frac{AF}{\sin\alpha}$

$EK = 3$

$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$



$AB = \frac{13}{5} \cdot \frac{15^3}{4} = \frac{39}{4}$

$\boxed{x = \frac{15}{4}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

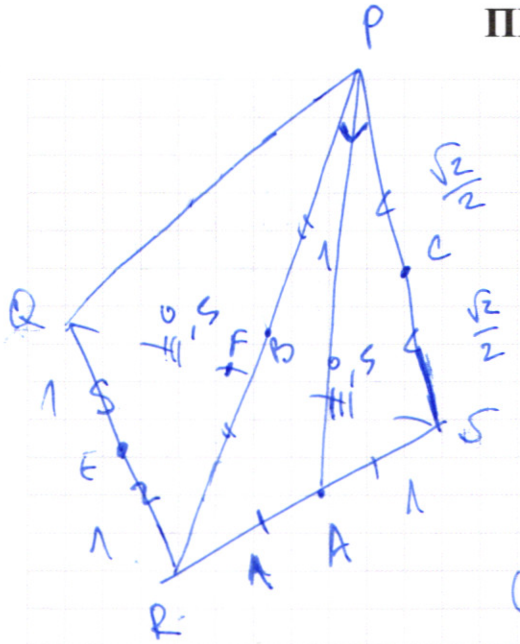
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

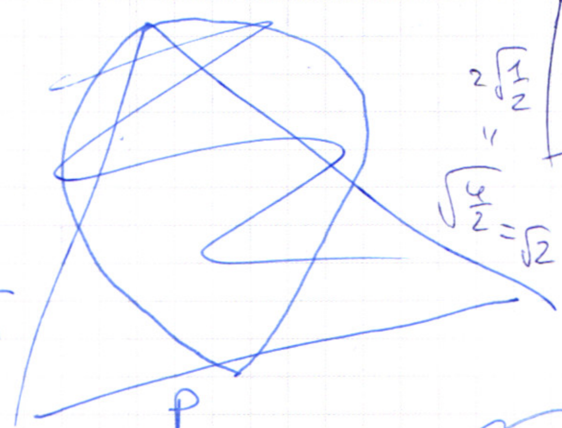
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

