МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

Из первого уравнения системы $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$,

тогда $\cos 2\beta = \frac{-2}{5\cdot 2\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{-1\sqrt{5}}{5(-1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Из основного тригонометрического тождества следует: $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Тогда: $\sin 4\beta = \pm\frac{2\cdot 2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \pm\frac{4}{5}$; $\cos 4\beta = \frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$.

Преобразуем второе уравнение системы, учитывая найденные значения $\sin 4\beta$ и $\cos 4\beta$:

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{3}{5}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{5}\cos 2\alpha +$

$+\sin 2\alpha = \frac{2}{5}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = 1.$

Рассмотрим 2 случая раскрытия выражения ($\pm 2\cos 2\alpha$):

1) „+": $2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha + 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 3\sin^2\alpha +$

$+3\cos^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

Из условия $\operatorname{tg}\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$, тогда на него можно поделить: $-\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$. Из обратной Th Виета: $\operatorname{tg}\alpha = -1$ либо $\operatorname{tg}\alpha = 3$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) " –": $2\sin\alpha\cos\alpha - 2 + 2\sin^2\alpha + 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

Из условия $\cos\alpha \neq 0$, то нам подходит только случай, когда $2\sin\alpha - \cos\alpha = 0 \,|: \cos\alpha \neq 0$

$$2\,tg\alpha = 1$$
$$tg\alpha = \frac{1}{2}$$

Итак, учитывая, что $tg\alpha$ определён, мы получили 3 значения $tg\alpha$, а по условию их не менее трёх, значит мы можем не делать проверку данных значений $tg\alpha$

$$\boxed{\text{Ответ: } tg\alpha = -1;\ tg\alpha = \frac{1}{2};\ tg\alpha = 3}$$

№3 $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = |10x - x^2| = 10x - x^2$

Преобразуем неравенство: $10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Сделаем замену $t = 10x - x^2$, $t > 0$

$\boxed{t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}}$. Заметим, что так как $t > 0$ правая часть неравенства больше 0 и левая часть неравенства больше нуля. Тогда мы можем прологарифмировать неравенство по основанию 3, учитывая, что $t + t^{\log_3 4} = t(1 + t^{\log_3 4 - 1})$:

$\log_3(t \cdot (1 + t^{\log_3 4 - 1})) \geq \log_3(5^{\log_3 t})$. Заметим, что такой переход является равносильным, так как $3 > 1$.

Учитывая, что $t > 0$ равносильное преобразование:

$$\log_3 t + \log_3(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq \log_3 t \cdot \log_3 5$$

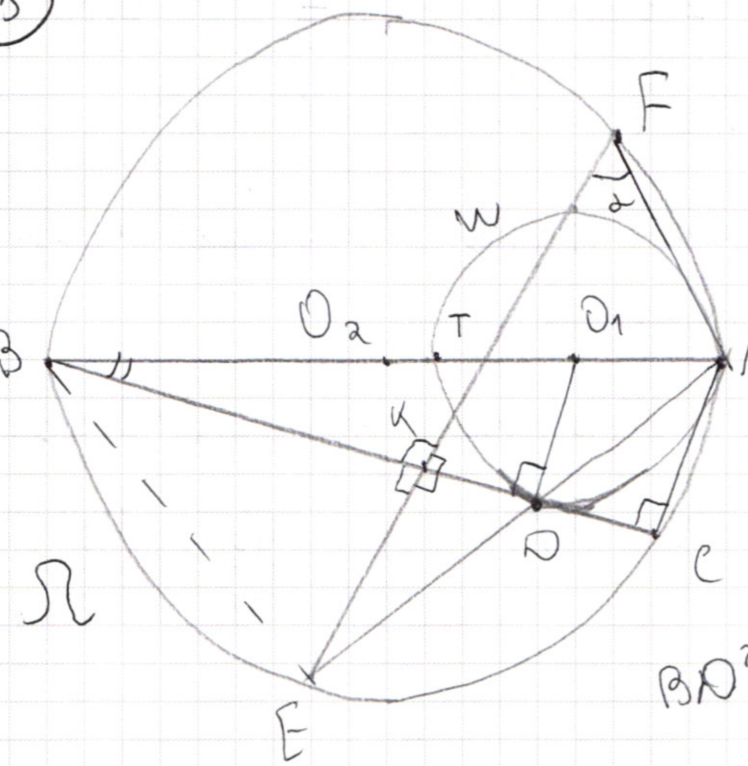
$$\log_3 t \cdot (1 - \log_3 5) + \log_3(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq 0$$

