МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Выполним замену:

$x-2=a$; $y-1=b$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ \cancel{ab\geq 0} \quad a-2b\geq 0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$5b^2+5ab-25=0$

$b^2+\cancel{a}\,\cancel{5}\,ba-5=0$.

$a=\frac{5-b^2}{b}=\frac{5}{b}-b$, $b\neq 0$.

$a^2+9b^2=25$

$\frac{25}{b^2}+b^2-10+9b^2=25$

$b^2=t$, $t>0$

$\frac{25}{t}+10t-35=0$

$\frac{2t^2-7t+5}{t}=0$.

$D=49-40=9$

$t=\frac{7\pm 3}{4}=1$; $\frac{10}{4}$

I. $t=1 \Leftrightarrow b^2=1$. $b=\pm 1$

$a^2=25-9=16$ $a=\pm 4$.

$16+4=5ab$ $ab\geq 0$

$(4;1)$; $(-4;-1)$.

Из ~~усл~~ ОДЗ: $a>\cancel{b}\,2b$.

$4>2$ $-4>-2$

✓ $\ominus$. − ~~пост~~ не уд. усл.

$\Rightarrow$ $a=4$; $b=1$.

$x-2=4$ $x=6$ ~~b~~ $y-1=1$ $y=2$. [illegible].
(6;2).

II. $\boxed{b^2 = \frac{5}{2}}$

$a^2+9b^2 = 25$ $\quad$ $a^2+4b^2 = 5ab$ $\quad$, $ab>0$ $\quad$ $a \geq 2b$.

$a^2 + \frac{45}{2} = 25$ $\quad$ $\frac{5}{2} + 10 = 5 \cdot ab$

$\boxed{a^2 = \frac{5}{2}}$ $\quad$ $25 = 10ab$

$ab = \cancel{\frac{5}{4}}\ \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \quad \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$

~~a^2~~

$a \geq 2b$.

$\sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ $-\sqrt{\frac{5}{2}} \geq -2\sqrt{\frac{5}{2}}$

— не уд. усл. $\qquad$ ✓ . - подх.

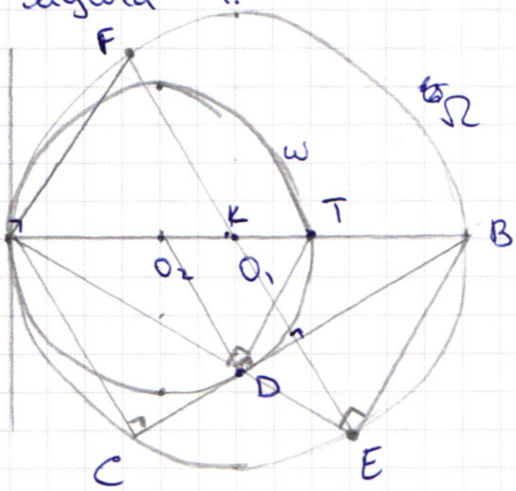
$\Rightarrow \quad x-2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ $y-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ $y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: ~~[illegible]~~; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.; $(6;2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



$CD = 8$
$BD = 17.$

1. $\begin{cases} \angle O_2DB = 90^\circ \text{ (кас.)} \\ \angle ACB = 90^\circ \text{ (AB - диам)} \end{cases}$

2. $\angle ABC$ - общий

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_2BD$

$\Rightarrow \frac{AB}{O_2B} = \frac{BC}{BD}$ $\quad AB = 2R$

$O_2B = 2R - r$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{17}$

$\frac{2R-r}{2R} =$ ~~25~~ $\frac{17}{25}$ $\qquad 1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25}$

$\frac{r}{2R} = \frac{\cancel{17}8}{25}$ $\qquad r = R \cdot \frac{16}{25}$

$AB \cap \omega = T$

BD - кас $\Rightarrow BD^2 = BT \cdot AB \Rightarrow 17^2 = 2R(2R - 2r) = 4R^2\left(1 - \frac{16}{25}\right)$

$17 = 2R \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow R = \frac{5 \cdot 17}{6}$ $\qquad r = \frac{16}{25} R = \frac{16}{25} \cdot \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3}$

$\angle AEB = 90^\circ$ (AB - диам). ~~$\angle CAE = \angle CBE$ (впис.)~~.