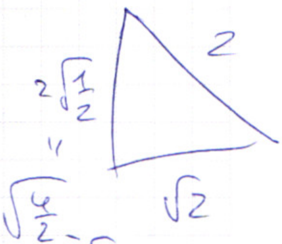


$QR=2$ $QS=1$, $PS=\sqrt2$

$RS-?$

$\sqrt{2+2}=\sqrt4=2$

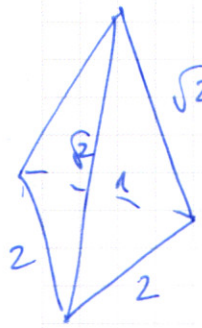


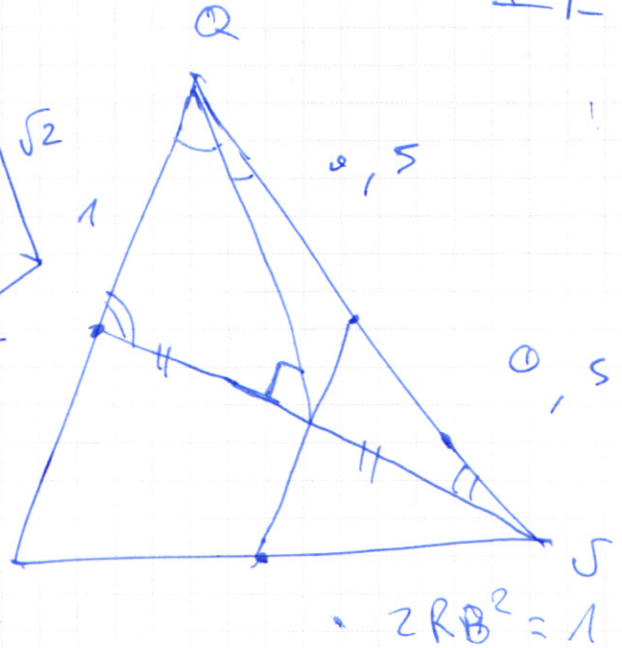


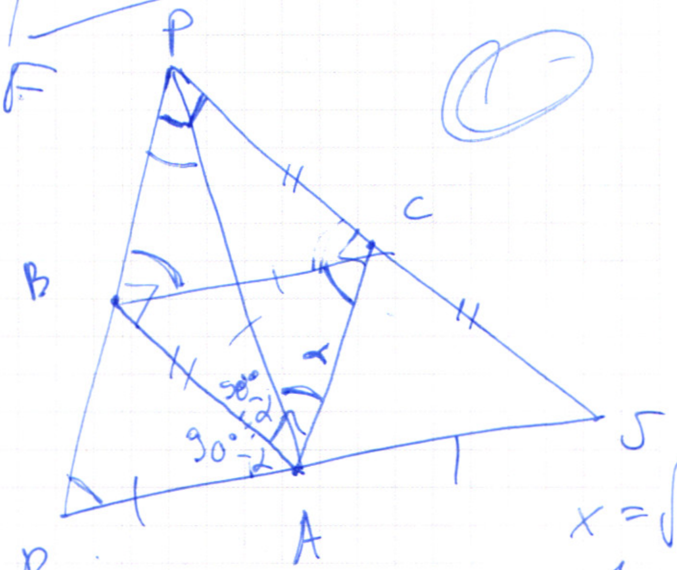
$\sqrt{\frac42}=\sqrt2$

$QP\perp RS$

$BE\perp EF$







$x=\sqrt{\frac12}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$

$2RB^2=1\cdot RX$

$4x^2=2$

$x^2=\frac12$ $x=\sqrt{\frac12}$

$RB\cdot RP=RB\cdot 2RB=2RB^2$

$||$

RA^2

$8x^2=4RA^2=(2RA)^2=$

$=RS^2=(2x)^2+(\sqrt2)^2=4x^2+2$

$2x^2=RA^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{y}{y^2}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}\right) =$

$2f(y) + 2f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right) = a}$

$\cancel{f(y) = b}$

$f\left(\frac{1}{y^2}\right) = 2f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{a = b + a^2}$

$\cancel{a^2 - a + b = 0}$

$\cancel{D = 1 - 4}$

$$\begin{array}{r} 141 \\ \times\ 147 \\ \hline 1029 \\ +588 \\ 147 \\ \hline 21609 \end{array}$$

$f\left(\frac{1}{y}\right) - 2f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y)$

$\underbrace{\quad}_{-f\left(\frac{1}{y}\right)}$ $\qquad f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$(3y - 2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ 8 \\ \hline 43 \end{array}$$

$3(x-1)^2 - 3 + 3y^2 - 4y - 4 = 0$

$$\begin{array}{r} 40 \\ -20 \\ \hline 20 \end{array}$$

$\cancel{9y^2 - 12y + 4} = \frac{1}{3}\left(3y^2 - 4y + \frac{4}{3}\right) = 3(3y-2)^2$

$3(x-1)^2 + 3(3y-2)^2 - 3 - 4 - \frac{4}{3} = 0$

$b_{1,2} = \dfrac{5a \pm 5\sqrt{a^2 - 4}}{6}$

$(a+b)^2 = \frac{25}{3} + 2(a-2b)^2$

$\cancel{(a+b)^2 = \frac{25}{3} +}$

$$\begin{array}{r} 43\ \cancel{00} \\ \times\ 4 \\ \hline 17200 \\ -\ 2500 \\ \hline 14700 \end{array}$$

