МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (1)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Раскроем по формулам синуса суммы / разности,

$$\begin{cases} 1)\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2)\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Подставим (1) → (2)

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{По ОТТ})$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Подставим $\sin(2\beta)$ и $\cos(2\beta)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№1(7)

$$\left[\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right.$$

домножим на $\sqrt{5}$ и прибавим 1

~~$\sqrt{5}$~~

рs $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

распишем $\sin(2\alpha)$ и $\cos(2\alpha)$

$$\left[\begin{aligned} &2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \\ &2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0 \end{aligned}\right.$$

Поделим на $\cos^2\alpha$

($\cos^2\alpha \neq 0$ т.к. $tg\alpha$ определён)

$$\left[\begin{aligned} &2\,tg\alpha + 3 - tg^2\alpha = 0 \\ &2\,tg\alpha - 1 + 3\,tg^2\alpha = 0 \end{aligned}\right.$$

решаем совокупность квадратных ур-й через дискриминант

$$\left[\begin{aligned} &tg\alpha = -1 \\ &tg\alpha = 3 \\ &tg\alpha = \frac{1}{3} \\ &tg\alpha = -1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &tg\alpha = -1 \\ &tg\alpha = 3 \\ &tg\alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}\right. \quad \leftarrow \text{Ответ.}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (1)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-12(y-\frac{1}{2})=\sqrt{2(x-6)(y-\frac{1}{2})} \\ (x-6)^2+36(y-\frac{1}{2})^2=90 \end{cases}$$

$x-6=a$

$y-\frac{1}{2}=b$

$$\begin{cases} 1)\ a-12b=\sqrt{2ab} \\ 2)\ a^2+36b^2=90 \end{cases}$$

Заметим, что $a-12b\geq 0$
$2ab\geq 0$.

Пусть $\sqrt{2ab}=0 \Rightarrow a-12b=0$ и $ab=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+36b^2\neq 90 \Rightarrow \sqrt{2ab}\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

Тогда поделим (1) на $\sqrt{ab}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}-12\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{2}$ $\sqrt{\frac{a}{b}}=k>0$

$k-\frac{12}{k}=\sqrt{2}$ т.к. $k>0$ домножим на k

$k^2-\sqrt{2}k-12=0 \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+48}}{2} \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow k=3\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=k^2=18 \Rightarrow a=18b$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (2)

$$\begin{cases} a^2+36b^2=90 \\ a=18b \end{cases} \Rightarrow 20\cdot 18 b^2 = 90 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm 9$$

заметим, что $a \geq 12b$ (см. стр. 3) $\Rightarrow b=\frac{1}{2}$ $a=9$.

$$\begin{cases} x-6=9 \\ y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \leftarrow \text{Ответ.}$$

№3 (1)

$$(10x-x^2)+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Выражение корректно при $y = 10x-x^2 > 0$

$$\begin{cases} y + |-y|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(y)} \\ y>0 \end{cases}$$

$$5^{\log_3(y)} = 5^{\left(\frac{\log_5(y)}{\log_5(3)}\right)} = y^{\frac{1}{\log_5(3)}}$$

$$y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(y)}$$

$$y+y^{\log_3 4} \geq y^{\frac{1}{\log_5(3)}}$$

Рассмотрим функцию

$$f(y) = y + y^{\log_3 4} - y^{\frac{1}{\log_5(3)}}$$

$$f'(y) = 1 + y^{\log_3 4 - \log_3 3} - y^{\left(\frac{1}{\log_5 3}-1\right)}$$

$$\frac{1}{\log_5 3} - 1 = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 3} = \log_3 \frac{5}{3}$$

$$f'(y) = 1 + y^{\log_3 \frac{4}{3}} - y^{\log_3 \frac{5}{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~...~~ Найдём экстремумы №3(2) $f(y)$

$f'(y)=0$

$1 = y^{\log_3 \frac{5}{3}} - y^{\log_3 \frac{4}{3}}$

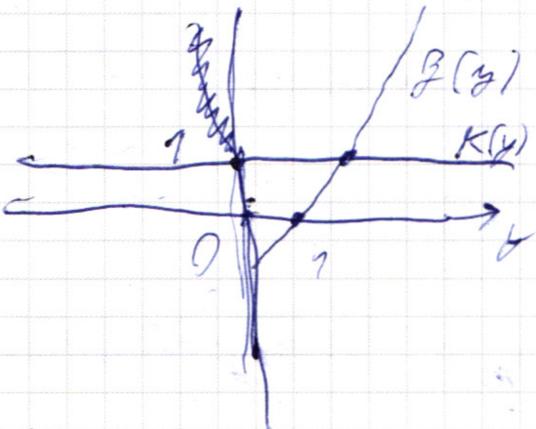
$1 = \underbrace{y^{\log_3 \frac{4}{3}}}_{1} \underbrace{\left(y^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1\right)}_{2}$