$\Rightarrow$ ~~$\triangle DAC \sim \triangle DBE$ (по 2 углам)~~

~~$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow AD \cdot DE = 8 \cdot 17.$~~

$EF \cap AB = K$ $\qquad EF \perp BC;\ O_2D \perp BC \Rightarrow EF \parallel O_2D.$

$\angle BAE$ - общий

$\Rightarrow \triangle DAO_2 \sim \triangle EAK \Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{AD}{AE}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~$\angle ADO_1 = 90°$ (A~~

$\angle ADT = 90°$ (AT - диам)

$\angle BAE$ - общий

$\Rightarrow \triangle DAT \sim \triangle EAB$

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$

$\Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} \Rightarrow x = R$, т. K = т. O_1 $\Rightarrow$ EF - диам.

$\angle FAE = 90°$ (FE - диам.).

$\angle BEA = 90°$ (BA - диам.).

$FE \cap AB =$ т. O.

$\Rightarrow$ AFBE - прямоугольник.

~~$\angle CAE = \angle CBE$ (впис)~~ $AD \cdot DE = CD \cdot DB = 8 \cdot 17$ (пересек. хорд).

~~$\Rightarrow \triangle$~~ $\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{16}{25}$ $25AD = 16AD + 16DE$

~~$AD = AE - ED$~~

$9AD = 16DE$

~~$1 - \frac{ED}{AE} = \frac{16}{25}$~~ ~~$\frac{9}{25} = \frac{ED}{AE}$~~

$AD \cdot DE = 8 \cdot 17$.

$\frac{16}{9} DE^2 = 8 \cdot 17$.

$DE = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{34} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

$AE =$ ~~$\frac{25}{16} AD = 25$~~ $\frac{25}{9} AE =$

$= \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{34} = \frac{25}{6}\sqrt{34}$

$\sin \angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\sqrt{34} \cdot \cancel{6}}{\underset{2}{\cancel{12}} \cdot 17 \cdot \cancel{8}} = \frac{5\sqrt{34}}{2 \cdot 17} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$ $\cos \angle AFE = \frac{\sqrt{34-25}}{\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$AF = 2R \cdot \cos AFE = \frac{17 \cdot 5}{{}_2\cancel{6}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{17 \cdot 5}{2\sqrt{34}}$ $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17 \cdot 5}{2\sqrt{34}} \cdot \frac{25}{6}\cancel{\sqrt{34}} = \frac{17 \cdot 5 \cdot 25}{24} = \frac{17 \cdot 125}{24}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$; $S_\triangle = \frac{17 \cdot 125}{24}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17.$ $\quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$4x+3<0 \quad x<-\frac{3}{4} \Rightarrow$ $4x+3<0$ при всех x из промежутка.

$y_1 = \frac{12x+11}{4x+3} \qquad y' = \frac{12(4x+3)-(12x+11)\cdot 4}{(4x+3)^2} = \frac{36-44}{(4x+3)^2} \quad \downarrow.$

$y_1\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-\frac{11\cdot 12}{4}+11}{-\frac{11}{4}\cdot 4+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$

$\cdot \lim\limits_{x\to -\frac{3}{4}} \left(\frac{12x+11}{4x+3}\right) = -\infty$