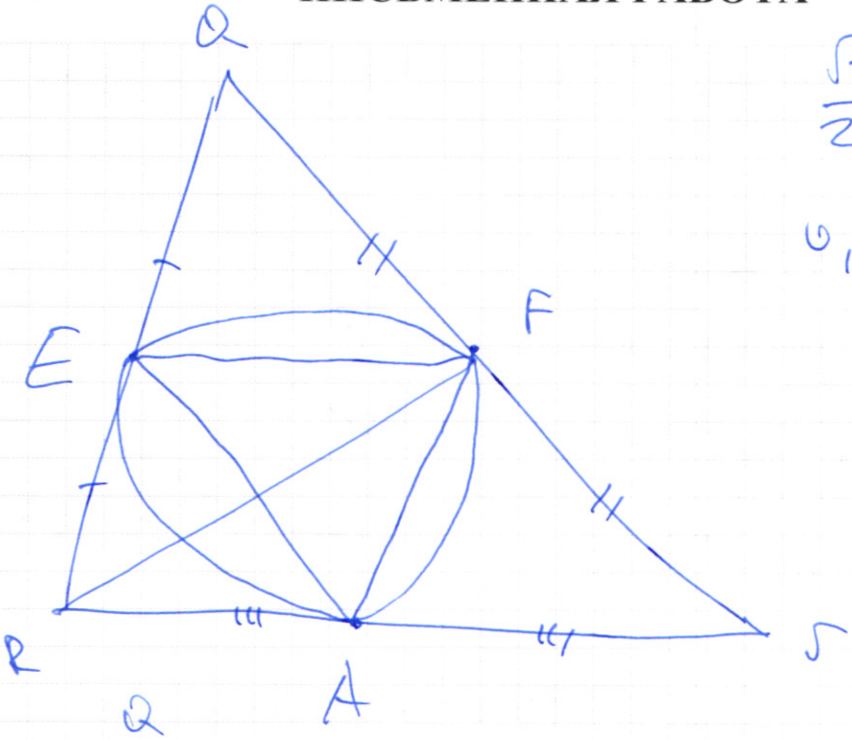
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1$

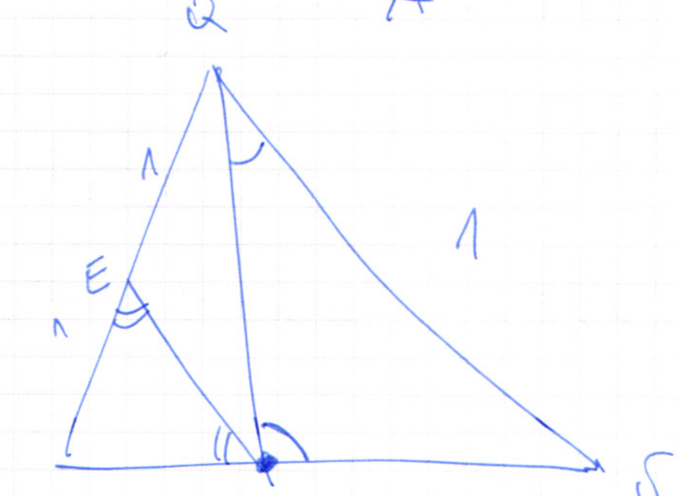
$0,5\cdot SX=1$

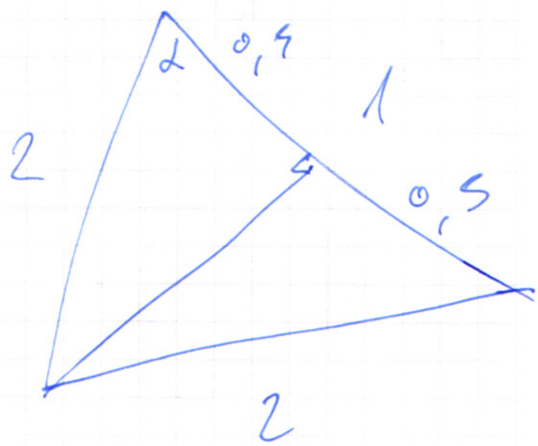
$SX=2$

X – вт. т. пересеч. с SQ

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos\alpha=\frac{0,5}{2}=\frac{1}{4}$