1 и 2 монотонно возрастают

т.к. $\log_3 \frac{5}{4} > 0$
$\log_3 \frac{4}{3} > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 монотонно возрастает на $y>1$

$g(y) = y^{\log_3 \frac{4}{3}}\left(y^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1\right)$



~~...~~ Левая часть

$g(y)$ для $y>1$ монотонно возрастает

~~...~~ для $y<1$: $g(y)<0$

т.к. $y^{\log_3 \frac{5}{4}} < 1$, $y^{\log_3 \frac{4}{3}} > 0$ $\Rightarrow$

График $g(y)$ может ~~...~~ иметь ~~...~~ не больше одного пересечения с графиком $K(y) = 1$

То есть $f'(y)=0$ имеет не более одного корня.

$y_0 = 9$ подходит $\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{3}\right)^2$.

№3(3)

$f'(y) = 0$ при $y = y_0 = 9$

заметим, что ~~как~~ т.к. $\exists\, f'(y)=0$ только один корень

и $f'(3) > 0$, а $f(27) < 0$ $\Rightarrow$ $f(y)$ монотонно

возрастает на $(0;9)$ и монотонно убывает на $(9;\infty)$

$\Rightarrow$ в $y = y_0$ ~~y~~ $f(y)$ имеет максимум.

Заметим, что $f(y_0) = y_0 + y_0^{\log_3 4} - y_0^{\frac{1}{\log_5 3}} =$

$= y_0 + y_0^{\log_3 4} - y_0^{\log_3 5} = 9 + 16 - 25 = 0$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $f(y) \leq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y + y^{\log_3 4} - y^{\frac{1}{\log_5(3)}} \leq 0$ ~~$\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ неравенство имеет решение на~~

Но $y + y^{\log_3 4} - y^{\frac{1}{\log_5(3)}} \geq 0$ (см. стр. 4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = y_0 = 9$.

~~Ответ~~ $10x - x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 9 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$ ← Ответ.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (1)

1) $f(n) = f(p_1) + \ldots + f(p_k)$, где $(p_1, \ldots p_k)$ - все простые множители n

т.к. $\begin{cases} f(n) = f(p_1) + f\left(\frac{n}{p_1}\right) \\ f\left(\frac{n}{p_1}\right) = f(p_2) + f\left(\frac{n}{p_1 \cdot p_2}\right) \\ \vdots \\ f(p_{k-1} \cdot p_k) = f(p_{k-1}) + f(p_k) \end{cases} \Leftrightarrow (1)$

$f(p_i) = \left[\frac{p_i}{4}\right] \Rightarrow \overset{(1)}{\Rightarrow} f(n) = \sum_{i=0}^{k} \left[\frac{p_i}{4}\right] \quad (2)$

$\begin{cases} f\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) \\ f(n \cdot 1) = f(n) + f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(n) \\ f(1) = 0 \end{cases}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

С помощью (2) посчитаем $f(n)$ $n \in \mathbb{N} \cap n \in [2; 25]$

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$
$f(25)=2$

№5(2)

Всего 10 – „0"; 7 – „1"; 3 – „2"; 1 – „3"; 2 – „4"; 1 – „5".

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$ ~~вот~~

Если мы выбрали пару, где $f(y) < f(x)$

то мы можем поменять x и y местами

~~Тогда~~ $f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$ т.к. $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$

Тогда нас не устраивают только

если $f(x) = f(y)$ ~~то~~

~~Их~~ Таких вариантов выбора

~~$C_{10}^2 + C_7^2 + C_3^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_1^2$~~

~~А всего вариантов выбора пары (x и y.~~

$10^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2$

а всего вариантов выбрать пару x и y

$25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $25^2 - 10^2 - 7^2 - 3^2 - 2^2 - 1^2 = 462$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (б)

$$\frac{16(x)-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = f(x)$$

$f'(x) = \frac{16}{(4x-5)^2}$ на $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $f'(x)$ определена и $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимум $f(x)$ на отрезке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ в $x = \frac{1}{4}$

в $x = \frac{1}{4}$ $f(x) = 0$

$0 \leq f(x)$ $g(x) = -32x^2 + 36x - 3$

$g'(x_0) = -64x_0 + 36 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{9}{8} \Rightarrow$ ~~при~~ $x < x_0$

