МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ______

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$x-2y\geqslant 0$

$x\geqslant 2y$;

Замена: $(x-2)=a$; $(y-1)=b$; тогда

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$a^2-5ab+4b^2=0 \qquad \begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

1) $a=b$

$a^2+9a^2=25$

$a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

2) $a=4b$

$16b^2+9b^2=25$

$b=\pm 1$

1.1) $a=b=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

1.2) $a=b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$$\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$x\geqslant 2y$

$2+\sqrt{\frac{5}{2}}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{5}{2}}$; неверно; $\Rightarrow$ не подходит.

$-\sqrt{\frac{5}{2}}\geqslant -2\sqrt{\frac{5}{2}}$; верно

2.1) $\begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases}$ 2.2) $\begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

$6 \geq 4$; верно. $-2 \geq 0$; неверно; не подходит

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

№1

$\sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + 2\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta =$

$= \sin 2\alpha\cos^2\beta - \sin 2\beta\sin^2\alpha + \sin 2\beta\cos^2\alpha - \sin 2\alpha\sin^2\beta =$

$= \sin 2\alpha(\cos 2\beta + \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Замена: $2\alpha = x$; $2\beta = y$.

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = \sin x\cos 2y + \sin 2y\cos x + \sin x =$

$= \sin x(2\cos^2 y - 1 + 1) + 2\sin y\cos y\cos x = 2\cos y(\sin x\cos y + \sin y\cos x) =$

$= 2\cos y\,\sin(x+y) = -\frac{4}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\cos y = \frac{(-4)\cdot\sqrt{5}}{5(-1)} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \sin y = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2\cos y(\sin x\cos y + \sin y\cos x) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{2\cdot 2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin x + \cos x\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin x + \left(\pm\sqrt{1-\sin^2 x}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2\sin x \pm \overset{\cos x}{\overset{\sim}{\sqrt{1-\sin^2 x}}} = -1$$

$$2\sin x \mp \cos x = -1$$

$$2\sin x = -1-\cos x$$

$$4\sin^2 x = \cos^2 x + 2\cos x + 1$$

$$4 - 4\cos^2 x = \cos^2 x + 2\cos x + 1$$

$$5\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$$

$$(5\cos x - 3)(\cos x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos x = \frac{3}{5} & \rightarrow \quad \sin x = \frac{-1-\frac{3}{5}}{2} = -\frac{4}{5} \\ \cos x = -1 & \rightarrow \quad \sin x = \frac{-1-(-1)}{2} = 0 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

*) $tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1) $tg x = -\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = -\frac{4}{3}$

$tg 2\alpha = -\frac{4}{3} = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

~~$4tg^2\alpha - 4 = 6tg\alpha$~~

$\frac{2}{3} = \frac{tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$

$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$tg\alpha = \frac{3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

2) $tg x = 0$

$tg 2\alpha = 0 = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$tg\alpha = 0$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 0; 2\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\qquad f(a)>0$

$f(p)=[p/4]$

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$f(x/y)<0$ –?

$f(ab)+f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a\cdot a)=f(a)+f(a)=f(a)+f(b)+f\left(\frac{a}{b}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$ $\qquad f(x)-f(y)<0$ $\qquad f(x)<f(y)$

$f(y)>0;$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4;$

$f(18)=0;$

$f(19)=4;$

$f(20)=1;$

$f(21)=1;$

$f(22)=2;$

$f(23)=5;$

$f(24)=0$

1) При $y=23$: $f(y)=5$; ~~x принимает все~~

x может принимать все натуральные значения $[1;23)\cup(23;24]$;
то есть 23 значения; (23 пары $x;y$)

2) При $y=17$ или $y=19$: $f(y)=4$ $\quad f(x)<f(y)$

x принимает 21 значение ~~кроме знач~~ (21 · 2 пар $x;y$)

