МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 26}{2x + 3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1
$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$$

если из верхнего ур вычесть нижнее получим:

$13x - y = 92 + 124 = 216 = 6^3$

тогда $\sqrt[3]{169x^2 - y^2} = \sqrt[3]{(13x+y)(13x-y)} = 6\sqrt[3]{13x+y}$

Сложим эти два ур, получим:

$13x + y + 2 \cdot 6\sqrt[3]{13x+y} = -32$

Пусть $\sqrt[3]{13x+y} = t$, тогда

$t^3 + 12t - 32 = 0$, угадывается корень $t = -2$

$(t+2)(t^2 - 2t + 16) = 0$ нет действ корней тк $D = 4 - 16 \cdot 4 < 0$

$\Rightarrow \sqrt[3]{13x+y} = -2$

$$\begin{cases} 13x + y = -8 \\ 13x - y = 216 \end{cases} \Rightarrow 26x = +208 \Rightarrow x = +8 \Rightarrow y = ~~\ldots~~$$

$y = -14 \cdot 8 = -112$

3 Максимальная степень 10 $= 6$ тк иначе сумма остатков былабы 7-ми знач. числом $\Rightarrow$ тогд.

1) сумма имеет вид: при мак ст $= 6$.

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7
	_	_	_	_	_	_
		_	_	_	_	_
	0	1	2	8	2	8

$\Rightarrow 3n_7 \bmod 10 = 8 \Rightarrow n_7 = 6 \Rightarrow 3n_6 + 1 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 3n_6 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow n_6 = 7$

$3n_5 + 2 \overset{10}{\equiv} 8 \Rightarrow n_5 = 2$

$3n_4 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow n_4 = 4$ тогда n_3 и $n_2 = 0$, а n_1 любое от 1 до 9.

$\Rightarrow$ 9 вариантов.

2) Пусть макс ст $= 5$ тогда

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\overline{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$

$$\begin{array}{r} \overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{} \\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{} \\ \overline{}\ \overline{} \\ 1\ 2\ 8\ 2\ 8 \end{array}$$

$n_7 = 6 \quad n_6 = 7 \quad n_5 = 2$

$2n_4 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow n_4 \to \boxed{1} \Rightarrow n_3 = 1$, $\to \boxed{6} \Rightarrow n_3 = 0$, а n_1 любое от 1 до 9, n_2 любое от 0 до 9.

$\Rightarrow 2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$ вариантов.

3) Если ~~к~~ max ст. 10 ≤ 4 то.

$\overline{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7}$

$$\begin{array}{r} \overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{} \\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{} \\ \overline{}\ \overline{} \\ 1\ 2\ 8\ 2\ 8 \end{array}$$

то получается, что сумма каких-то трех 4_x, 3_x, 2_x чисел $= 12828$

Но любое 4_x знач < 10000

3_x знач < 1000

2_x знач < 100

сумма $< 11100 < 12828$

$\Rightarrow$ из п. 1 и п. 2 $= 9 + 180 = 189$

Ответ: 189 ~~вар~~ чисел.

2) $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $x > 0$

$3x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$9x^3 \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -3\log_{9x^3} x.$

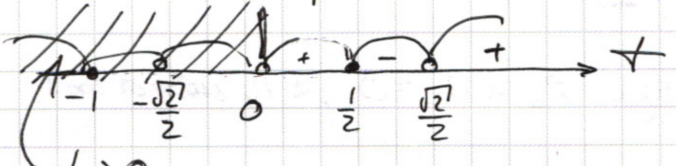
Если $x = 1$ нерав выполн, а если $x \neq 1$

$\frac{1}{\sqrt{\log_x 3x^2}} \leq -\frac{1}{\log_x 9x^3}$

$\frac{1}{\sqrt{\log_x 3 + 2}} \leq -\frac{1}{2\log_x 3 + 3}$ Пусть $\sqrt{\log_x 3 + 2} = t > 0$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2 - 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{2t^2 + t - 1}{2t(t - \frac{\sqrt{2}}{2})(t + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{2(t+1)(t - \frac{1}{2})}{2t(t - \frac{\sqrt{2}}{2})(t + \frac{\sqrt{2}}{2})} \leq 0.$

По м. интервалов:



$t > 0.$

$\Rightarrow \sqrt{\log_x 3 + 2} \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}).$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}\log_x 3+2 \geq \frac{1}{4} \\ \log_x 3 + 2 \leq \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_x 3 \geq -\frac{7}{4} \cancel{=\log} \\ \log_x 3 \leq -\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_x 3 \geq \log_x x^{-\frac{7}{4}}\\ \log_x 3 \leq \log_x x^{-\frac{3}{2}}\end{cases}$$

По м. рац.

$$\cancel{\log}\begin{cases}(x-1)(3-x^{-\frac{7}{4}}) \geq 0 & x\in \cancel{(-\infty; 3^{-\frac{4}{7}})\cup(1;+\infty)}\ [3^{-\frac{4}{7}};1) \text{ т.к. } x\neq 1 \\ (x-1)(3-x^{-\frac{3}{2}}) \leq 0 & x\in(-\infty;3^{-\frac{2}{3}}]\cup(1;+\infty)\end{cases}$$