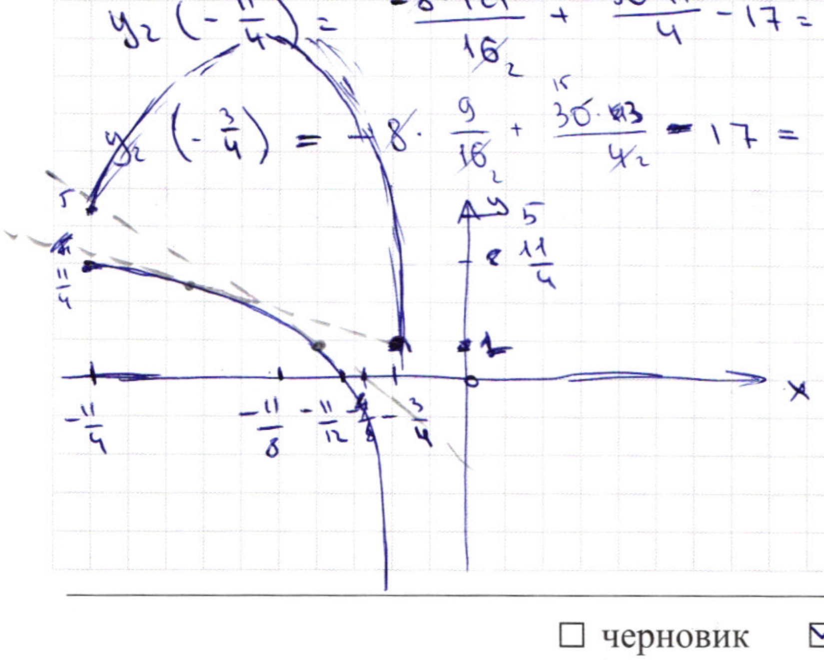
$y_1 = 0 \qquad x = -\frac{11}{12}$

$y_2 = -8x^2-30x-17 \qquad x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$ ~~$y_2(x_в) = \frac{125}{8} - 17 = -\frac{11}{8}.$~~

~~$y_2(x_в) = -\frac{125}{64}\cdot 8 + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 = \frac{125}{8} - 17 = -\frac{11}{8}.$~~ $-\frac{11}{4} < x_в < -\frac{3}{4}$

$y_2\left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{\cancel{8}\cdot 121}{\cancel{16}_2} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 = \frac{330-242}{4} - 17 = \cancel{88}\ 22 - 17 = 5$

$y_2\left(-\frac{3}{4}\right) = -\cancel{8}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_2} + \frac{30\cdot\overset{15}{\cancel{3}}}{\cancel{4}_2} - 17 = \frac{45-9}{2} - \frac{34}{2} = 1.$



$y_3 = ax+b.$ $\quad$ при $x = -\frac{11}{4}$ $y_3 \in \left[\frac{11}{4}; 5\right]$

при $x = -\frac{3}{4}$ $y_3 \leq 1.$

- только одна. т. пересечения с кривой y_1.

Крайние случаи:

① . $y_3 = ax + b$. при $x = -\frac{11}{4}$; $y_3 = 5$.

$5 = -\frac{11}{4}a + b$. $b = 5 + \frac{11}{4}a$. $a \neq 0$.

$\frac{12x+11}{4x+3} = ax + \frac{11}{4}a + 5$.

$\underline{12x+11} = \underline{4ax^3} + \underline{11ax} + \underline{20x} + \underline{3ax} + \frac{33}{4}a + 15$.

$4ax^3 + x(11a + \overset{8}{\cancel{20}} + 3a) + \frac{33}{4}a + 4 = 0$.

$D = 196a^2 + 64 + 224a - 16a\left(\frac{33}{4}a + 4\right) =$

$= 196a^2 + 64 + 224a - 132a^2 - 64a = 0$.

$64a^2 + 160a + 64 = 0$.

$16(4a^2 + 10a + 4) = 0$

$2a^2 + 5a + 2 = 0$. $D = 25 - 16 = 3$

$a = \frac{-5 \pm 3}{4} = \textcircled{-2}, -\frac{1}{2}$. - п.к.

$a = -2$. $b = 5 + \frac{11}{4}(-2) = 5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$.

② . при $x = -\frac{3}{4}$ $y_3 = 1$.

$1 = -\frac{3}{4}a + b$ $b = 1 + \frac{3}{4}a$

$\frac{12x+11}{4x+3} = ax + 1 + \frac{3}{4}a$ $12x + 11 = 4ax^2 + 3ax + 4x + 3 + 3ax + \frac{9}{4}a$

$4ax^2 + x(6a - 8) + \frac{9}{4}a - 8 = 0$.