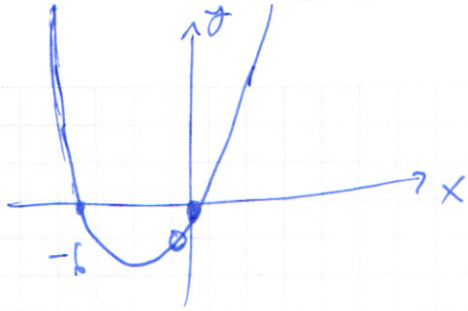
$\frac{\cancel{1}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\cancel{2}R$

$\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

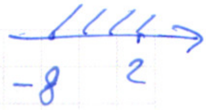
$\frac{4}{\sqrt{15}}=R$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$x^2+6x \le 16$



$x^2+6x-16 \le 0$

$D = 36+4\cdot 16 =$

$= 4(9+16) =$

$= 100$

$x_{1,2} = \frac{-6\pm 10}{2}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -8$.

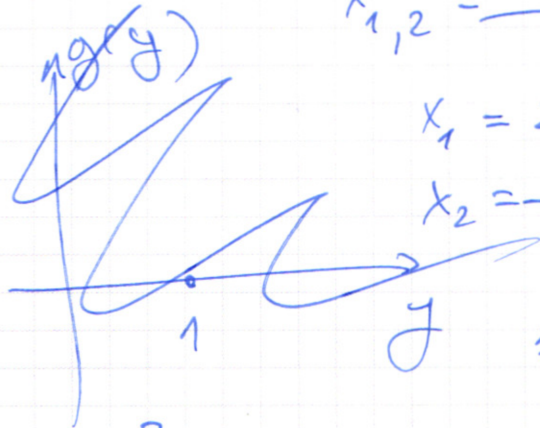
$g(y) = y^{\log_4 5 - 1} - y^{\log_4 3 - 1} = 1$

$y \ge 1$ $\quad g(y) \nearrow$

$g(1) = 0$

$y \le 1$ $\quad g(y)$

$g(1) = 0$



корней ≤ 2

~~$(4^{-1})^{\log_4 5} - 4^{-1}$~~

$\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 12 =$

$5^3 - 3^3 - 4^3 =$

$= 125 - 27 - 64$

$y \ge 1$

$y^{\log_4 5 - 1} \ge y^{\log_4 3 - 1}$

$y \le 1$ – нет корней.

$y^{\log_4 5 - 1} \le y^{\log_4 3 - 1}$

$y^{\log_4 3 - 1}\left(y^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right)$

$18 \times 16 = 108 + 18 = 288$

$288 \times 68 = 404$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^{\log_4 3} - y^{\log_4 5} \geq -y$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$y^{\log_4 5} - y^{\log_4 3} \leq y$

$y^{\log_4 \frac{5}{4}} - y^{\log \frac{3}{4}} \leq 1$

$y^{\log_4 \frac{5}{4}} \cancel{- y^{\log}} \leq 1 + y^{\log \frac{3}{4}}$ $f(y) \leq 0$

$\log_4 \frac{5}{4} \leq \cancel{x} \log_y \left(1 + y^{\log_4 \frac{3}{4}}\right)$

$f(y) = y^{\log_4 5} - y^{\log_4 3} - y \leq 0$

$y = 4^2$ – корень.

$\cancel{f'(y) = \log_4 5 \cdot y}$

$\cancel{y^{\log_4 5} = y^{\frac{\log_y 5}{\log_y}}}$

$y = 4$

5 – 3 – 4

$y^{\log_4 3} \geq y^{\log_4 5} - y$

$\log_4 3 \geq 1 + \underbrace{\log_y \left(y^{\log_4 5 - 1} - 1\right)}_{h(y)}$

$\cancel{h'(y) = (\log_4 5 - 1)(y^{\log_4 5 - 2})}$

$\log_4 5\, y^{\log_4 5 - 1} - \cancel{y} \log_4 3 \cdot y^{\log_4 3 - 1} - 1$

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$.