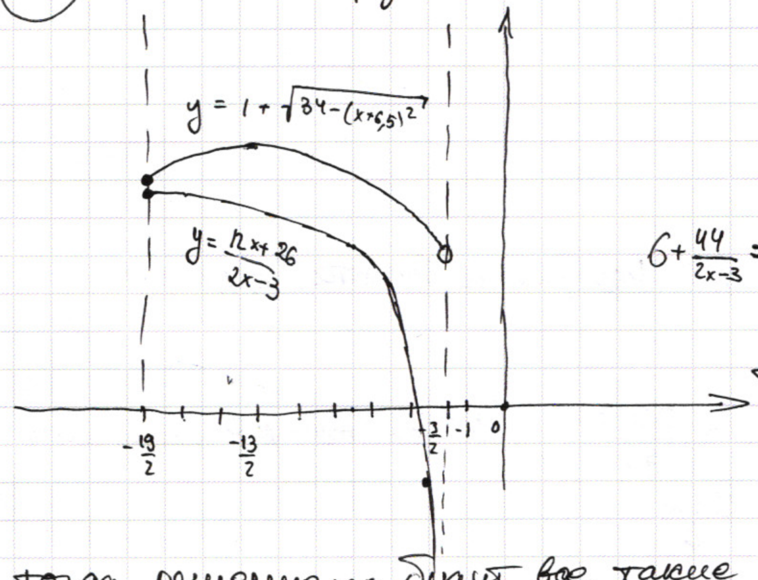
$\downarrow$

$\cancel{x\in[3^{-\frac{4}{7}};3^{-\frac{2}{3}}]}$ $x\in\{3^{-\frac{4}{7}}\}\cup\{3^{-\frac{2}{3}}\}$

Ответ: $\cancel{x\in[3^{-\frac{4}{7}};3^{-\frac{2}{3}}]\cup\{1\}}$

$x\in\{3^{-\frac{4}{7}};\ 3^{-\frac{2}{3}};\ \cancel{1}\}$

⑥ На координатной плоскости:



$+\ 1+\sqrt{-\frac{83}{4}-13x-x^2}$

и

$1+\sqrt{34-(x+6,5)^2}$

$6+\frac{44}{2x-3}=\frac{12x+26}{2x-3}$ стремится к 6 на $-\infty$.

$ax+b$ — ~~...~~ прямая

в дан. случае $a<0$, $b>0$.

тогда решением будут все такие $(a;b)$ что

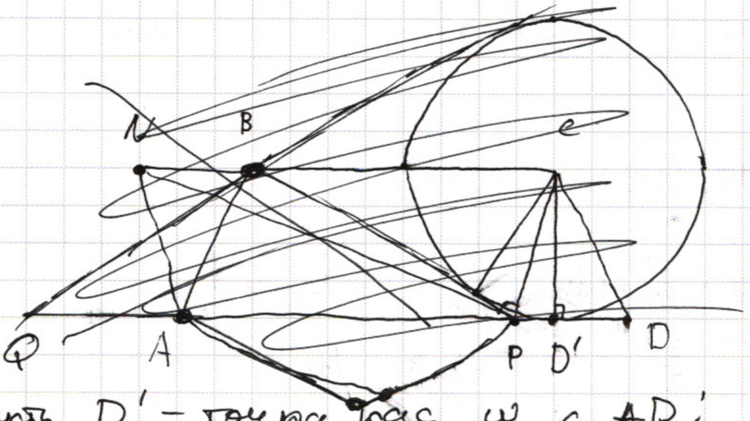
$ax+b$ что:
$$\begin{cases} a(-\frac{3}{2})+b<4 \\ a(-\frac{19}{2})+\cancel{b\geq}\ \frac{12\cdot(-\frac{19}{2})+26}{\cancel{2x-3}\ 2(-\frac{19}{2})-3} \\ a(-\frac{19}{2})+b\leq 6 \\ \text{На промежутке } x\in[-\frac{19}{2};\frac{3}{2})\quad ax+b\geq\frac{12x+26}{2x-3}\end{cases}$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

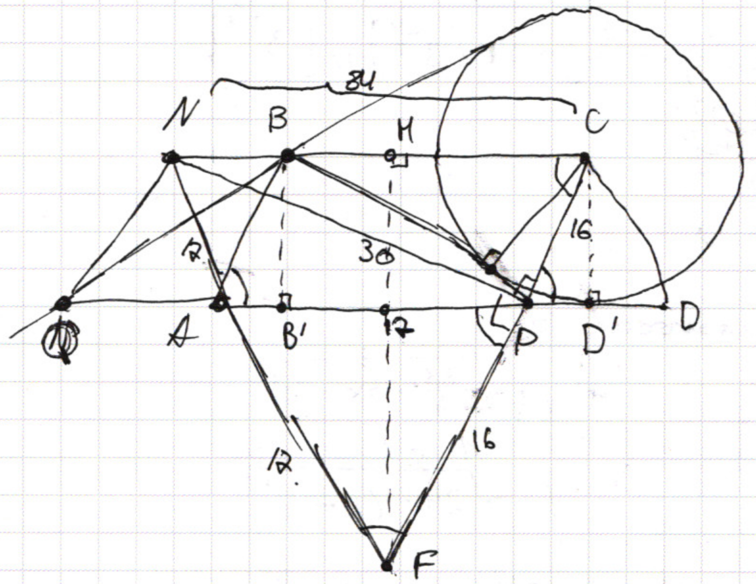
4



Пусть D' — точка кас ω с AD;

~~тогда~~ из $\triangle NCP$: $NC^2 = NP^2 + CP^2$ $\frac{NP}{CP} = tg\,\frac{15}{8} \Rightarrow NP = \frac{15CP}{8}$

$\Rightarrow NC^2 = CP^2 + \frac{225CP^2}{64} = 34^2 \Rightarrow CP = 16 \Rightarrow NP = 30.$



Пусть пересечение AN и $PC = F$

тогда тк $NC \parallel AB \Rightarrow$
$AP = \frac{1}{2}NC$ } AC — ср линия

тогда $\triangle NCF$ — равнобедр тк NP медиана и высота. $\Rightarrow NC = FN$.