$D = 36a^2 + 64 - 96a - 16a\left(\frac{9}{4}a - 8\right) = 36a^2 + 64 - 96a - 36a^2 + 128a = 0$.

$32a + 64 = 0$ $a = -2$. $b = 1 + \frac{3}{4}a = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $a = -2$; $b = -\frac{1}{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}$ ~~$\geq$~~ $+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$.

ОДЗ:

$x^2+18x=a$.

$x^2+18x>0$.

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$.

Пусть $a=12^k$, т.к. $a>0$ из ОДЗ.

$\Rightarrow 5^{\log_{12}12^k} + 12^k \geq$ ~~a~~ $12^{k\log_{12}13}$

$\Rightarrow 5^k+12^k \geq 13^k$.

~~Равенство достигается п~~ Равенство достигается при $k=2$.

при $k>2$, 13^k растёт быстрее, чем 5^k+12^k.

при $k<2$ – меньше

$\Rightarrow a \in (0; 12^2]$.

$0 < x^2+18x \leq 144$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$x^2+18x-144 \leq 0$.

$D = 324+576 = 900$

$x = \frac{-18\pm30}{2} = 6; -24$.

$x \in [-24; 6]$.

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Задача 6.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\Rightarrow$ Можно определить значения во всех точках

к $x \in \mathbb{N}$, $x \in [1; 24]$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0

x	19	20	21	22	23	24
f(x).	4	1	1	2	5	0

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right).$$

$$f(1) = 0 = f\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(n).$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$f(x/y) < 0.$

① $f(x) = 0$ $\varnothing$

② $f(x) = 1$; $f(y) < 1$ $N_1 = 7 \cdot 11$

③ $f(x) = 2$; $f(y) < 2$ $N_2 = 2 \cdot 18$

④ $f(x) = 3$; $f(y) < 3$ $N_3 = 1 \cdot 20$

⑤ $f(x) = 4$; $f(y) < 4$ $N_4 = 2 \cdot 21$

⑥ $f(x) = 5$; $f(y) < 5$ $N_5 = 1 \cdot 23$.

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 77 + 36 + 20 + 42 + 23 = 198.$$

Ответ: $N = 198$.

$a = 12^k$

$5^k + 12^k \geqslant 13^k$ $\qquad y = 5^k + 12^k - 13^k$

~~$y' = 5^k \ln 5 + 12^k \ln 12 - 13^k \ln 13 \ne 0$.~~

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$81 \cdot 4 =$
$= 320 + 4$.

$\frac{1}{n}$ $\quad \cancel{\frac{2}{n}}$ $\quad \cancel{\frac{3}{n}}$ $\quad \cancel{\frac{4}{n}}$ ~~——~~

$144 \cdot 4 =$
$= 400 + 160 + 16 =$
$= 576$.

~~$\frac{5}{n}$ $\cancel{\frac{6}{n}}$ $\frac{7}{n}$ $\cancel{\frac{8}{n}}$ $\frac{9}{n}$~~ ...

~~$\frac{10}{n}$~~

$\textcircled{\frac{1}{n}}$
ш.

$\frac{2}{n}$
↖ ↙ ↘ $\frac{1}{n_*}$ (n-нет.)
(12).

$f\left(\frac{2}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(2) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(x)$

$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0		
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		

$f(1) = 0 = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n)$.

