МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases}$

$4x+y-2\sqrt[3]{y^2-16x^2} = 24$

$4x-y=64 \Rightarrow y-4x=-64$

$y^2-16x^2 = (y-4x)(y+4x) = -64(y+4x)$

$4x+y+8\sqrt[3]{4x+y} = 24 \qquad \sqrt[3]{4x+y} = t$

$t^3+8t=24$

Пусть $f(t)=t^3+8t$ и $g(t)=24$

т.к. $f'(t)=3t^2+8>0 \Rightarrow f(t)$ возрастает на всей области определения

$g(t)=\text{const} \Rightarrow f(t)$ и $g(t)$ имеют ~~единственную общую~~ единственное общее значение ~~точку~~ (т.е. графики этих функций ~~ино~~ пересекаются в одной точке). Заметим, что $t=2$ удовлетворяет равенству и это единственное такое возможное t.

$t=2 \Rightarrow \sqrt[3]{4x+y}=2 \Rightarrow \begin{matrix} 4x+y=8 \\ 4x-y=64 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow 8x=72 \Rightarrow x=9 \Rightarrow y=-28$

Ответ: $\begin{cases} x=9 \\ y=-28 \end{cases}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№2. $\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x}\frac{1}{x^2}$ ОДЗ: $\begin{cases} \begin{cases} 3x>0 \\ 3x\neq 1 \end{cases} \\ x^4>0 \\ \begin{cases} 9x>0 \\ 9x\neq 1 \end{cases} \\ x^2\neq 0 \\ \frac{1}{x^2}>0 \\ \log_{3x}x^4\geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;\frac{1}{9})\cup(\frac{1}{9};\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};+\infty) \\ x^4\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$

т.к. $\sqrt{\log_3 x^4}\geq 0 \Rightarrow \log_{9x}\frac{1}{x^2}\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2}\geq 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1\geq x^2 \\ \text{т.к. } x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in(0;1]$

Но т.к. $x\geq 1$, то неравенству удовлетворяет единственное значение $x=\{1\}$

Ответ: $x=\{1\}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $n = \overline{a_7 a_6 \ldots a_1}$

$n \underset{10^k}{\equiv} \overline{a_k \ldots a_1}$

$n \underset{10^{k+1}}{\equiv} \overline{a_{k+1} \ldots a_1}$

$n \underset{10^{k+2}}{\equiv} \overline{a_{k+2} \ldots a_1}$

$\boxed{a_1 \ldots a_6 \in [0;9] \quad a_7 \in [1;9] \quad a_1, a_2 \ldots a_7 \in \mathbb{Z}}$

$k+2 < 7 \Rightarrow k < 5$, т.к. иначе $n \underset{10^7}{\equiv} n > 12345$

$k+2 = 6 \Rightarrow k = 4$ тогда и только тогда, когда $a_6 = 0$ (иначе $n \underset{10^6}{\equiv} \overline{a_6 \ldots a_1} > 12345$)

$k > 1$, т.к. иначе $\overline{a_1} + \overline{a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1}$ имеет не более 4 цифр $\Rightarrow < 12345 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \{2; 3; 4\}$

$k = 2$:

$n \underset{100}{\equiv} 10a_2 + a_1$

$n \underset{1000}{\equiv} 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$n \underset{10000}{\equiv} 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$\Rightarrow$ их сумма равна $10^4 a_4 + 200a_3 + 30a_2 + 3a_1 = 12345$

~~$3a_1 \equiv 10$~~ $3a_1 \underset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow a_1 = 5$

$10^4 a_4 + 200a_3 + 30a_2 + 15 = 12345$

$10^3 a_4 + 20a_3 + 3a_2 = 1233$

$3a_2 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_2 = 1$

$10^2 a_4 + 2a_3 = 123$

$2a_3 \underset{10}{\equiv} 3$, то т.к. $2a_3$ - четное число, то оно не может оканчиваться на 3 $\Rightarrow k \neq 2$.