$AN = FA = 17 \Rightarrow$ ~~B~~

тогда $FH \cdot NC = NP \cdot CF \Rightarrow HF = \frac{30 \cdot 32}{34}$, HF делится AP пополам $\Rightarrow$

высота трапеции $= \frac{1}{2}HF = \frac{15 \cdot 16}{17}$.

тогда рассмотрим $\triangle CPD'$:

$CP = 16$ $CD' = \frac{15 \cdot 16}{17} \Rightarrow PD' = \sqrt{16^2 - 16^2\frac{15^2}{17^2}} = \frac{8 \cdot 16}{17}$.

$\Rightarrow \triangle CD'P \sim \triangle NPC$ } $\Rightarrow \angle CDD' = \angle NCP \Rightarrow = arctg\frac{15}{8}$

$AB' = PD' \Rightarrow AP = BC = 17 \Rightarrow B$ — середина $NC \Rightarrow AB \parallel FC \Rightarrow \angle BAB' = \angle CPD'$

тк $AB = CD \Rightarrow \angle BAB' = \angle CDD'$

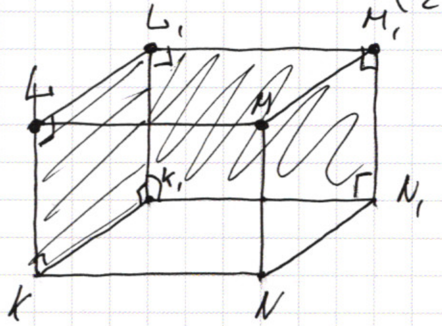
Ответ: $\angle ADC = arctg\,\frac{15}{8}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.
$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right). \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

2ур равносильно $2\left(\frac{1}{2}\cos(2x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y)\right) = 2\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right)$.

7.



1) тк происходит касание в точке к

2) в парал-де противополож стороны совмещены парал переносом; ~~тк~~ плоск KLL_1K и $L_1M_1N_1K_1$ $\perp K_1N_1NK$, ~~тк~~ это следует из $L_1K_1 \perp N_1K_1$, $KK_1 \perp K_1L_1$

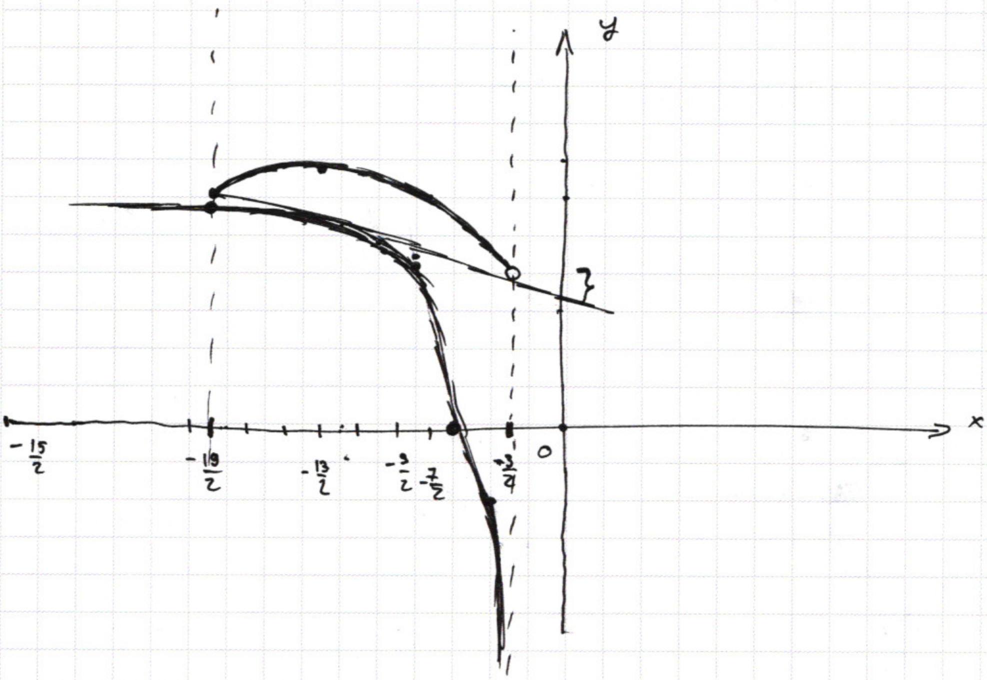
3) ~~тк с~~ сфера касается KLL_1K_1 и ~~$LM_1N_1K_1$~~ (на прямой N_1M_1) N_1M_1 и M_1M то тк касается M_1M и M_1N $\Rightarrow$ плоскость MM_1N_1 содержит центр, а тк $\angle MM_1N_1 = 90^\circ$, $\angle(KN \wedge MM_1N_1) = 90^\circ$ $\Rightarrow$ ~~что~~ N — центр сферы.