3) При $y=13$: $f(y)=3$;

x принимает 20 значений (20 пар $x;y$)

4) При $y=11$; $y=22$; $f(y)=2$;

x ~~прин~~ может принять 18 значений (18 · 2 пар)

5) При $y=5;7;10;14;15;20;21$; (7 шт) $f(y)=1$;
x может принять 11 значений (11 · 7)

Всего: $23+42+20+36+77=200$

Ответ: 200

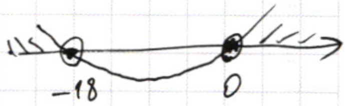
№ 3.

$$5^{\log_{12} x(x+18)}+x^2\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$x^2+18x>0$$

$$x(x+18)>0$$

$$x(x+18)\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-5^{\log_{12} x(x+18)}$$



$$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$$

Замена $x^2+18x=a$; $a>0$

$$a\geq a^{\log_{12}13}-a^{\log_{12}5}$$

~~1) $a=1$: $1\geq 1-1$, $1\geq 0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$x^2-18x=1$~~

~~$x^2-18x-1=0$~~

~~$\frac{D}{4}=81+1$~~

$a \geq 13^{\log_{12} a} - 5^{\log_{12} a}$

$12^a \geq 12^{13^{\log_{12} a} - 5^{\log_{12} a}}$

$12^a \geq \frac{13^a}{5^a}$

$12^a \cdot 5^a \geq 13^a$

$60^a \geq 13^a$

$a \geq 0.$

$x^2+18x \geq 0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

№6 $\quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right).$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17 \quad \Big| (-3); /2$

$\frac{1}{4x+3} \le \frac{a}{2}x + \frac{(b-3)}{2} \le -4x^2 - 15x - 10$

$\frac{a}{2} = k$

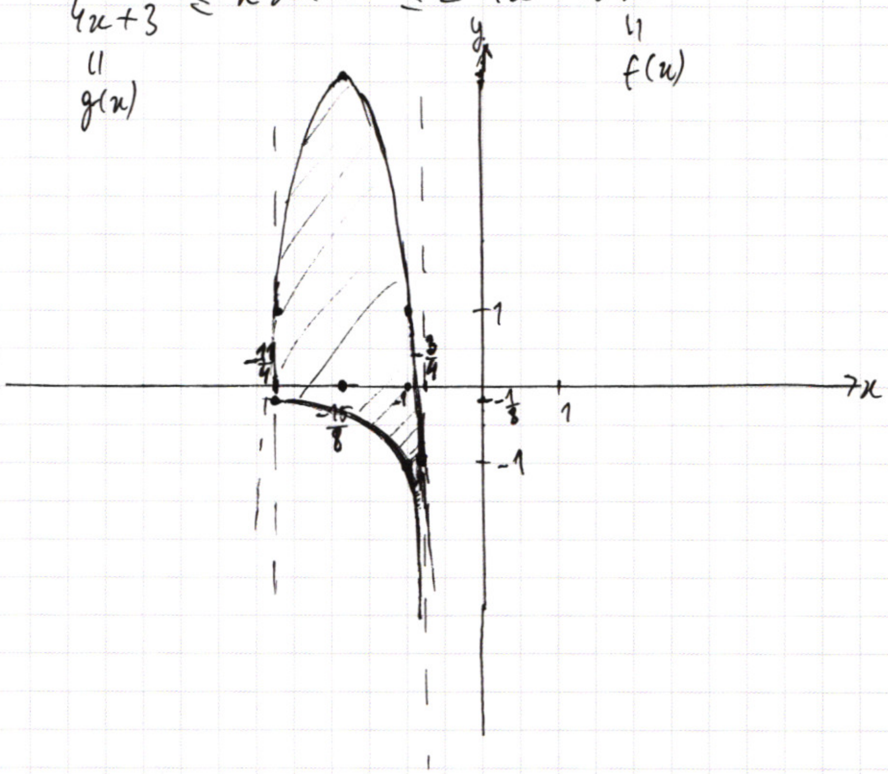
$\frac{b-3}{2} = c$ $\quad t(x)$

$\quad \quad ||$

$\frac{1}{4x+3} \le kx + c \le -4x^2 - 15x - 10$

$||$ $\quad\quad\quad ||$

$g(x)$ $\quad\quad f(x)$



$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{4 \cdot 121}{16} + \frac{\overset{165}{15 \cdot 11}}{4} - 10 = 1$