$f(3) = 0 \qquad f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1 \qquad f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y^2}\cdot y\right) =$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$.

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 1+1 = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

0) 10

1) 7

2) 3

3) 2

4) 2

5) 1

$\frac{12-3}{6-2} = \frac{11}{4}$

~~34~~

~~$y \in \{ 2, 7, 10, 112,$~~

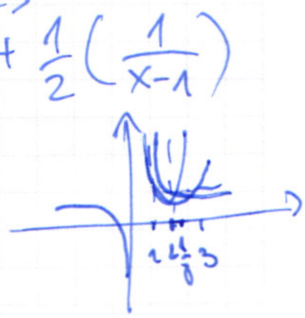
$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{y}{y^2}\right) = y + f\left(\frac{1}{y^2}\right) = \cancel{y + f\left(\frac{y^2}{y^4}\right)}$

$\cancel{= y + y^2 + f\left(\frac{1}{y^4}\right)}$

$27 - 2 = 25$

$2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$= y + f\left(\frac{y}{y^3}\right) = 2y + f\left(\frac{1}{y^3}\right)$



$\frac{4x - 4 + 1}{2x-2} \geq 8x^2 - 34x + 30$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

$x_0 = \frac{34}{16} = \frac{32+2}{16} = 2 + \frac{1}{8} = 2\frac{1}{8}$

$72 + 30 - 34\cdot 3 = \frac{1}{2x-2} \geq 8x^2 - 34x + 28 = 2(4x^2 -$

$= 102 - 90 - 12 = -10$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

пусть $x^2+6x=y$

$3^{\log_4 y} \geq |y|^{\log_4 5} - y$ ОДЗ: $y>0$

на ОДЗ:

$3^{\log_4 y} \geq y^{\log_4 5} - y$

$3^{\log_4 y} = 3^{\frac{\log_3 y}{\log_3 4}} = \left(3^{\log_3 y}\right)^{\frac{1}{\log_3 4}} =$

$= y^{\log_4 3}$

$y^{\log_4 5} - y^{\log_4 3} - y \leq 0$

$y>0$ по ОДЗ, поэтому можем сократить:

$y^{\log_4 5 - 1} - y^{\log_4 3 - 1} \leq 1$

если $y \leq 1$, то $y^{\log_4 5 - 1} \leq y^{\log_4 3 - 1}$

т.е. левая часть нер-ва отрицательная.

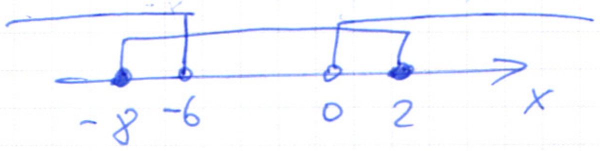
если $y \geq 1$, то левая часть нер-ва возрастает и равенство достигается при $y = 4^2 = 16$.

Получаем нер-во (на ОДЗ):

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

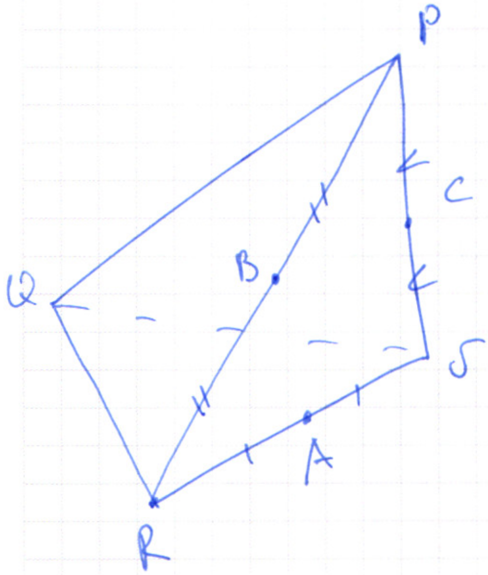
$0 \leq x^2 + 6x \leq 4^2$

$$\begin{cases} (x+8)(x-2) \leq 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$$