$x_0 \notin [\frac{1}{4}; 1] \Rightarrow g'(x)$ на $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ определена

и $< 0 \Rightarrow g(x)$ ~~убывает~~ на $[\frac{1}{4}; 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ максимум $g(x)$ в $x = \frac{1}{4}$ и $g(\frac{1}{4}) = 4$

$g(x) \leq 4$

$ax + b = h(x)$

~~$b = -\frac{1}{3}$, $a = \frac{16}{3}$~~

$h(x)$ - прямая; при $a \geq 0$ максимум на отрезке в $x = 1$, а минимум в $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ только ~~$b \dots a$~~ =

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6(2)

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a_1 + b_1 \geq 0 \\ a_1 + b_1 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 \leq \frac{16}{3} \quad b_1 \geq \frac{4}{3}$$

если $a \leq 0$ максимум в $x = \frac{1}{4}$, если a мин в $x = 1$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 0 \\ \frac{1}{4}a_2 + b_2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \quad b_2 \geq \frac{16}{3} \quad 0 > a_2 \geq -\frac{16}{3}$$

$\Rightarrow b \geq \frac{4}{3} \quad a \in \left[-\frac{16}{3}; \frac{16}{3}\right]$

9

Ответ.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №10
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad 2 \le x, y \le 25$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(1) = 0$ $\quad 4 - \frac{4}{4x-5} \le ax+8$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\quad \cancel{f(10) = 1}$

$16x - 16$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $\quad f(4) = 2 \cdot f(2) = 0$

$f(5) = 1$ $\quad f(4) = 0$ $\quad f(20) = 1$

$11 \cdot 7 +$ $\quad f(9) = 0$ $\quad f(21) = 1$

$f(7) = 1$

$+ 11 \cdot 3 + 11 \cdot 1 +$ $\quad f(6) = 0$ $\quad f(22) = 2$

$f(11) = 2$ $\quad + 11 \cdot 2 + 11 \cdot 4 +$ $\quad f(8) = 0$ $\quad f(24) = 0$

$+ 7 \cdot 3 + 7 \cdot 1 +$

$f(13) = 3$ $\quad 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 +$ $\quad f(10) = 1$ $\quad f(25) = 2$

$+ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 +$

$f(17) = 4$ $\quad f(12) = 0$

$+ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 +$

$f(19) = 4$ $\quad 2 \cdot 1$ $\quad f(14) = 1$ $\quad f(n) = \sum f(p) =$

$f(23) = 5$ $\quad f(15) = 1$ $\quad = \sum \left[\frac{p}{4}\right]$

$\cancel{f(39) = 7}$ $\quad f(16) = 0$ $\quad f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) = 0$

$f(18) = 0$ $\quad f\left(\frac{1}{n}\right) = -\sum\left[\frac{p}{4}\right]$

$0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$

11 7 3 1 2 1 $\quad$ 11 $\quad$ $625 - 163 - = 462$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36-3$$

$$32x^2 - 36 + 3 = 0$$

$$4 + \frac{4}{4x-5} \leq ax+b \leq -\frac{1}{2}(x-9+\sqrt{57})(x-9-\sqrt{57})$$

$$\frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4\cdot 3\cdot 32}}{2\cdot 32}$$

$$\frac{2^2 3^2 \pm \sqrt{2^4 3^4 - 2^7\cdot 3}}{2^5}$$

$$-9+\sqrt{57} < -1$$

$$\frac{3^2 \pm \sqrt{3^4 - 2^3\cdot 3}}{2^3}$$

$$0 \leq ax+b \leq -\frac{1}{2}(x-9+\sqrt{57})(x-9-\sqrt{57})$$

$$81-24 = 57$$

$$x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{3}{32} = 0 \qquad \frac{9 \pm \sqrt{57}}{8}$$

$$x = \frac{\frac{9}{8} \pm \sqrt{\frac{9^2}{8^2} - \frac{3}{8}}}{2}$$

$$81-24=$$

$$0 \leq ax+b < 0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

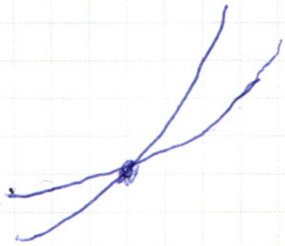
$f(y) = y + y^{\log_3 4} - y^{\frac{1}{\log_5 3}}$