$\log_3$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



$BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16$

$O_1D \perp BC$ (т.к. радиус перпендикулярен касательной).

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр,

т.к. BD – касательная, а BA пересекает окр. w в точках T и A получаем:

$BD^2 = BT \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

Заметим, что $\triangle BO_1D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{2 \cdot 16}$

Учитывая, что $BO_1 = 2R - r$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{2 \cdot 16} \Rightarrow r = \frac{15R}{16} \\ \frac{17^2}{4} = 2R(2R - 2r) \end{cases}$$

Получаем: $\frac{17^2}{4} = 2R\left(2R - 2 \cdot \frac{15R}{16}\right) = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \boxed{R = 17,\ r = \frac{15 \cdot 17}{16}}$

Т. Пифагора для $\triangle ABC$: $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$AC^2 = 4 \cdot 17^2 - 16^2 = 900 \Rightarrow AC = 3\sqrt{100}$

Заметим, что $\angle AFE = \angle ABE = \alpha$, т.к. они оба опираются на дугу AE. Также заметим, что $\angle O_1AD = \angle ADC$ как накрест лежащие. Тогда $tg \angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{3\sqrt{100} \cdot 2}{15} = \frac{2\sqrt{100}}{5} =$

$= 2 \cdot \sqrt{\frac{100}{25}} = 2\sqrt{4} = 4 = tg \angle BAE \Rightarrow \alpha = 90^\circ - arctg\, 4 =$

$= \angle AFE$; $ctg \alpha = 4 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{17}$

Заметим, что EK - высота в $\triangle BED$, выходящая из вершины прямого угла, тогда $\angle EBC = \angle FEA$

$BE = AB \cdot \cos\alpha$, Из подобия $\triangle BEK$ и $\triangle EDK \sim \triangle BED$:

$\frac{BE}{BD} = \frac{BK}{BE} \Rightarrow BE^2 = BK \cdot BD \Rightarrow BK = \frac{BE^2}{BD} = \frac{AB^2 \cdot \cos^2\alpha}{BD} =$

$= \frac{4 \cdot 17^2 \cdot 2 \cdot 16}{17 \cdot 17} = 3$

№2 Из первого уравнения системы получаем:

$\begin{cases} (x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x - 12y \geq 0 \end{cases}$

Получим систему:

$\begin{cases} x \geq 12y \\ x^2 - 24y + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ \end{cases}$

№5 Выпишем некоторые значения $f(a)$, используя условие $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$: $f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$;

$f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$. Аналогично.

$f(6)=0$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(12)=0$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(18)=0$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(24)=0$; $f(25)=$ $=2$

Заметим также, что $f(1)=f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})$ для любых $a\in\mathbb{N}$. Тогда $f(\frac{1}{a})=f(1)-f(a)=0-f(a)$.

Заметим, что $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$.