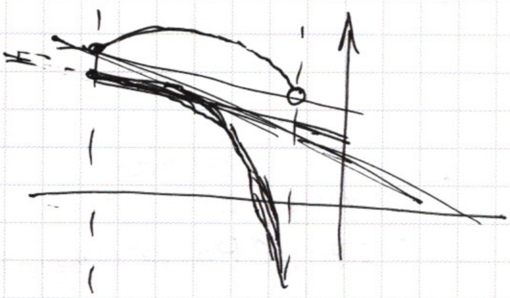
$$KM_1 = \sqrt{KN^2 + NN_1^2 + M_1N_1^2} = 4 \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

6 $\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{34-(x+\frac{13}{2})^2}$

$-\frac{19\cdot 6+26}{-19+3} = \frac{-60-54+26}{-16} = \frac{-60+26}{16}$

$= < 6$





Мы берем прямые для которых

$f(-\frac{3}{2}) < 4$

$f\ \cancel{(6)}$

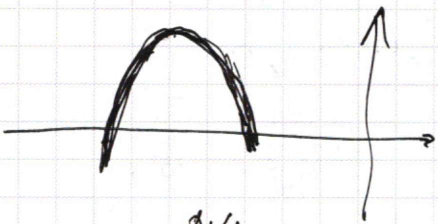
$f(-\frac{19}{2}) < 4.$

такие что $\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax+b \quad (x \in (-\frac{3}{2}; -\frac{19}{2}))$

$12x+26 \geqslant (ax+b)(2x+3)$ на ОДЗ

$12x+26 \geqslant 2ax^2+2bx+3ax+3b \qquad a<0. \qquad b>0.$

$2ax^2+(2b+3a-12)x+(3b-26) \leqslant 0. \qquad a<0 \quad b>0.$



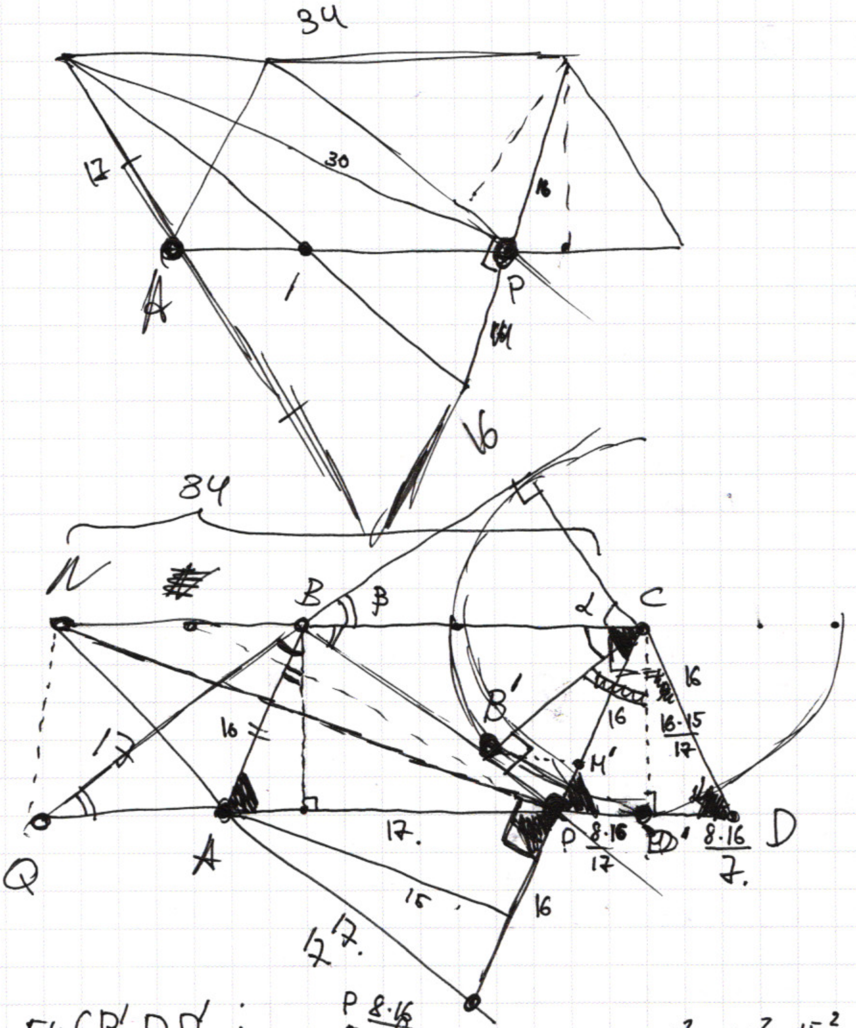
оба корня левее правее
$-\frac{19}{2}$ $-\frac{3}{2}$
или $D<0$.

$6+\frac{34}{2x-3}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

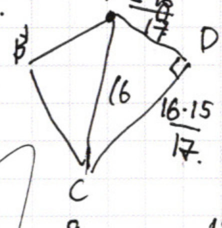
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



большицао.
из получ Δ
$AB \parallel CP \Rightarrow AP$-секущая.
т.к $AB = CD \Rightarrow \angle A = \angle D = \operatorname{arctg}\frac{15}{8}$.

$\square CB'PD'$:



$PD' = 16^2 - \frac{16^2 \cdot 15^2}{17^2} = 16^2\left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{16\cdot 8}{17}$.

$\Rightarrow$ 1) Подобие: $\triangle CPN \sim \triangle PD'C \sim \triangle PB'C$.