$f'(y) = 1 + y^{\log \frac{4}{3}} - y^{\log \frac{5}{3}} = 0$

$\frac{\log_5 5 - \log_5 3}{\log_5 3} = \log \frac{5}{3}$

$= 0$ $16(x-1) \leq (4x-5)(ax+b)$

$y^{\log \frac{5}{3}} = y^{\log \frac{4}{3}} + 1$



$y^{\log \frac{5}{3}} - y^{\log \frac{4}{3}} = 1$

$y^{\log \frac{4}{3}} \left(y^{\log \frac{5}{4}} - 1 \right) = 1$

$y_0 = 9$

$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = 5 \pm 4$

$\frac{1}{\log_5 3} = \log_3 5$ $\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x = 1$

$x = 2$

$\frac{5^x - 4^x}{3^x} = 1$ $5^x - 4^x = 3^x$

$9 + 16 - 9^{\frac{1}{\log_5 3}} = 0$

$y = 9$

$x^2 - 10x + 9$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $\log_3 \frac{3}{4} \cdot \log_5(3) + \log_5(7)$

$\log \sqrt{3} < 3$

$\log_3 \left(\frac{4}{3}\right)$

$0 < \log_3 \frac{4}{3} < \frac{1}{7}$

$\frac{\log_3 \frac{4}{3} + 1}{\log_3(5)}$ $\frac{\log_3 4}{\log_3(5)} = \log_5 4 < 1$

$b = \frac{4}{5}$

$y < 1$ $5^{\log(y)} = 5^{\frac{\log_5 4}{\log_5 3}} = y^{\frac{1}{\log_5 3}}$ $5b = 4$

$\frac{b-b}{4} + b = 0$

$y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(y)}$ $\frac{a}{4} + b = 0$ $4 + 3b = 0$

$b = -\frac{4}{3}$

$a + b = 4 - b$

$y + y^{\log 4} \geq y^{\frac{1}{\log_5 3}}$

$a = 6$

$y + y^{\log 4} - y^{\frac{1}{\log_5 3}} = f(y)$

$\log_y (y + y^{\log 5}) \geq \frac{1}{\log_5 3}$

$\log_y y + \log_y (1 + y^{\log \frac{5}{3}}) \geq \frac{1}{\log_5 3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^2+36b^2=90$

$a-12b=\sqrt{2ab}$

$a^2+144b^2-24ab=2ab$

$\cancel{a^2-26ab+144b^2}=0$

$a=\sqrt{\frac{90-36b^2}{2}}$

$c+36d=90$

$c+144d-26\sqrt{cd}=0$

$a^2=\frac{90-36b^2}{\cancel{2}}$

$90-36b^2+\cancel{144b^2}-26ab\pm\sqrt{\frac{90-36b^2}{\cancel{2}}}=0$

$a\geq 12b$

$2ab\geq 0$

$13^2\cdot b=12^2\cdot a$

$a-12b=2\cdot 169\cdot 50$

388

$a^2+144b^2-24ab=2ab$

$a^2+144b^2=26ab$

$a^4+12^4b^4+2\cdot 12^2a^2b^2=26^2a^2b^2$

$a^4+12^4b^4$

b

$a^4=(90-36b^2)^2$

$(90-36b^2)^2+12^4b^4=388(90-36b^2)b^2$

$a^2+36b^2=90$

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=3\sqrt{2}}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{a}{b}}=-2\sqrt{2}}$$

$18^2b^2+2\cdot 18b^2=90$

$b^2=\frac{1}{4}$

$\frac{a}{b}=18 \Rightarrow a=18b$

$b=\pm\frac{1}{2}$

$a_1=$

$a=\pm 9$

$a=18b$ $\quad a_2=$

$(b;a)$ $\left(\frac{1}{2};9\right)$, $\cancel{\left(-\frac{1}{2};-9\right)}$ $\quad \cancel{a>12b}$

$a^2+36b^2=90$ $\quad x-6=9$

$a-12b=\sqrt{2ab}$ $\quad y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$y=1$ $\quad x=15$

$\cancel{15-12}$ $\cancel{3=\sqrt{30}-12}-15+6$

$225+\cancel{36}-12\cdot 15+\cancel{36}=45$

3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$y + |y|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(y)}$$

$$10x - x^2 = y$$

$$y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(y)}$$ $y > 0$ $3^x = 4$

$$\log_3 4 = 2\log_3 2$$

$$3^{(x-1)} = \frac{4}{3}$$

$$y\left(1 + y^{\log_3 4 - \log_3 3}\right) \geq 5^{\log_3(y)}$$

$$y\left(1 + y^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)}\right) \geq 5^{\log_3(y)}$$

$$\log_3(y) = \frac{\log_5(y)}{\log_5(3)}$$ $y^{\frac{1}{\log_5(3)}}$

$$y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(y)}$$ $y > 1$

$y < 1$

$$1 + \log_3\frac{3}{4} \geq \frac{1}{\log_5(3)}$$

$$1 + \log_3\frac{3}{4} \leq \frac{1}{\log_5(3)}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cdot 36 = \cancel{1} \cdot 2$