Значит, нам подходят $(x;y)$ такие, что $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Рассмотрим все возможные случаи, предварительно записав, сколько чисел $f(a)$, где $a\in\mathbb{N}$, $2\le a\le 25$ принимают значения:
0: 10 чисел
1: 7 чисел
2: 3 числа
3: 2 числа
4: 2 числа
5: 1 число

Тогда получить разность $f(x)-f(y)<0$ можно несколькими способами:

1) $f(x)=0$; $f(y)>0$: $10 \cdot 14$ способов

2) $f(x)=1$; $f(y)\geq 2$: $7 \cdot 7$ способов

3) $f(x)=2$; $f(y)\geq 3$: $3 \cdot 4$ способов

4) $f(x)=3$; $f(y)\geq 4$: $1 \cdot 3$ способов

5) $f(x)=4$; $f(y)=5$: $2 \cdot 1$ способов

Значит, всего: $10 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$
$= 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 206$ способов

Ответ: 206 чисел $(x;y)$

№6 Заметим, что необходимо и достаточно найти такие $(a;b)$, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} - ax - b \leq 0 \leq -32x^2 + 36x - 3 - ax - b$$

выполнено для любых $x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

Поработаем с неравенством $0 \leq -32x^2 + 36x - 3 - ax - b$:

Необходимое условие: $\begin{cases} f(\frac{1}{4}) \geq 0 \Rightarrow 4 - \frac{1}{4}a - b \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \Rightarrow 1 - a - b \geq 0 \end{cases}$

Значит, $1 \geq a+b$ — необходимое условие

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{5}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$5(\sin\alpha\cos\alpha) \cancel{*} - 2(1-2\sin^2\alpha) = -1$

$5\sin\alpha\cos\alpha - 2 + 4\sin^2\alpha = -1$

$4\sin^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$

$4\sin^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \mid : \cos^2\alpha$

$3tg^2\alpha - 5tg\alpha - 1 = 0$

$D = 25 + 12 = \sqrt{37}$

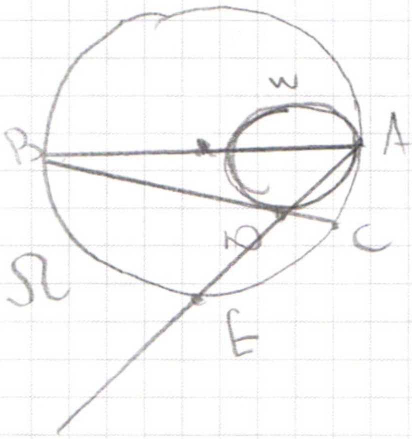
$tg\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№4

$BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$



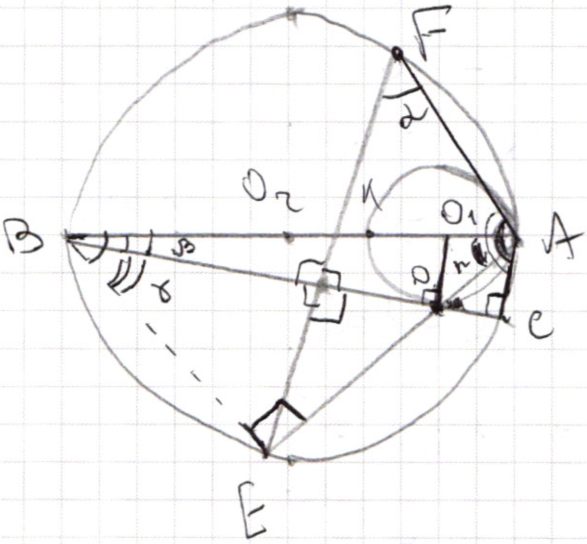
$CЮ = \frac{15}{2}$

$BЮ = \frac{17}{2}$

$R = ?,\ r = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{\triangle AEF} = ?$



$FE \parallel O_1Ю$

$BЮ^2 = BK \cdot BA =$
$= (2R - 2r) \cdot 2R$

$\triangle BO_1Ю \sim \triangle BAC$

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BЮ}{BC} = \frac{17}{2 \cdot 16}$