$77 + 23 = 100$

$62 + 36 = 98$

$f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{n}{2}\right) = 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

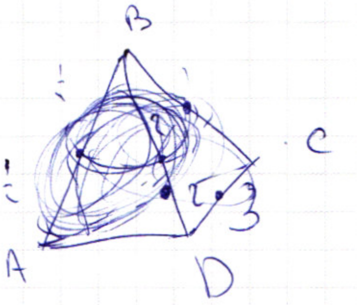
$\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

~~$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~ $\quad a = \frac{1}{12}$

$\sin 2\alpha$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{13}$

$$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}.$$



$$y' = 5^{\log_{12} a}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{\ln 12\cdot a} + 1 - \log_{12} 13\cdot a^{\log_{12} 13 - 1}$$

$$= 5^{\log_{12} a}\cdot\log_{12} 5\cdot\frac{1}{a} + 1 - \log_{12} 13$$

$$\log_{12}\left(\underbrace{\left(5^{5^{\log_{12} a}} - 5^{a}\right)(12) : \left(13^{a^{\log_{12} 13}}\right)}_{1 \vee 1.}\right) \vee 0.$$

$$\frac{5^{5^{\log_{12} a}} - 5^{a}}{13^{a^{\log_{12} 13}}} \vee \frac{1}{12}$$

~~$a = 12$~~.

143.

~~$5^2 + 12^2 \geq 13^2$~~.

~~$5 + 12 \geq 13$~~.

$12^2 \quad 5^{\log_{12} 12^2} + 12^2 \geq 13^2$

$\boxed{a = 12^2}$.

$5^2 + 12^2 \geq 13^2$.

12^3. $125 + 12^3 \geq 13^3$

$\varnothing$.

$1 + 1 \geq 1$.

$x^2 + 18x = 12^2$.

$-\cancel{8}\cdot\frac{125}{\cancel{64}_{8}}+\frac{2\cdot\cancel{16}\cdot 15}{8}-17=$

132

$\begin{array}{r} \overset{10}{22}\overset{10}{5} \\ -136 \\ \hline 89 \end{array}$

~~4~~ $\frac{12x+11}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-17.$

$y_1=$ ~~$\frac{3x+\frac{11}{4}}{x+\frac{3}{4}}$~~

$=\frac{225}{8}-17=$ ~~$-\frac{11}{8}$~~

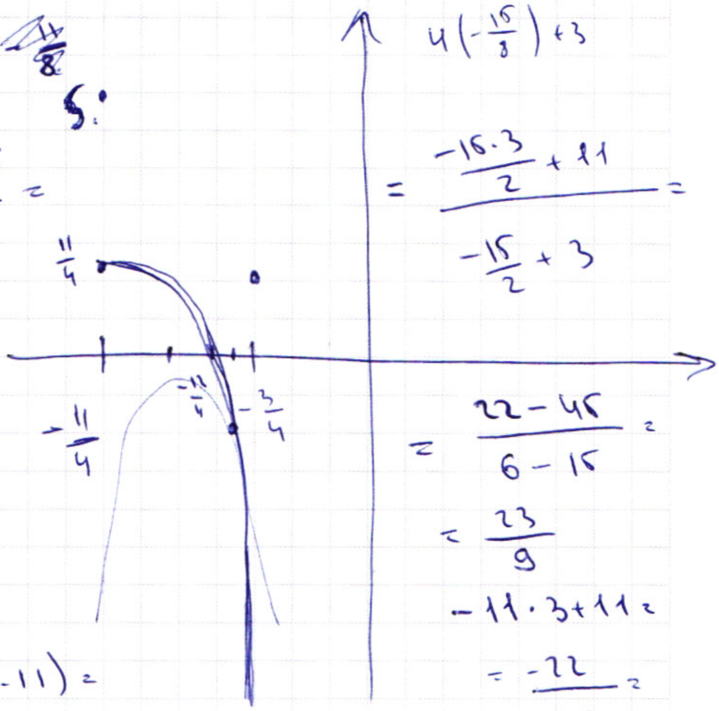
$\frac{225-136}{8}=$

$5:$

~~4~~ $ax+b-\frac{12x+11}{4x+3}\geq 0.$

$=$

$\frac{4ax^2+4bx+3ax+3b-12x-11}{4x+3}\geq 0.$



$\frac{12\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)+11}{4\left(-\frac{15}{8}\right)+3}=$