$\angle D'CP \Rightarrow \sin \frac{\frac{16\cdot 8}{17}}{16.} = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos = \frac{15}{17}$.

$\sin 2\beta = 2\cdot \frac{8\cdot 15}{289} = \frac{16\cdot 15}{17^2}$

$= \cos \alpha$.

2) ~~∠PD'~~ $\angle D'CP = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{16\cdot 8}{17}}{\frac{16\cdot 15}{17}}\right) = \frac{8}{15}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{8}{15}}{1-\frac{64}{225}} = \frac{\frac{16}{15}}{\frac{161}{225}} = \frac{16\cdot 15}{161}$

$\frac{161}{225}$.

$\uparrow$ arctg β.

~~МОТ~~ $\Rightarrow CB' = CD = CD'$!?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 $\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ $\quad tg\,x - tg\,y$.

вспомог арг для 2 ур:

$2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) \Rightarrow 2ур \Leftrightarrow \sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1}{2} \downarrow \sin 30$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \downarrow \cos 30$

$tg(2\alpha) = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\qquad tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2tg\frac{\pi}{6}}{1-tg^2\frac{\pi}{6}}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}$ $\qquad \sqrt{3} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{9}}$

$\sqrt{3} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\cancel{9}}{\cancel{3}\cdot\cancel{6}} = \sqrt{3}$ ч

$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}$

$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(y+\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$x-y=\alpha \quad y+\frac{\pi}{6}=\beta$

$\sqrt{3}\cos(\alpha) = 7\cos\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

$\sin(\alpha+\beta) = 6\sin(\beta-\alpha)$.

$\begin{cases} \sqrt{3}\cos\alpha = 7\cos\left((\beta-\alpha)+\frac{\pi}{2}\right) = 7\cos\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(\alpha+\beta) = 6\sin(\beta-\alpha) = -6\sin(\alpha-\beta) \end{cases}$

$\sin(\alpha+\beta) + 6\sin(\alpha-\beta) = 0$.

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(6) $\frac{12x+26}{2x+3} \leq ax+b \leq 1+\sqrt{34-(x+\frac{13}{2})^2}$

$x^2+13x+\frac{33}{4}$

$\left(x^2+2\cdot 6{,}5x+\frac{169}{4}\right)-\frac{169}{4}+\frac{33}{4}=$

$\frac{12x+26}{2x+3} \leq ax+b$ $\quad 2x+3$ на одз $<0 \Rightarrow$

$=(x+6{,}5)^2-34.$ $\quad \left(\frac{13}{2}\right)^2=\frac{169}{9}.$

$12x+26 \geq (2x+3)(ax+b)$

$x\in\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right).$ $\quad \frac{136}{4}=34$

$ax+b \leq 1+\sqrt{34-(x+\frac{13}{2})^2}$

$-\left(x^2+13x+\frac{33}{4}\right)\geq 0$ $\quad 136 \,|\, 4$, $12 \,|\, 34$, 16

$\downarrow \quad \to -\frac{3}{2}$

$x^2+13x+\frac{33}{4}\leq 0$

$\underbrace{\qquad\qquad \in[0;3]}_{1 \text{ до } 4}.$

$D=169-33=136=2\sqrt{34}$

При $x=0$

$x_{1/2}=\frac{-13}{2}\pm\sqrt{34}$

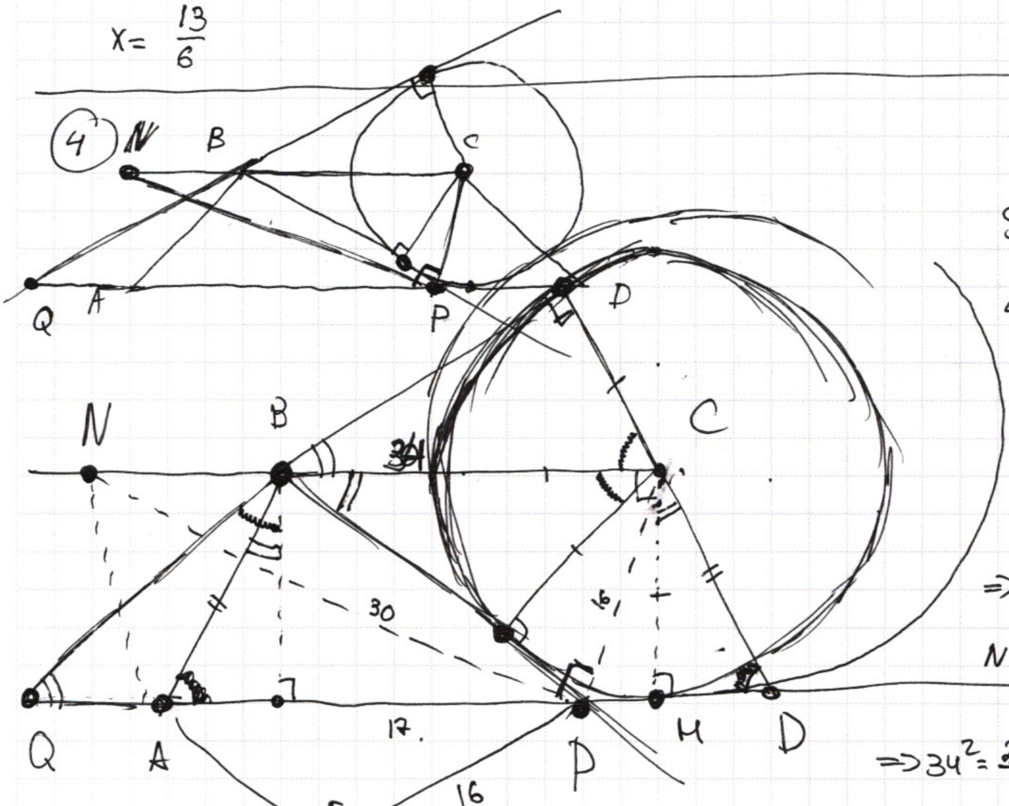
$\frac{26}{3}\leq b\leq 1+\sqrt{34-\frac{169}{9}}=\frac{\sqrt{33}}{2}$