$BO_1 = 2R - r$

$BA = 2R$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{2 \cdot 16}$

$32R - 16r = 17R$

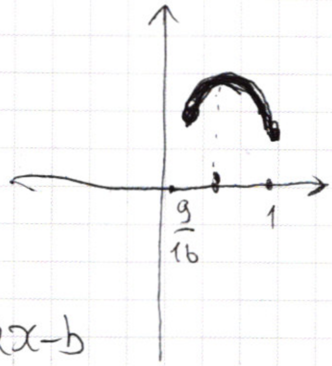
$15R = 16r \Rightarrow r = \frac{15R}{16}$

$\frac{17^2}{4} = 2R\left(2R - 2 \cdot \frac{15R}{16}\right) = 2R\left(2R - \frac{15R}{8}\right) =$
$= 2R\left(\frac{16R}{8} - \frac{15R}{8}\right) = 2R \cdot \frac{R}{8} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \boxed{R = 17;\ r = \frac{15 \cdot 17}{16}}$

№6 $(a;b)$: $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+y \le -32x^2+36x-3$

$f(x) = -32x^2+36x-3$

$x_в = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} > \frac{4}{16}$



$\frac{16x-16}{4x-5} - ax - b \le 0 \le -32x^2+36x-3-ax-b$

$f(\frac{1}{4}) \ge 0$; $f(1) \ge 0$

$16x-16-a$

$-32\cdot\frac{1}{16} + 36\cdot\frac{1}{4} - 3 - \frac{1}{4}a - b \ge 0$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-16-4+4}{4x-5} =$

$-2+9-3-\frac{1}{4}x-b \ge 0$

$4-\frac{1}{4}a-b \ge 0$

$= \frac{16x-20+4}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} =$

$-32+36-3-a-b \ge 0$

$1-a-b \ge 0$

$= 4 + \frac{4}{4x-5}$

$1 \ge a+b$

$16 \ge a+4b$

$4 + \frac{4}{4x-5} - ax - b \le 0$

$-: 2\sin\alpha\cos\alpha - 2 + 3\sin^2\alpha + 1 =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2 - 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha \;|: \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha(2\sin\alpha - \ldots) = 0 \;|: \cos\alpha$

№1 $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = \pm\frac{2\cdot 2}{5} = \pm\frac{4}{5}$ | $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 = +\frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

$tg 2\alpha =$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{3}{5}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$2tg\alpha = 1$

$tg\alpha = \frac{1}{2}$

$= \frac{2}{5}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$ | $\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$-1-2+3 \ge 0$

$-9+6+3 \ge 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 2(1-2\sin^2\alpha) = -1$

1) +: $2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha + 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \;|: \cos^2\alpha \Rightarrow -tg^2\alpha + 2tg\alpha + 3 = 0$ $tg\alpha = -1$

$tg\alpha = 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(4) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) - f(4) =$

$= 0$

$f(2) = f\left(\frac{1}{4}\cdot 8\right)$

$f\left(\frac{1}{2a}\right) = -f(2a)$

$\cancel{f\left(\frac{1}{2{,}5}\right), f(}$

Больше нуля: 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 10; 14; 15; 20; 21; 22; 25.

Подходит: f от 5; 7; 10; 11.

$f\left(\frac{1}{5}\right);\ f\left(\frac{1}{7}\right);\ f\left(\frac{1}{10}\right);\ f\left(\frac{1}{11}\right)$

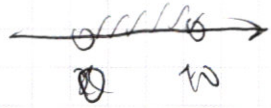
$f(1) = 0$, что подчеркивает $f\left(\frac{1}{5}\right); f\left(\frac{1}{7}\right); f\left(\frac{1}{11}\right), \ldots$

№3 $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

$|x^2-10x|=|10x-x^2|$ $10x-x^2=t,\ t>0$

$\cancel{10x-x^2}$ $t+|t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $x(10-x)>0$