$k = 3$:

$n \underset{1000}{\equiv} 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$n \underset{10000}{\equiv} 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$n \underset{100000}{\equiv} 10^4 a_5 + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$\Rightarrow$ их сумма $= 10^4 a_5 + 2 \cdot 10^3 a_4 + 3 \cdot 10^2 a_3 + 30a_2 + 3a_1 = 12345$

$3a_1 \underset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow a_1 = 5$

$10^3 a_5 + 200a_4 + 30a_3 + 3a_2 = 1233$

$3a_2 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_2 = 1$

$10^2 a_5 + 20a_4 + 3a_3 = 123$

$3a_3 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_3 = 1$

$10a_5 + 2a_4 = 12$

$2a_4 \underset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow a_4 = \{1; 6\}$

при $a_4 = 1$: $10a_5 = 10$, $a_5 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \overline{a_7 a_6 1 1 1 1 5}$

при $a_4 = 6$: $10a_5 = 0$, $a_5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \overline{a_7 a_6 0 6 1 1 5}$

Вариантов выбрать $a_7 = 9$, вариантов $a_6 = 10$ $\Rightarrow$ возможных n при $k = 3$: $2 \cdot 10 \cdot 9 = \underline{180}$

$k=4$:

$n = \overline{a_7\,0\,a_5\,a_4\,a_3\,a_2\,a_1}$

$n \underset{10^4}{\equiv} 10^3 a_4 + 100 a_3 + 10 a_2 + a_1$

$n \underset{10^5}{\equiv} 10^4 a_5 + 10^3 a_4 + 10^2 a_3 + 10 a_2 + a_1$ $\Rightarrow$ тогда сумма $= 2\cdot 10^4 a_5 + 3\cdot 10^3 a_4 + 300 a_3 + 30 a_2 + 3a_1 = 12345$

$n \underset{10^6}{\equiv} 10^4 a_5 + 10^3 a_4 + 10^2 a_3 + 10 a_2 + a_1$

$3a_1 \underset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow$

$2\cdot 10^3 a_5 + 300 a_4 + 30 a_3 + 3a_2 = 1233$

$3a_2 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow$

$200 a_5 + 30 a_4 + 3a_3 = 123$

$3a_3 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_3 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 a_5 + 3a_4 = 12$

$3a_4 \underset{10}{\equiv} 12 \Rightarrow a_4 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 a_5 = 0$

$a_5 = 0 \Rightarrow$ $n = \overline{a_7\,0\,0\,4\,1\,1\,5}$

вариантов выбрать $a_7 = 9$ $\Rightarrow$ таких n при $k=4$ $= 9 \Rightarrow$

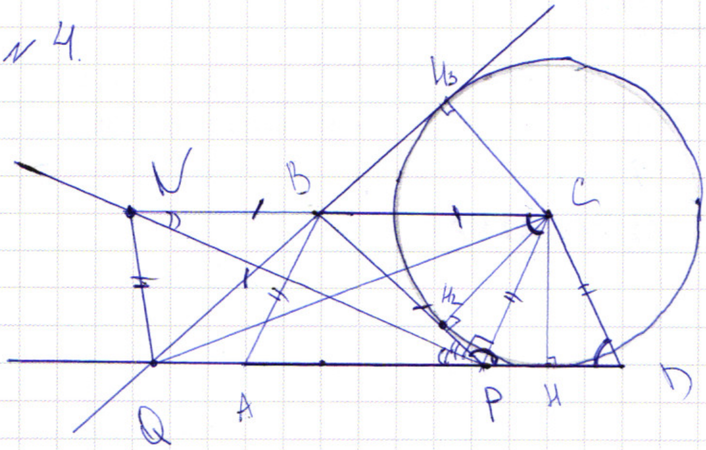
$\Rightarrow$ Всех возможных $n = 180 + 9 = 189$

Ответ: 189

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4.



Решение

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle NCP = \frac{12}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{NP}{CP} = \frac{12}{5} \Rightarrow 12CP = 5NP \Rightarrow NP = 2{,}4CP$

т.к. $\angle NPC = 90° \Rightarrow NC^2 = NP^2 + CP^2$

$13^2 = 6{,}76\,CP^2 \Rightarrow CP = 5 \Rightarrow NP = 12$

$CH_2 \perp BD$, $CH \perp PD$ } в $\triangle CH_2P$ и $\triangle CPH$: CP – общая сторона, $H_2P = PH$ как отрезки касательной, $CH_2 = CH$ как радиусы окружности

$\Rightarrow \triangle H_2PC = \triangle PHC$ (по 3 пр.) $\Rightarrow \angle BPC = \angle CPD \Rightarrow PC$ – биссектриса $\angle BPD$