$f(-1) = 1$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

$g(-1) = -1$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{45}{4} - 10 = -1$

$\cancel{t(x)}$ $\cancel{t(x)}$ $t\left(-\frac{3}{4}\right) \le -1$ $\quad t\left(-\frac{11}{4}\right) \le f\left(-\frac{11}{4}\right) = 1$

$t\left(-\frac{11}{4}\right) \ge -\frac{1}{8}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} k\left(-\frac{11}{4}\right)+c \le 1 & \mid \cdot 4 \\ k\left(-\frac{11}{4}\right)+c \ge -\frac{1}{8} & \mid \cdot 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4c-11k \le 4 \\ 8c-22k \ge -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8c-22k \le 8 \\ 8c-22k \ge -1 \end{cases}$$

$$t\left(-\frac{3}{4}\right) \le f\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$k\left(-\frac{3}{4}\right)+c \le -1 \quad \mid \cdot 8$$

$$\begin{cases} 8c-22k \le 8 \\ 8c-22k \ge -1 \\ 8c-6k \le -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{8(b-3)}{2} - \frac{22a}{2} \le 8 \\ \frac{8(b-3)}{2} - \frac{22a}{2} \ge -1 \\ \frac{8(b-3)}{2} - \frac{6a}{2} \le -8 \end{cases}$$

$\cancel{c \le 11k+8}$

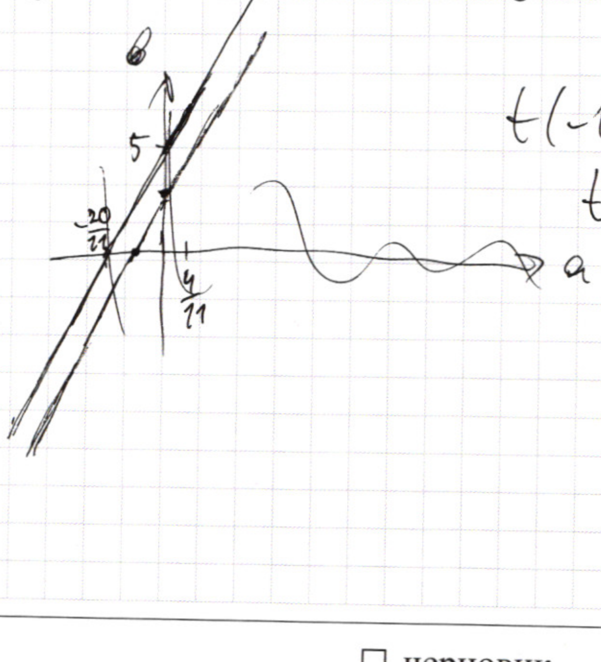
$$c \le \frac{11k+4}{4}$$

$$\begin{cases} 4b-12-11a \le 8 \\ 4b-12-11a \ge -1 \\ 4b-12-3a \le -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4b-11a \le 20 \\ 4b-11a \ge 11 \\ 4b-3a \le 4 \end{cases}$$