$\frac{26}{3}\leq b\leq 1+\frac{\sqrt{33}}{2}$ $\quad x\neq 0.$

$x=\frac{13}{6}$

---

(4)



$\angle ADC$

$\angle NQC$

S_{NCDQ}

$\angle NCP=\text{arctg}\frac{15}{8}$

$AP=17$

$NC=34.$

$\angle NCP=\text{arctg}\frac{15}{8}$

$\Rightarrow tg\,NCP=\frac{NP}{CP}=\frac{15}{8}$

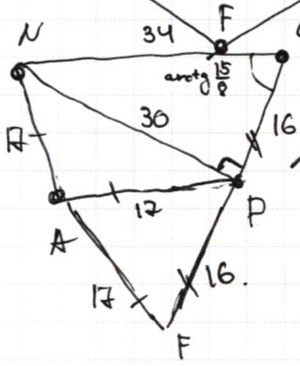
$NP=\frac{15CP}{8}$

$\Rightarrow 34^2=\frac{225CP^2}{64}+\frac{64CP^2}{64}=$

$\Rightarrow 34^2=\frac{\cancel{289}\,17^2CP^2}{8^2}$

$CP=\frac{34\cdot 8}{17}=16.$

$\Rightarrow NP=30.$



ΔNFC - равнобедр $\Rightarrow NA=17.$

AP - ср линия.

$NC\cdot h=16\cdot 30\cdot$

$h=\frac{16\cdot 30}{34}=CH$ $\quad \frac{16\cdot 15}{17}.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

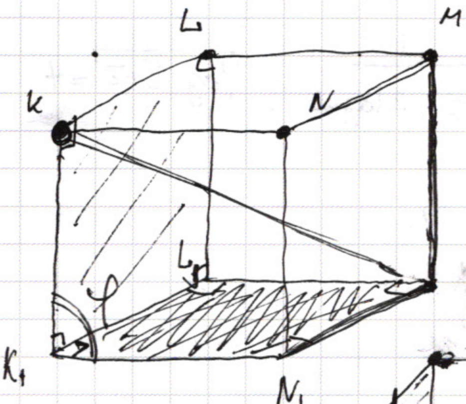
7

Найти: φ и V. | $AK=3$; $AM_1=1$

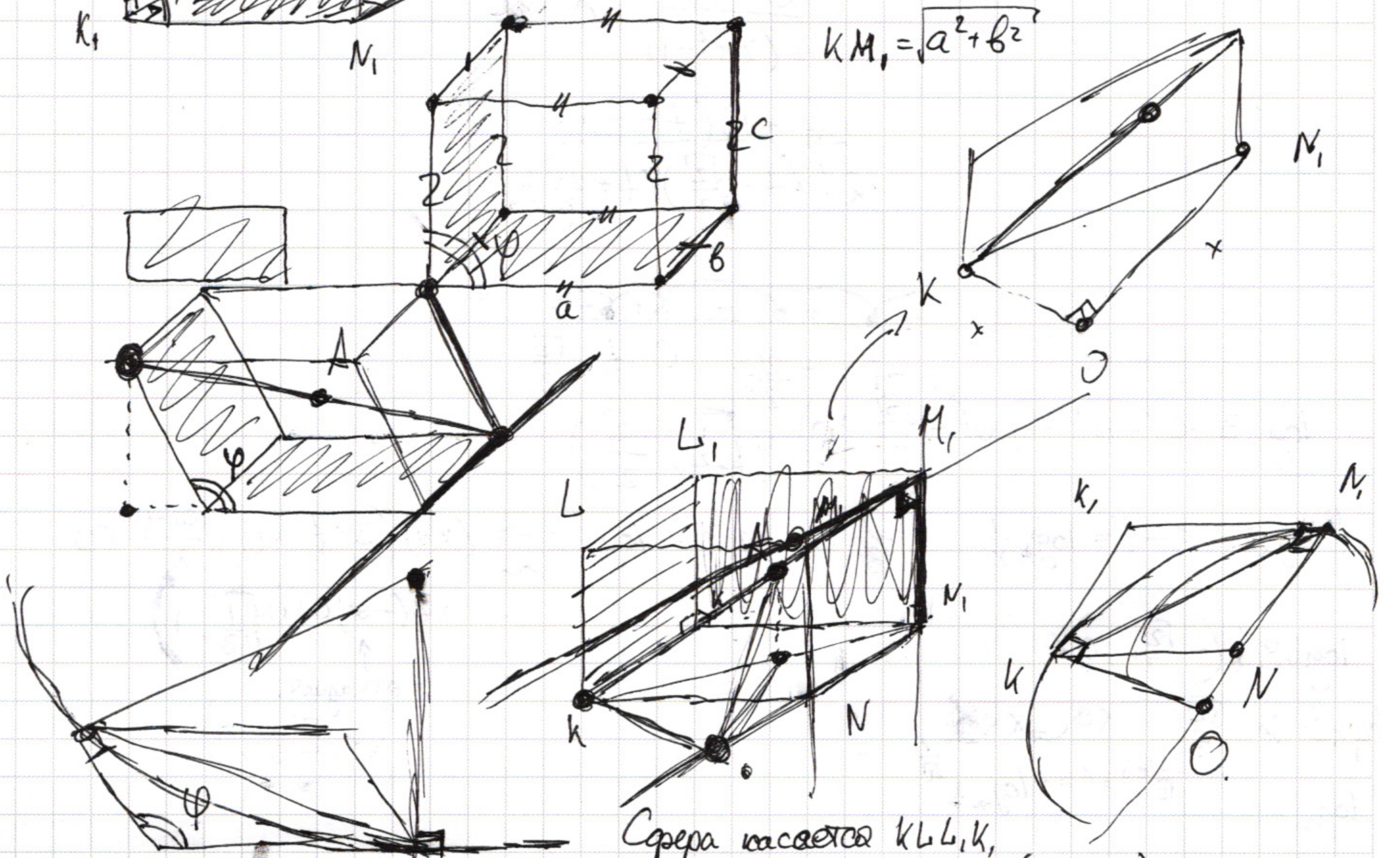
~~Рк~~ у ~~этой~~ фигуры противоположные грани $\parallel$