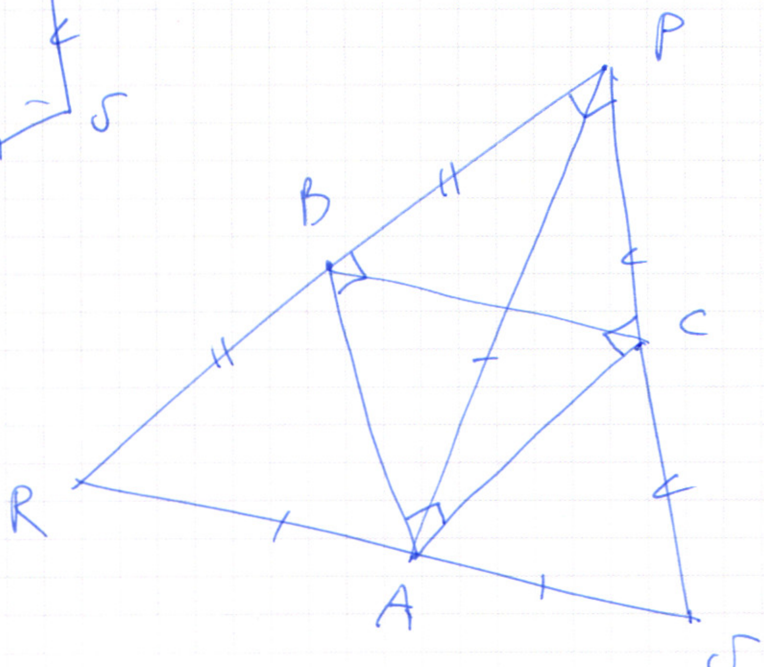


Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

№7



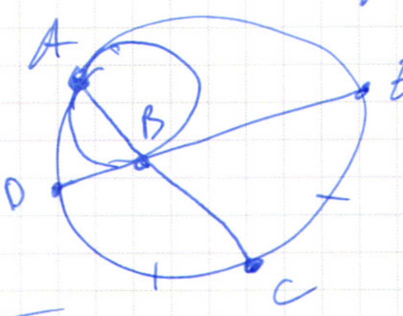
Рассмотрим плоскость (PRS).



Очевидно, что $ABPC$ — параллелограмм, по условию $ABPC$ — вписанный $\Rightarrow$
$\Rightarrow ABPC$ — прямоугольник $\Rightarrow RA = AS = PA$

№ 4

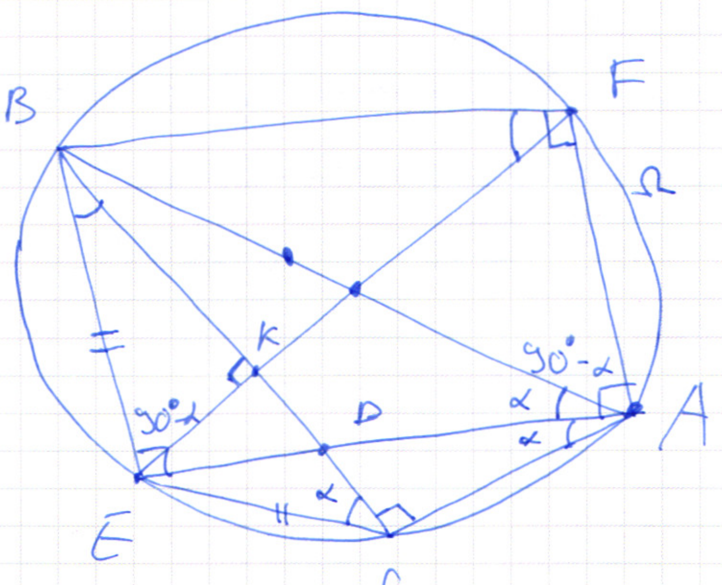
Будем пользоваться следующим утверждением (леммой Архимеда) без доказательства (оно считается известным фактом):



в указанной картинке C является серединой дуги DE.