$t+|t|^{\log_3 4}-5^{\log_3 t} \geq 0$

$\cancel{1) t>0:}$ т.к. $t>0$, то $|t|=t$

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t} \geq 0$

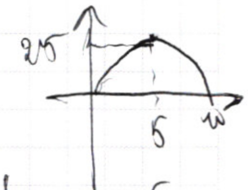
$\cancel{t(1+t^{\log_3 4-1}) \geq 5}$

$\underbrace{t+t^{\log_3 4}}_{>0} \geq \underbrace{5^{\log_3 t}}_{>0}$ $t(1+t^{\log_3 4-1})$

$f(x)=-x^2+10x$

$x_в=\frac{-10}{-2}=5$

$y_в=-25+50=25$



$t_{max}=25$

$\log_3(t+t^{\log_3 4}) \geq \log_3(5^{\log_3 t})$

$\log_3 t+\log_3(t^{\log_3 4-1}) \geq \log_3(5^{\log_3 t})$

$\log_3 t+(\log_3 4-1)\log_3 t \geq \log_3 5\cdot\log_3 t$

$\log_3 t(1+\log_3 4-1-\log_3 5) \geq 0$

$\log_3 t(\log_3 4-\log_3 5) \geq 0$ $\log_3 25 \ \cancel{*} \log_3 27=3$

$\Downarrow$ т.к. <125

$\log_3 t \leq 0$

$\log_3(t+t^{\log_3 4}) \geq \log_3 t\cdot\log_3 5$

$f(t)=t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t}$

$f'(t)=1+\log_3 4\cdot t^{\log_3 4-1}-\ln 5\cdot 5^{\log_3 t}$

$5^{2\log_3 5}=25^{\log_3 5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=\sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+$
$+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

sin

$$\begin{array}{r} \times\ 18\\ 18\\ \hline 144\\ 18\\ \hline 324 \end{array}\qquad \begin{array}{r} +\ 324\\ 36\\ \hline 360 \end{array}$$

№2) $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1)\\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

(1): $\begin{cases} (x-12y)^2=2xy-12y-x+6 & (3)\\ x-12y\geq0 & (4) \end{cases}$

(1): $x^2-24y+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

~~(2): $x^2-12x+36(y$~~

~~x^2-12~~

$x^2-2\cdot6x+36-36+(6y)^2-2\cdot18y+$
$+18^2-18^2-45=(x-6)^2-36+(6y-18)^2-324-45=$
$=(x-6)^2+(6y-18)^2=405$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2): $(x-6)^2+(6y-18)^2=405$

$$\begin{array}{r}144\\ \times\ 4\\ \hline 576\end{array}$$

(1): $\begin{cases} x-12y\geq 0 & (3)\\ x^2-24y+144y^2=2xy-12y-x+6 & (4)\end{cases}$

(4): $x^2-24y+144y^2-2xy+12y+x-6=\cancel{0}$

$=x^2+x-2xy+144y^2-12y-6=0$

$D=(1-2y)^2-4(144y^2-12y-6)=1-4y+4y^2-$
$-576y^2$

(2): $x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

$D_1=36-(36y^2-36y-45)=36-36y^2+36y+45=$
$=-36y^2+36y+81=$

405

$36y^2-36y-81=0$

$12y^2-12y-27=0$

$D_1=144+$

$x-2xy+108y^2-12y-6-$
$+12x+36y+45=0$
$108y^2+24y+13x-2xy+39=0$

$x^2+x(1-2y)+144y^2-12y-6=0$

$\left(\frac{1-2y}{2}\right)^2=\frac{1-4y+4y^2}{2}$

$$\begin{array}{r}144\\ -\ 36\\ \hline 108\end{array}$$

$D_1=(12-x)^2-$
$-108($

$x\geq 12y$

$(x-6)^2+(6(y-3))^2=(x-6)^2+36(y-3)^2$

$\begin{cases} x^2+x-2xy+144y^2-12y-6=0\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$

№5 $f(x)$, где $x > 0$, $x \in Q$

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

Найти кол-во $(x;y)$.