S – сфера

$M, N_1 \in K, L, M_1 \to$ одна точка.



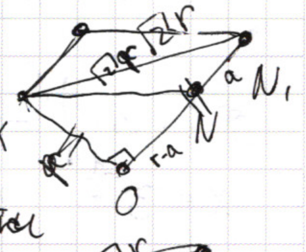
$KM_1 = \sqrt{a^2+b^2}$



Сфера касается KLL_1K_1, $L_1M_1N_1K_1$ (на N, M_1). ~~...~~ M_1M.

$M_1N_1 \perp MM_1 \Rightarrow$ прямой угол тогда

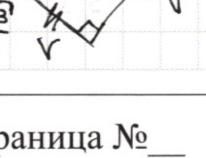
плоскость M_1N, NM содержит центр.



Если касается $K \Rightarrow K \perp$ плоскости

т.к. $KK \perp M_1MNN_1 \Rightarrow$ центр на прямой NN_1

$N_1N_1 = r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ⟸ $(\sqrt{2}\,r)^2 + ~~a~~\; r^2 = 4 \Rightarrow 3r^2 = 16 \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{\frac{1}{2+\log_x 3}} \leqslant \cancel{\log} \frac{-1}{2\log_x 3+3}$ $\sqrt{2+\log_x 3} = t$

$\frac{1}{t} \leqslant \frac{-1}{2t^2-1}$

$\frac{2t^2-1+t}{(2t^2-1)t} \leqslant 0$

$\frac{2t^2+t-1}{2t(t-\frac{1}{\sqrt{2}})(t+\frac{1}{\sqrt{2}})} \leqslant 0$ $(t+1)$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leqslant -3\log_{(9x^3)} x$

$\frac{1}{\sqrt{\log_x 3x^2}} \leqslant -\frac{1}{\log_x 9x^3}$

$\frac{1}{\sqrt{\log_x 3+2}} \leqslant -\frac{1}{3+2\log_x 3}$ $\sqrt{\log_x 3+2}=t$

$\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2-1} \leqslant 0.$

$\frac{2t^2+t-1}{t(2t^2-1)} \leqslant 0$

$\frac{2(t+1)(t-\frac{1}{2})}{2t(t-\frac{\sqrt{2}}{2})(t+\frac{\sqrt{2}}{2})} \leqslant 0$

$-\ \ -1\ \ +\ \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ -\ \ 0\ \ +\ \ \frac{1}{2}\ \ -\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ +$

$\log_x 3 \in (-\infty;-1] \cup (-\frac{\sqrt{2}}{2};0) \cup [\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\log_x 3 \leqslant -1 = \log_x \frac{1}{x}$ ... $\log_x 3 - \log_x \frac{1}{x} \Rightarrow (x-1)(3-\frac{1}{x}) = (x-1)\frac{(3x-1)}{x} \leqslant 0$

$x \in (-\infty;0) \cup [\frac{1}{3};1)$

отпадает.

$x \in [\frac{1}{3};1).$

$\log_x 3 \in (-\frac{\sqrt{2}}{2};0)$

$\log_x 3 > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $<0 \to x<1$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\log_x x = -\log_x x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\log_x 3$

$1) = a.$ $x^a = 3$

$a \geqslant -\frac{7}{4}.$

$x^{-\frac{7}{4}} = 3 \quad \Big|^{\wedge -\frac{4}{7}}$

$x = 3^{-\frac{4}{7}}$ $3^{\frac{4}{7}}$ $\sqrt[7]{3}$ $<1.$

$3^{-\frac{4}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{81}} < \frac{1}{2}.$

$2^7 = 128 \Rightarrow$

$\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{9.}$ $\frac{1}{2,\ldots} < \frac{1}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $13x + \sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)} = 92$ $\to$ $6\sqrt[3]{(13x+y)} =$

$y + \sqrt[3]{\quad} = -124$

$124 + 92 = 216$ $\quad$ $124 - 92 = 32$

вычет $\Rightarrow 13x - y = 92+124 = 216 = 4\cdot 54 = 4\cdot 2\cdot 27 = 2^3\cdot 3^3 = 6^3$

$\underbrace{(13x+y)}_{t^3} + 2\cdot 6\cdot\sqrt[3]{13x+y} = -32$

$D = 4 - 16\cdot 4 < 0$ — нет реш $\Rightarrow$

$t^3 + 12t + 32 = 0$ $\quad t = -2$. $\quad t^3+$

$-8 - 24 + 32 = 0$ и $\Rightarrow (t+2)(t^2 - 2t + 16) = 0$

$t^3 - \cancel{2t^2} + 16t + \cancel{2t^2} - 4t + 32 = 0$

$t^3 + 12t + 32$.