Перейдём к задаче.

пусть $BC \cap EF = K$, $\angle BAE = \alpha$



По лемме Архимеда $\angle EAC = \alpha$.

~~$\angle EBC = \alpha$ из вписанности CEBA, $BE = EC$ как хорды, стягивающие равные дуги, $\angle BCE = \angle BFE = \alpha$ из вписанности.~~

по св-ву биссектрисы (AD - биссектриса $\triangle ABC$).

$\frac{AB}{AC} = \frac{13}{5}$ $\quad 5AB = 13AC \quad AB = \frac{13}{5}AC$

по т. Пифагора:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$ (AB - диаметр).

$\left(\frac{13}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + AC^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 AC^2$

$81 + AC^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 AC^2$

$AC = \frac{15}{4}$

$AB = \frac{13}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{13 \cdot 3}{4} = \frac{39}{4}$

$r_{Ω} = \frac{39}{8}$

$\triangle BEC$ - равнобедренный $\Rightarrow BK = KC = 4,5$

$\Rightarrow KD = 2, \; CD = 2,5$

В $\triangle BED$ проведена высота $EK \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по известным соотношениям

получаем $EK = \sqrt{BK \cdot KD}$, $EK = 3$.

По т. Пифагора:

$ED^2 = EK^2 + KD^2$

$ED^2 = 9 + 4 = 13$

$ED = \sqrt{13}$

$BE^2 = BK^2 + EK^2 = (4,5)^2 + 9$

$BE = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

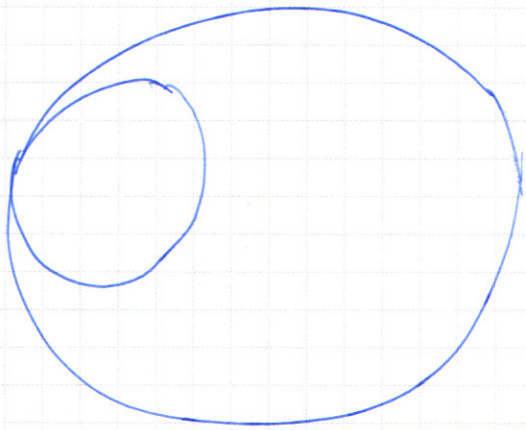
По формуле биссектрисы

$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC = \frac{39}{4} \cdot \frac{15}{4} - \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} =$
$= \frac{65}{4}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1\right) = \frac{65}{4}\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{65 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{13 \cdot 5^2}{4^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{r_\Omega}{r_\omega} = \frac{AE}{AD}$$

$$ED \cdot EA = EC^2$$

$$\frac{ED}{BE} = \frac{BE}{AE}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 13 \\ \hline 81 \\ +\ 27\ \ \\ \hline 351 \end{array}$$

$AD = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

$AE = AD + DE = \frac{5}{4}\sqrt{13} + \sqrt{13} = \sqrt{13}\left(\frac{5}{4}+\frac{4}{4}\right) =$

$= \frac{9}{4}\sqrt{13}$

Ω переходит в ω при гомотетии в т. A, поэтому:

$\frac{r_\Omega}{r_\omega} = \frac{AE}{AD}$; $r_\omega = \frac{r_\Omega \cdot AD}{AE}$

$r_\omega = \frac{\frac{39}{8} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{\sqrt{13}}}{\frac{9}{\cancel{4}} \cdot \cancel{\sqrt{13}}} = \frac{39 \cdot 5}{8 \cdot 9} = \frac{13 \cdot 5}{8 \cdot 3} =$

$= \frac{65}{24}$

$\left.\begin{array}{l}\angle BEK = 90^\circ - \alpha \text{ из } \triangle BEK \\ \angle BEK = \angle BAF \text{ из вписанности}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow EBFA$ - прямоугольник $\Rightarrow BE = FA = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} =$