$90^2 +$

$a^4 = 18^2(5-2b^2)^2 = 18^2(25+4b^4-20b^2)$

$+12^4 b^4 = 388(\ldots) \cdot 18(5-2b^2)b^2$

$18^2 \cdot 4b^4 - 18^2 \cdot 20b^2 + 18^2 \cdot 25 + 12^4 b^4 =$

$= 388 \cdot 18 \cdot 5b^2 - 388 \cdot 18 \cdot 2b^4$

97

$(3^4 \cdot 2^4 \cdot b^4 + 3^4 \cdot 2^3 b^4 + 97 \cdot 2^4 \cdot 3^2 / b^4$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = k$

$\sqrt{\frac{a}{b}} - 12\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{2}$

$K = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+48}}{2}$

$k - \frac{12}{k} = \sqrt{2}$

$K = \frac{\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{2}$ $K_1 = 3\sqrt{2}$

$K^2 - \sqrt{2}k - 12 = 0$ $K_2 = -2\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\alpha=x \quad 2\beta=y$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y)+\sin(x)=-\frac{2}{5}$

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\sin y\cos x=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin x\cos 2y+\sin 2y\cos 2x=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$\sin x\cos y+\sin y\cos x$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin((x+y)+y)+\sin((x+y)-y)=-\frac{2}{5}$

$2\sin(x+y)\cos y=-\frac{2}{5}$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos y=\frac{2}{5}$

$\cos y=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos^2(\beta)=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$\sin(x+y)\cos y+\cos(x+y)\sin y+$

$+\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~Sin(2α~~

$2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$-2tg\alpha - 3 + tg^2\alpha = 0$

$tg\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2$

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$tg\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$

$tg\alpha \in \left(-1; 3; \frac{1}{3}\right)$

~~$(x-13y)^2 - 25y^2$~~ $+ 12y + x - 6 = 0$

$(x-6)^2 + 36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 90$

$2ab = 2xy - 12y - x + 6$

$x - 6 = a \qquad y - \frac{1}{2} = b$

$\begin{cases} a - 12b = \sqrt{2ab} \\ a^2 + 36b^2 = 90 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$ $x \geq 12$

$x^2 + 144y^2 - 24yx = 2xy - 12y - x + 6$

$2x^2 + 180y^2 - 26xy - 11x - 24y - 51 = 0$

$x^2 + 144y^2 - 26xy + 12y + x - 6 = 0$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0$

$x^2 + 169y^2 - 26xy = (x - 13y)^2$

~~$(x - 13y)^2 - 25y^2 + 12y + x - 6 = 0$~~

$(x^2 - 12x + 36) + 36(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 90$

$(x - 6)^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90$

~~$x - 12y$~~ $=$

$x^2 + 144y^2 - 26xy + 12y + (x - 6) = 0$

$(x - 13y) - 25y^2 + 12y ($

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

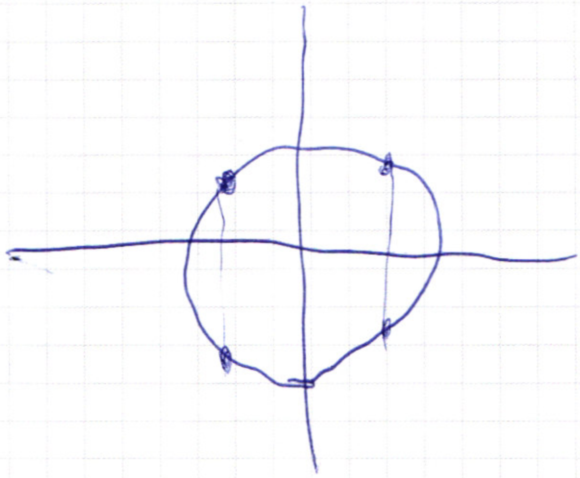
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos^2(\beta) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$\sin(\beta) =$

$\sin(\beta) =$



$\sin^2(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

$\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Sin

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= \sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \cos 2\alpha \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm (2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$ tg

$3 + 2tg\alpha - tg^2\alpha = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)