$b \le \frac{20+11a}{4} = 5+\frac{11}{4}a$

$b \ge \frac{11(a+1)}{4} = \frac{11}{4}a+\frac{11}{4}$

$b \le \frac{4+3a}{4} = 1+\frac{3}{4}a$



$$t(-1) \le 1$$
$$t(-1) \ge -1$$

$-k+c \le 1 \qquad c \le k+1$

$-k+c \ge -1 \qquad c \ge (k-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6. $3+\frac{2}{4x+3}$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$-4x^2-15x-\frac{37}{4}>0 \,|\cdot 4$$

$$-16x^2-60x-37>0$$

$$\frac{D}{4} = 900-16\cdot 37$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{4\cdot 9}{16} + \frac{15\cdot 3}{4} - 10 = \frac{36}{4} - 10 = -1$$

$$x_0 = \frac{60}{-16} = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ 12x+9 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$-\frac{11}{4}$. $\quad -\frac{121}{4} + \frac{15\cdot 11}{4} - 10$

$-4+15-10$

$\frac{44}{4}$

$$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{1}{x} \le kx+c$$

$k+c = 1$

$$\frac{1}{4x+3} \le \frac{ax+b-3}{2} \le -4x^2-15x-10$$

$x_0 = -\frac{15}{8}$

$kx+c$

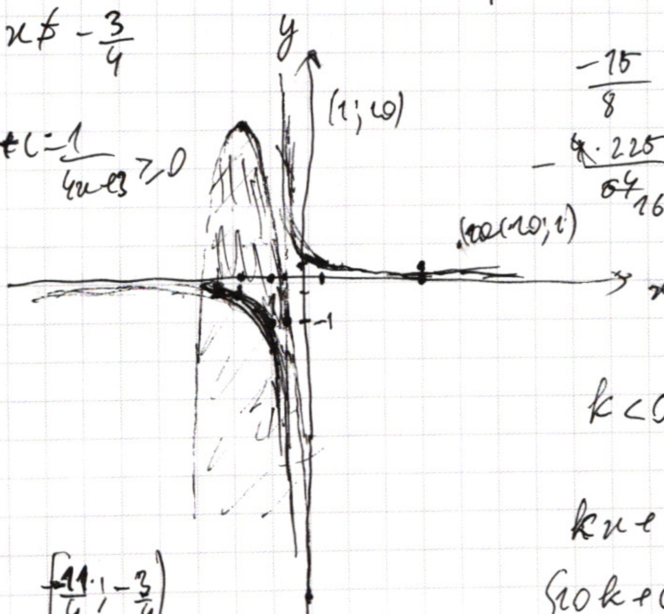
$-7{,}5+3 = -\frac{1}{4{,}5} = -\frac{2}{9}$

асимптота $x = -\frac{3}{4}$

$-\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8} = -1\frac{3{,}5}{4}$ $\quad -\frac{9}{4} + \frac{45}{4} - 10 = -1$

$x \ne -\frac{3}{4}$

$kx+c = \frac{1}{4x+3} \ge 0$



$-\frac{15}{8}$

$$-\frac{4\cdot 225}{64} + \frac{225}{8}$$

$$-\frac{4\cdot 225}{64} + \frac{225}{8} - 10 =$$

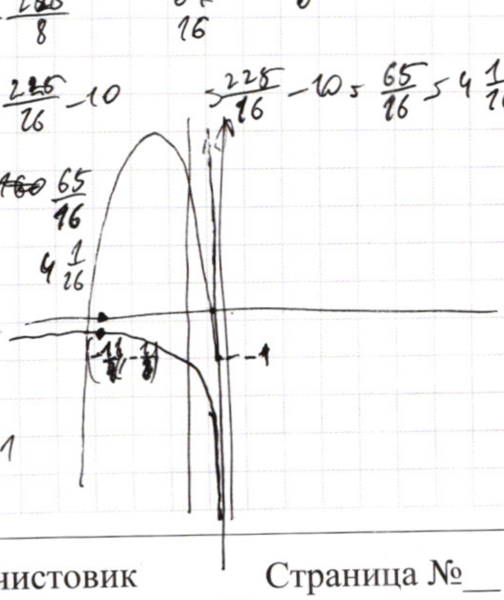
$\frac{225}{16} - 10$

$\frac{225}{16} - 10 = \frac{65}{16} = 4\frac{1}{16}$

$\frac{65}{16}$

$k<0$

$4\frac{1}{16}$



$-\frac{7}{8}$

$kx+c$

$$\begin{cases} 10k+c=1 \\ k+c=10 \end{cases}$$

$\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$kx+c-\frac{1}{4x+3}\geq 0$