$= \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $r_\Omega = \frac{39}{8}$, $r_\omega = \frac{65}{24}$,

$S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

~~пусть~~ пусть $3y-2=a$, $x-1=b$

$$3y-2x=(3y-2)-2(x-1)=a-2b$$

$$\boxed{ОДЗ:\ (x-1)(3y-2)\geq 0}$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 3a^2+3b^2=8\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+b^2=\frac{25}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+b^2=\frac{25}{3} \end{cases}$$

$$\cancel{3b^2+\frac{25}{3}=5ab}$$

$$\cancel{3b^2-5ab+\frac{25}{3}=0}$$

$$\cancel{D=(5a)^2-4\cdot 3\cdot\frac{25}{3}=5^2(a^2-4)}$$

$$\cancel{a=\sqrt{\frac{25}{3}-b^2}\quad\left(b^2<\frac{25}{3}\right)}$$

$$\cancel{3b^2+\frac{25}{3}-5b\sqrt{\frac{25}{3}-b^2}=0}$$

$$3b^2+\frac{25}{3}=5ab$$

$$3b^2-5ab+\frac{25}{3}=0$$

$D=5^2(a^2-4)$ ($a^2\geq 4$, иначе корней нет)

$$b_{1,2}=\frac{5a\pm 5\sqrt{a^2-4}}{6}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1) $a^2+\left(\frac{5a+5\sqrt{a^2-4}}{6}\right)^2=\frac{25}{3}$

$a^2+\frac{25}{36}\left(a^2+a^2-4+2a\sqrt{a^2-4}\right)=\frac{25}{3}$

$a^2+\frac{25}{18}a^2-\frac{25}{9}+\frac{25}{18}a\sqrt{a^2-4}=\frac{25\cdot3}{9}$

$\frac{25}{18}a\sqrt{a^2-4}=\frac{25\cdot3+25}{9}-\frac{25+18}{18}a^2$

$25a\sqrt{a^2-4}=200-(25+18)a^2$

$25^2a^2(a^2-4)=a^4(25+18)^2-400\cdot(25+18)\cdot$
$\cdot a^2+40000$

$\cancel{28}\ 625a^4-25^2\cdot4\cdot a^2=a^4\cdot43^2-400\cdot43\cdot a^2+$
$+40000$

$a^4(43-25)(43+25)-400\cdot43\cdot a^2+25^2\cdot4\cdot a^2+$
$+40000=0$

$a^4\cdot18\cdot68+a^2(2500-400\cdot43)+$
$+40000=0$

$a^4\cdot18\cdot68-a^2\cdot14700+40000=0$

$D=(14700)^2-4\cdot18\cdot68\cdot40000=$
$=10^4(147^2-16\cdot18\cdot68)=$
$=10^4(21609$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 заметим, что

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{y}{y^2}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y^2}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}\right)=$$

$$=f(y)+2f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$$

~~f(2)=0~~

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(6)=0$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(12)=0$

$f(16)=0$

$f(18)=0$

$f(24)=0$

$f(27)=0$

10 чисел.

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(10)=1$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

7 чисел.

$f(11)=2$

$f(22)=2$

$f(25)=2$

3 числа

$f(13)=3$

$f(26)=3$

2 числа

$f(17)=4$

$f(19)=4$

2 числа

$f(23)=5$

1 число.

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y).$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Поэтому необходимо посчитать кол-во неупорядоченных пар, для кот-ов которых значения ф-ции не равны

$10(25-10) + 7\cdot(25-7) + 3(25-3) +$

$+ 2(25-2) + 2\cdot(25-2) + 1(25-1) =$

$= 10\cdot 15 + 7\cdot 18 + 3\cdot 22 + 2\cdot 23\cdot 2 + 24 =$

$= 150 + 70 + 56 + 66 + 4\cdot 23 + 24 =$

$= 220 + 56 + 90 + 80 + 12 =$

$= 300 + 90 + 56 + 12 = 300 + 102 + 56 =$

$= 300 + 158 = 458$

Отв: 458.