$=\frac{-\frac{15\cdot 3}{2}+11}{-\frac{15}{2}+3}=$

$=\frac{22-45}{6-15}=$

$=\frac{23}{9}$

$-11\cdot 3+11=$

$=\frac{-22}{-11+3}=$

$=+\frac{22}{8}=$

$=\frac{11}{4}$

$14\cdot 16=$

$=140+60+24=$

$=$

① $a=0.$

② $a\neq 0.$

$D=(4b+3a-12)^2-4\cdot 4a(3b-11)=$

$=16b^2+9a^2+144+24ab-96b-72a-48ba+176a$

$4x+3>0$

$x>-\frac{3}{4}.$

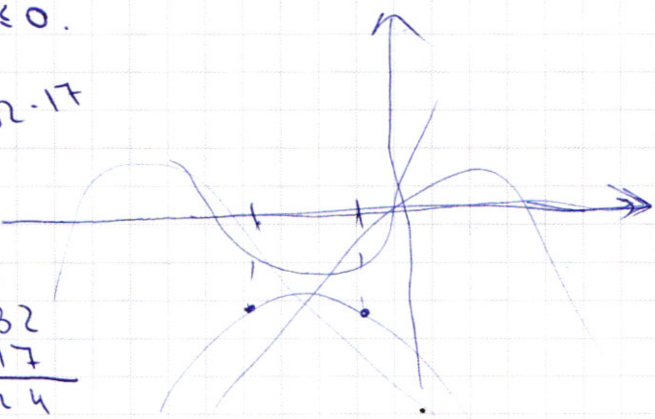
$x<-\frac{3}{4}\Rightarrow 4x+3<0.$

$\frac{-9+11}{}$

$4ax^2+4bx+3ax+3b-12x-11\leq 0.$

$58+30=88$

$D=900-32\cdot 17$



$80+56=136$ $-\frac{11}{8}.$

$\begin{array}{r} 1 \\ 32 \\ \cdot 17 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \end{array}$

$8x^2+30x+17+\frac{12x+11}{4x+3}\leq 0.$

$x_B=\frac{30}{-16}=\frac{15}{-8}$

~~38~~. $\underline{32x^3+24x^2+120x^2+90x+68x+51+12x+11\geq 0.}$

$\boxed{-\frac{15}{8}}.$

$32x^2+144x^2+170x+62\geq 0.$

$-8\cdot\frac{125}{64}+\frac{30\cdot 15}{8}-17=$

$=-\frac{125}{8}+\frac{250}{8}-17=\frac{125}{8}-\frac{80}{8}-\frac{56}{8}=$

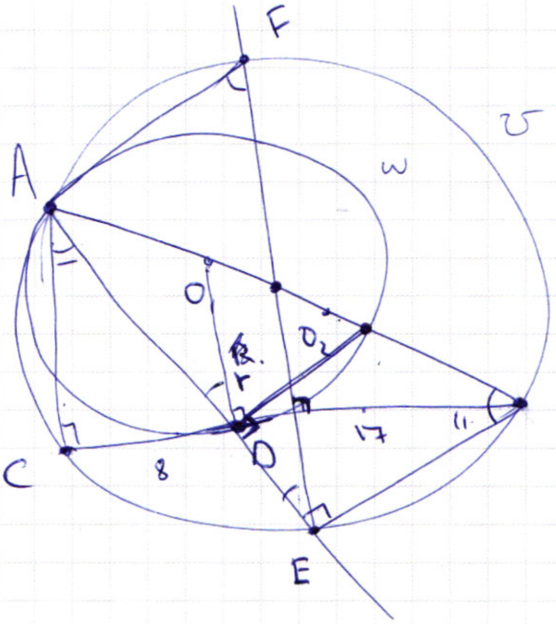
$=-\frac{11}{8}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

f. $f(ab) = f(a) + f(b).$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right].$ $1 \le x \le 24$
y

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$



$\frac{17}{25} = \frac{\cancel{R}}{\cancel{2R}}\ \frac{2R-r}{2R} =$

$= 1 - \frac{r}{2R}.$

$\frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$

$\frac{r}{R} = \frac{16}{25}$

$50 + 36 =$
$86.$

$17^2 = (2R - 2r)(2R) =$

$= 4R\left(R - \frac{16}{25}R\right) = R^2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{25} = 17^2$