$\frac{(4x+3)(kx+c)-1}{4x+3}\geq 0$

$(4x+3)(kx+c)-1\leq 0$

$4kx^2+(4c+3k)x+(3c-1)\leq 0$

$(4x+3)(kx+c)=1$

$4kx^2+(4c+3k)x+(3c-1)=0$

$\cancel{4}\,16c^2+24ck+9k^2-16(k\cdot(3c-1)$

$16c^2+24ck-48kc+16+9k^2=$

$=\cancel{3c+3}\,(4c-3k)^2+16>0$

$\frac{11k+4}{4}\geq k-1$

$11k+4\geq 4k-4$

$7k\geq 8$

$k\geq\frac{8}{7}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{1-\sin^2 x}$

$2\sin x + \cos x = -1$

$2\sin x = -(\cos x + 1)$

$\cancel{2}\sin\cdot\cos x = \cancel{1-2}$

$\cancel{2\sin 2\sin x + 1} \quad \cancel{2x + 2\sin x = -(1+\cos x)}$

$4\sin^2 x = \cancel{4}\cdot\cos^2 x + 2\cos x + 1$

$4(1-\cos^2 x)$ $\quad t$

$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 - 4$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$t = \frac{-2 \pm 8}{10} = \left[\begin{array}{l}\frac{3}{5}\\ -1\end{array}\right.$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+6 \le -8x^2 - 30x - 17$

$\cos x = -\frac{3}{5}$

1) $\cos x = \frac{3}{5}$

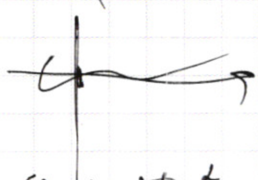
$\sin x = -\frac{4}{5}$

2) $\cos x = -1$

$\sin x = 0$

$\operatorname{tg} x = 0$

$\sin x = \pm\frac{4}{5}$



$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\ldots}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg} x = -\frac{4\cdot 5}{5\cdot 3} = -\frac{4}{3}$ $\quad -\frac{4}{3}$

$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$3\cos^2 x - 2\cos x - 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$\cos x = \frac{2 \pm 8}{6} = \left[\begin{array}{l}\ldots\\ -1\end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\frac{8}{3}}{\left(\frac{9}{9} - \frac{16}{9}\right)}$

$-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$

$\frac{1}{4t}+9 \quad \frac{1}{8} \quad -\frac{2}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

~~$f(6), f(7) = 4$~~

~~$f(8), 10, f(8), f(9), f(10), f(11) = 2$~~

~~$f(9) \cdot f(10)$~~

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$\frac{f(ab)}{f\left(\frac{a}{b}\right)} + f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a^2) = f(a) + f(a)$