$x, y \in N$

$f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$;

$f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(4) = f(2\cdot2) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(2\cdot3) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = f(2\cdot4) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(12) = 0$

$f(14) = 0 + 1 = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(18) = 0$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$$\begin{array}{r} 189 \\ +\ 17 \\ \hline 206 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\beta = \frac{r}{2R-r}$

$BC^2 + BA^2$

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

$\Downarrow$

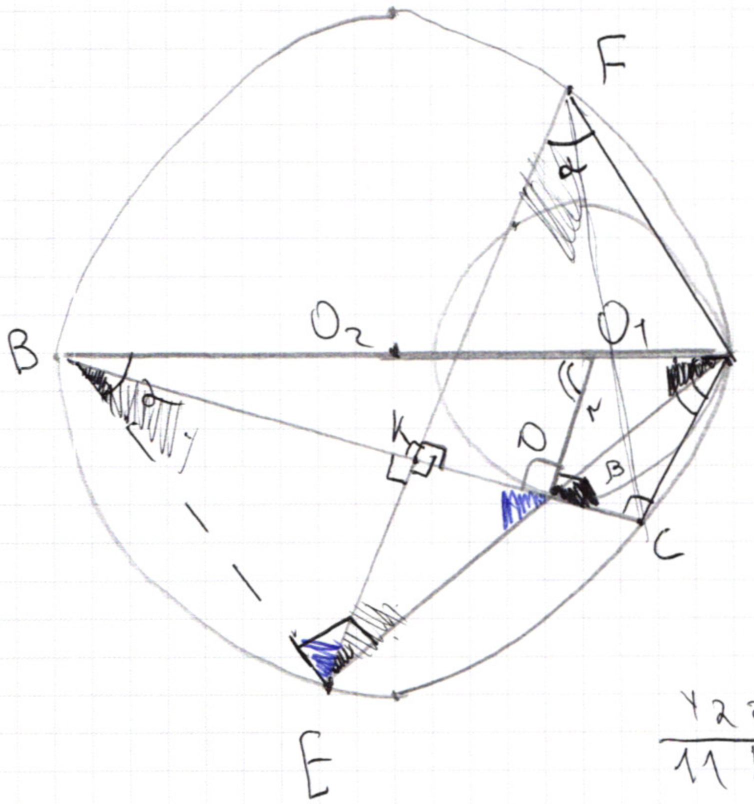
$AC = \ldots$

$\Downarrow$

$tg\,\beta = \frac{AC}{BC}$

$\beta = \ldots$

$\alpha = 90^\circ - \beta$



$\sin\alpha =$ $AE = \ldots$

$\frac{\times 289}{1156}$

$\frac{\times 16}{96}$ $\frac{16}{256}$

$\frac{-1156}{256}$ 900

$AC = 3\sqrt{100}$

$BE = \ldots$

$EA = \ldots$

E

$ctg\,\alpha = 4,\ ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 17 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin 2\beta = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\frac{\sqrt{5}}{2} \sin 2\alpha + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \;|\cdot \sqrt{5}$

$\frac{5}{2} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$5(\sin\alpha \cos\alpha) + 2(1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$5\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = -1$

$-4\sin^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 0$

$4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0$

$\cancel{D = 25\cos^2\alpha + 16\cdot 3}$

$1 - 2\sin^2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin^2\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$4\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \;|: \cos^2\alpha$

$tg^2\alpha - 5 tg\alpha - 3 = 0$

$D = 25 + 12 = 37$

$tg\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

2) $\frac{\sqrt{5}}{2} \sin 2\alpha - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin(2(\alpha+\beta))=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2(\alpha+2\beta))+\sin 2\alpha=2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

~~2cos~~

$2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\frac{-2\cos 2\beta}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{5}{25}}=\pm\sqrt{\frac{20}{25}}=$

$=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)