$\frac{r}{\cancel{R}\ x} = \frac{AD}{AE} =$

$17 = R \cdot 2 \cdot \frac{3}{5}.$ $R = \frac{17 \cdot 5}{6}$

$r = \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{17 \cdot \cancel{5}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{8 \cdot 17}{15}$ $DE = \frac{17 \cdot 8}{AE}$

$80 + 56 =$
136

$\cancel{2R}\ \frac{2r}{2R} = \frac{AD}{AE}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{r}{R} = \frac{16}{25.} = \frac{\cancel{AD-}AE}{\cancel{AD+AE}\ DE} =$

$= 1 - \frac{AE}{DE} = 1 - \frac{AE^2}{8 \cdot 17}.$

$\frac{AE^2}{8 \cdot 17} = \frac{41}{25}$ $AE^2 = \frac{41 \cdot 17 \cdot 8}{25.}$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-80x-17$

~~$\frac{12x+11}{4x+3}$~~ (1) $\frac{12x+11}{4x+3} - ax - b \le 0.$

$\frac{12x+11-4ax^2-3ax-4bx-3b}{4x+3} \le 0$

$\frac{4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11}{4x+3} \le 0$

$\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right].$ 1) $a=0.$

$\frac{x(4b-12)+3b-11}{4x+3} \le 0.$

~~36 + 36~~

$\begin{cases} \cancel{(a-2b)^2 = ab} \\ \cancel{a^2+3b^2=25} \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\Big| \Rightarrow 5b^2 = 25-5ab$

$b^2+ab-5=0.$

$\boxed{a = \frac{5-b^2}{b}}$ $\boxed{b \ne 0}.$

~~$25-10b^2+$~~

$a = \frac{5}{b} - b$ $2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}} =$

$\frac{25}{b^2}+b^2-10+9b^2=25.$ $= \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}.$

$\frac{25}{b^2}+10b^2-15=0.$

$\frac{5}{b^2}+2b^2-3=0.$ $b^2=t.$

$\frac{5+2t^2-3t}{t}=0.$ $2t^2-3t+5=0.$

~~$D=9$~~ $<0.$

$0 = \sqrt{(x-2)(y-1)}.$

$2 = \sqrt{(1)\cdot(4)}.$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25.$

$16+9=25.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(5^{\log_{12} a} + a - a^{\log_{12} 13}\right)' \geq 0.$$

$$y' = 1 - \log_{12} 13\, a^{(\log_{12} \frac{13}{12})} + 5^{\log_{12} a} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\ln 12 \cdot a} = 0.$$

$$\cancel{1 - \log_{12} \frac{13}{12} \cdot \log_{12} 13}$$

$$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$$

$x^2 + 18x > 0$

$x(x+18) > 0$

~~$x \in (-18, 0)$~~.

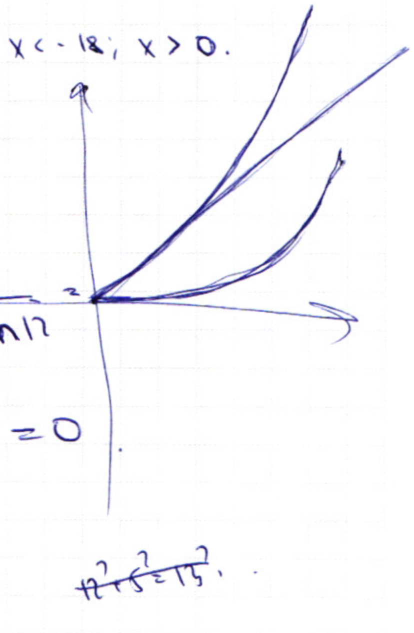
$x < -18;\ x > 0.$

$$\boxed{5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}.}$$

$$a \nearrow \geq a^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} a}.$$

$$y' = \log_{12} 13 \cdot a^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 5^{\log_{12} a} \ln 5 \frac{1}{a \ln 12}$$

$$= \log_{12} 13 \cdot a^{\log_{12} \frac{13}{12}} - \ln_{12} 5 \cdot \frac{5^{\log_{12} a}}{a} = 0$$



$$\log_{12} 13^{a^{\log_{12} \frac{13}{12}}} - \ln_{12} 5^{\frac{\log_{12} a}{a}} = 0.$$

~~$12^2 + 5^2 = 13^2$~~.