$f(0) + f(10) = f(0)$

~~$f(0) = 0$~~

$a \geq 1 \quad a^{x\frac{3}{2}} - a^{x\frac{1}{2}}$

$a = 12$

$12 \geq 13 - 5 = 12 \geq 8$ ✓ $f(4) = 0$

$f(6) = 0$ $f(8) = 0$ $f(9) = 0$ $f(18) = 0$

$f(16) = 0$ $f(10) = 1$ $f(20) = 1$

~~$f(24) = 0$~~ $f(12) = 0$ $f(21) = 1$

$f(14) = 1$ $f(22) = 2$

$f(15) = 1$ $f(24) = 0$

$144 \quad 12^2 = 169 - 25$

$a = 12^2 \quad f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) - ?$

$12^{2\log}$

~~$f(1) = 0$~~

$a \geq 13^{\log_{12} a} - 5^{\log_{12} a}$

$x^{a^{\log_{12} a}} \quad \sqrt{5} \quad a^a$

$2\sqrt{\ }$

$1{,}41 \ 1{,}47$

~~$11 \geq 11$~~ 14

$2 \geq \sqrt{8} - \sqrt{2}$

$2 \geq \sqrt{2}$

$x \ 13^{\log_{12} a}$

~~$13 \geq 14$~~

$12^a \geq \frac{12}{12^{5\log_{12} a}}$

$12^a \geq \frac{13^a}{5^a}$

$12^a \cdot 5^a \geq 13^a$

$(60)^a \geq 13^a$

~~$11 < 13$~~

5 – 1
7 – 1
10 – 1
11 – 2
13 – 3
14 – 1
15 – 1
17 – 4
19 – 4
21 – 1
22 – 2
23 – 5

если $x \vdots y \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$

$x \not\vdots y \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$3\sqrt{a}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

всего 13 вар

$y = 23$; $x = x$ — 11 вар. (11)

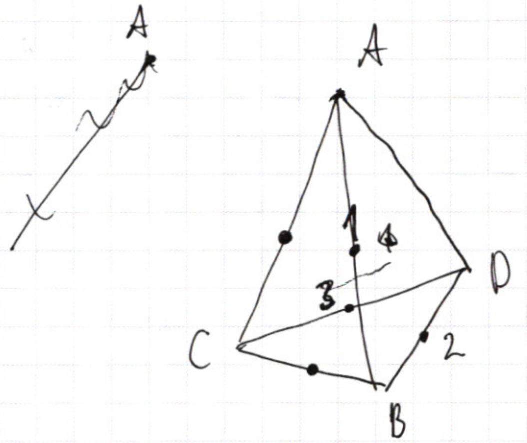
$\frac{y=17}{y=19}$ → 9 вар (9 · 2 = 18)

$y = 13$ → 8 вар

$\frac{y = 11}{y=22}$ → 6 вар (6 · 2 = 12)

18 + 8 + 12 + 11 = 49 вар

7.



$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \cos y)$ $\sin y = \sqrt{1-\frac{4 \cdot 5}{25}} = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

$2\cos y \cdot (\sin x \cos y + \sin y \cos x) = -\frac{4}{5}$

1) $\sin y = \frac{\sqrt5}{5}$

$\frac{4\sqrt5}{5}\left(\frac{2\sqrt5}{5}\sin x + \frac{\sqrt5}{5}\cos x\right) = \frac{8}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = -\frac{4}{5}$

$2\sin x + \cos x = -1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12} x(x+18)} + x^2 \geqslant |x(x+18)|^{\log_{12} 13} - 18x$$

$$x(x+18) \geqslant |x(x+18)|^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} x(x+18)}$$

Замена $x(x+18) = a$

$$a \geqslant |a|^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} a}$$

$$a \geqslant 13^{\log_{12} |a|} - 5^{\log_{12} a} \qquad a > 0$$

$$a \geqslant 13^{\log_{12} a} - 5^{\log_{12} a} = 5^{\log_{12} a}\left(\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12} a} - 1\right)$$

$$a^{\overset{>1}{\log_{12} 13}} - a^{\overset{>1>\log_{12} 13}{\log_{12} 5}} - a \leq 0$$

1) $a = 1$:

$1 - 1 - 1 = -1 \leq 0$; верно

2) $a > 1$: $(1; \frac{3}{2})$ $< \frac{3}{2}$ $> \frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2}; 1)$ < 1

$$a^{\log_{12} 13 > 1} - a^{\log_{12} 5} - a \leq 0$$

$$a\left(a^{\log_{12}(13) - \log_{12} 5} - \ldots - a^{1 - \log_{12}\frac{12}{5}}\right) \leq 0$$