$\Rightarrow \begin{cases} 13x + y = -2 \\ 13x - y = 216 \end{cases}$

$26x = 214 \to x = \frac{107}{13}$

$x = 208 | 26, \ 9$

$2y = -218 \to y = -109$

$216 - 104 = 112$ $\quad$ $26 \cdot 8 = 208$

y $\quad -80-24$

$y = -8 + 104 = 96$

2) $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 \neq 1 & x^2 \neq \frac{1}{3} & x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x > 0 \\ 9x^3 \neq 1 & x^3 \neq \frac{1}{9} & x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$

~~На одз:~~ Преобразуем $\quad -104 - 96 = 216$

$\sqrt{9\log_{3x^2} x} \leqslant \log_{9\cdot x^3} x^{-3}$

лонсв. Если $x = 1$ выполн $\Rightarrow$

Если $x \neq 1$

$\sqrt{9\log_{3x^2} x} \leqslant -3\log_{9x^3} x$.

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leqslant -3\log_{9x^3} x$

$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3x^2}} \leqslant -\frac{1}{\log_x 9x^3} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{t+2}} \leqslant -\frac{1}{2t+3}$

$\frac{(2t+3) + \sqrt{t+2}}{(\sqrt{t+2})(2t+3)} \leqslant 0$.

$\log_x x^2 + \log_x 3$ $\quad$ $\log_x 3x^2 + \log_x 3x$.

t $\quad$ $2\log_x 3 + 3$

☒ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

(3) _ _ _ _ _ _ _ Пусть a_1 a_2 a_3 - остатки.

$a_1 + \dots + a_3 = 12828$. Три послед степени числа 10^k.

~~тк старшие~~ Степень от деления $k<0$ нет смысла.

при $k=0$ $a=0 \Rightarrow$ возможн.

в Σa 5 разрядов $\Rightarrow k \in [0; 5]$.

10^k 10^{k-1} 10^{k-2}

1) $k=5$.

_ _ _ _ _

_ _ _ _

_ _ _

1 2 8 2 8

2) $k=4$

_ _ _ _

_ _ _

_ _

1 2 8 2 8

3) $k=3$

_ _ _

_ _

_ ← нет.

1 2 8 2 8

$k \leq 3$ невозможно

1) (7) n_1 — — — 1(8) → 6 Последн цифра 6.

$3n_7 \overset{10}{\equiv} 8 \Rightarrow n_7 = \boxed{6}$.

$3n_6 + 1 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow$

(6) $3n_6 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow n_6 \to \boxed{7}$.

(5) 2 8 ↑ ...+2

$3n_5 + 2 \overset{10}{\equiv} 8$

$3n_5 \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow n_5 \to \boxed{2}$

(4) $2n_4 \overset{10}{\equiv} 2 \to n_4 \to$ (1) $\to n_3 \to \boxed{1}$; $n_4 \to$ (6) $\to n_3 \to \boxed{0}$

n_1 и n_2 - произв числа

$n_1 \in [1; 9]$ - 9 в

$n_2 \in [0; 9]$ - 10 в.

2) $k=4$.

_ 7 6

_ 7 6

7 6

1 2 8 2 8

$n_7 = 6$

$n_6 = 7$

$2n_5 + 2 \overset{10}{\equiv} 8 \Rightarrow 2n_5 \overset{10}{\equiv} 6 \to n_5 \to \boxed{3}$; $n_5 \to \boxed{8}$

$n_5 \to \boxed{3} \Rightarrow n_4 = \boxed{12}$ - противоречие.

$n_5 \to \boxed{8} \Rightarrow n_4 = \boxed{11}$ - противоречи $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 вар выбрать n_4 и n_3; 10 вар $= n_2$; 9 вар $= n_1$

Отв: $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

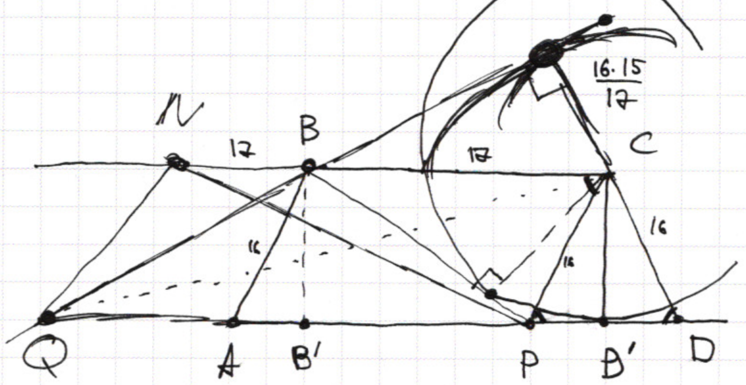
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



тк $AB' = PD'$

$\Rightarrow BC = 17$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)