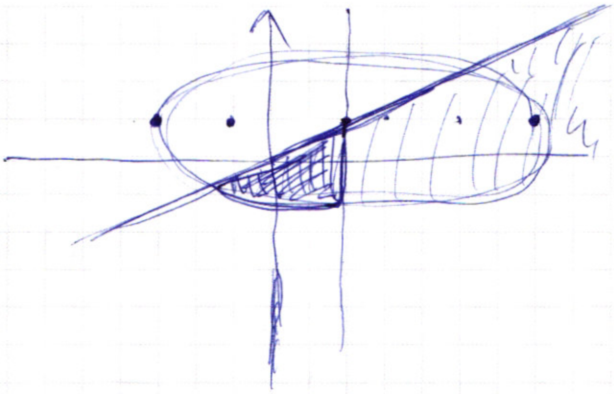
$$\frac{13^{a^{\log_{12} \frac{13}{12}}}}{5^{\frac{\log_{12} a}{a}}} > 0.$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

5



$$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}.$$

~~$a^2-2b^2=ab$~~

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$\log_{12}a=\frac{\ln a}{\ln 12}$$

$$5b^2=5ab-25.$$

~~$b^2-5ab+25=0$~~.

~~$D=25(a^2-4)$~~

$$(\log_{12}a)'=\frac{1}{\ln 12\cdot a}$$

~~$b=\frac{5a\pm 5\sqrt{a^2-4}}{2}$~~

③ $$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$$

~~$1+0\geq 0$~~ $\varnothing$.

$x^2+18x=a$

ОДЗ: $a>0$.

$$5^{\log_{12}a}+a\geq|a|^{\log_{12}13}\ {}^{>0}$$

↗ ↗

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

>0 ↗.

$$5^{\log_{12}a}+a\geq a^{\log_{12}13}$$

$a^{\cdot k}$ ~~$k>0$~~

~~$(a^k)'=a^k\cdot\ln a$~~

~~>0.~~

~~$a>1$!~~ ↑

~~$a<1$~~ ↓

~~$5^{\log_{12}a}\geq a\left(a^{\log_{12}13}-1\right)$~~

~~$\log_{12}a\cdot\log_a 5\geq 1+\log_a\left(a^{\log_{12}13}-1\right)$~~.

$$\left(5^{\log_{12}a}+a\right)'=1+5^{\log_{12}a}\cdot\ln 5\cdot(\log_{12}a)'=$$

$$=1+5^{\log_{12}a}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{\ln 12\cdot a}>0.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\operatorname{tg}\alpha - ?$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

~~$x-2$~~

② $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\quad$ ~~x^2+4y^2-5xy~~

$x \geq 2$

~~$y \geq 2$~~ ~~$2x$~~

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

~~$9y^2-18y+9$~~

$(x-2)^2 \cancel{-4} + 3(y-1)^2 = 25.$

$x \leq 2$

$y \leq 1$

~~$x^2+9y^2-4xy = xy-x-2y+2.$~~

~~$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2$~~

~~$xy-x-2y+2 \geq 0$~~

$x-2y \geq 0$ $\quad$ $y \leq \frac{x}{2}$

$x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2y)^2 = (x-2)^2(y-1)^2$

$(x-2)^2+3(y-1)^2=25$

~~$\begin{cases} a^2b^2 = (a-2b)^2 = a^2+4b^2-4ab = \\ a^2+3b^2=25 \quad = 25+b^2-4ab.. \end{cases}$~~

~~$a^2b^2+4ab-b^2-25=0$~~ ~~$D = 16b^2+4b^2+100$~~

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)