$\log_{12} 5$, $\log_{12}\frac{13}{5}$

$$\log_a a^{\overset{<\frac{3}{2}}{\log_{12} 13}} = a + a^{\overset{>\frac{1}{2}}{\log_{12} 5}}$$

☑ черновик ☐ чистовик

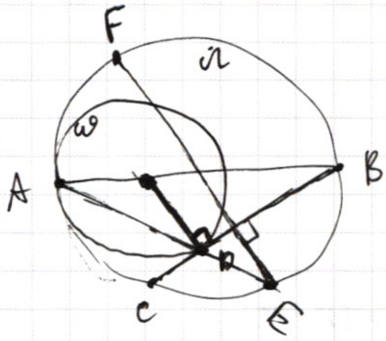
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4.

ω кас Ω = A (внутр. образом)



R, r – ?

∠AFE – ?

S(AEF) – ?

CD = 8

BD = 17

CD · BD = AD · DE = 8 · 17 = 136

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1) $\sin2(\alpha+\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$

$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta-2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+2\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha-2\sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\sin2\alpha\cos^2\beta-\sin2\beta\sin^2\alpha+\sin2\beta\cos^2\alpha-\sin2\alpha\cdot\sin^2\beta=$

$=\sin2\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+\sin2\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x\cos y+\sin y\cos x=\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt5}$

2) $\cancel{\sin2(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha}=2\sin(\cancel{\alpha+2\beta})\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha=$

$2\alpha=x$

$2\beta=y$

$\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=\frac{2\sqrt5}{5}$

$\cos^2\beta=\frac{2\sqrt5+5}{10}$

$2\cos^2y-1$; $1-\cos^2y$

$\sin(x+2y)+\sin x=\sin x\cos2y+\sin2y\cos x+\sin x=\sin x(\cos^2y-\sin^2y)+$

$+2\sin y\cos y\cos x+\sin x=\sin x(2\cos^2y)+2\sin y\cos y\cos x=$

$=2\cos y(\sin x\cos y+\sin y\cos x)=2\cos y\cdot\sin(x+y)=2\cos y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{4}{5}$

$\cos y=\frac{2\sqrt5}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№ 2.

$~~x-2y \ge 2~~$ $x \ge 2y$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+\cancel{(3y-3)}(3y-3)^2=12+9+4 \end{cases}$$

Замена $(y-1)=b$; $(x-2)=a$; тогда

$ab \ge 0$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+(3b)^2=25 \end{cases} \Rightarrow a^2-4ab+4b^2=ab \quad \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+(3b)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+(3b)^2=25 \end{cases}$$

1) $a=b$

$y-1=x-2$

$4^6-2^6=$ $a^2+9a^2=25$

$~~y=x+~~$

$2^6 \cdot 2^6-2^6=$ $10a^2=25$

$x=y+1$

$=2^6(2^6-1)$

$a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

2) $a=4b$

$16b^2+9b^2=25$

$b^2=1$

$b=\pm1 \left[\begin{array}{l} 1;\ a=4\ (1) \\ -1;\ a=-4\ (2) \end{array}\right.$

$~~a=\pm4~~$

Ответ: $(6;2)$; $(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$.

1.1) $\begin{cases} y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $y=1+\sqrt{\frac{5}{2}}$ $x=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$; ~~не соотв.~~ $x \ge 2y$

, не подходят

$-\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

2.1) $\begin{cases} y-1=1 \\ x-2=4 \end{cases}$ $\begin{matrix} y=2 \\ x=6 \end{matrix}$

1.2) $\begin{cases} y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $\begin{matrix} y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{matrix}$

2.2) $\begin{cases} y-1=-1 \\ x-2=-4 \end{cases}$ $\begin{matrix} y=0 \\ x=-2 \end{matrix}$; ~~не~~;

$\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

~~не соотв. усл. $x \ge 2y$~~

не подходят

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)