т.к. $BC \parallel PD$ и PC – секущая $\Rightarrow \angle BCP = \angle CPD$ (как накрест лежащие) } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPC = \angle BCP \Rightarrow \triangle BCP$ – равнобед. $\Rightarrow BC = BP$

$\Rightarrow$ т.к. PC – биссектриса $\angle BPD$ и $NP \perp PC \Rightarrow NP$ – биссектриса $\angle QPB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QPN = \angle BPN \Rightarrow$ т.к. $NB \parallel QP$ и NP – секущая: $\angle QPN = \angle BNP$ (накрест лежащие) $\Rightarrow \angle BPN = \angle BNP \Rightarrow \triangle NBP$ – равнобед. $\Rightarrow BN = BP \Rightarrow$

$\Rightarrow BN = BP = BC \Rightarrow QB$ – медиана в $\triangle NQC$

$CH_3 \perp QH_3$, $CH \perp QH$ } в $\triangle QCH_3$ и $\triangle QHC$: QC – общая сторона, $QH_3 = QH$ как отрезки касательных, $CH_3 = CH$ как радиусы окружностей $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle QH_3C = \triangle QCH$ (по 3 пр.) $\Rightarrow \angle H_3QC = \angle CQP$

$\Rightarrow \angle CQP = \angle CQB$ (при $BC \parallel QP$ и секущей QC) } $\Rightarrow \angle BCQ = \angle BQC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle QBC$ – равнобедренный $\Rightarrow BQ = BC \Rightarrow BQ = BC = BN$

в $\triangle NQC$ медиана равна половине стороны, к которой проведена $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle NQC$ – прямоугольный ($\angle NQC = 90°$) $\Rightarrow$ в $NCPQ$ сторона NC видна под равными углами из точек Q и $P \Rightarrow NCPQ$ – вписанная трапеция $\Rightarrow NQ = CP$.

$BC = BN = \frac{1}{2}NP = \frac{13}{2} \Rightarrow BC = AP \Rightarrow$ т.к. $AP \parallel BC$: $ABCP$ – параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CP \Rightarrow AB = CP = CD = NQ \Rightarrow \triangle CPD$ – равнобедренный $\Rightarrow PH = \frac{1}{2}PD$.

$\angle CPD = \angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle CPD = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{CH}{PH} = \frac{12}{5} \Rightarrow CH = 2{,}4PH$

$CP^2 = CH^2 + PH^2$

$25 = 6{,}76PH^2 \Rightarrow PH^2 = \left(\frac{5}{2{,}6}\right)^2 \Rightarrow PH = \frac{5}{2{,}6} \Rightarrow \cancel{PD = \frac{10}{5{,}2}}$ $CH = \frac{60}{13}$

т.к. $\triangle CPD$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle ADC = \angle CPD = \angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$

$\cancel{S_{NCPQ} = \frac{1}{2}(NC+QP)\cdot CH = \frac{1}{2}(NC+}$ т.к. $NC \parallel QD$ и $NQ = CP \Rightarrow NCDQ$ – параллелограм $\Rightarrow S_{NCDQ} = NC \cdot CH = 13 \cdot \frac{60}{13} = 60$.

Ответ: $\angle NQC = 90°$

$\angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$

$S_{NCDQ} = 60$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $n = \overline{a_x a_8 \ldots a_{n+1}}$

3 последовательные степени 10! $10^{k}, 10^{k+1}, 10^{k+2} =$

$= 10^k, \cancel{100}^k, 1000^k$

$10 \cdot 10^k, 100 \cdot 10^k$

Тогда

1234567

$n \underset{10^k}{\equiv} \overline{a_k \ldots a_1}$

$k=2: 10^k = 100$

$10^{k+1} = 1000$

$k^{k+2} = 10000$

$n \underset{10^{k+1}}{\equiv} \overline{a_{k+1} a_k \ldots a_1}$

$1234567 \underset{100}{\equiv} 67$

$n \underset{10^{k+1}}{\equiv} \overline{a_{k+2} a_{k+1} a_{k \ldots} a_1}$

тогда $\overline{a_k \ldots a_1} + \overline{a_{k+1} a_k \ldots a_1} + \overline{a_{k+2} \ldots a_1} = 12345.$

Заметим, что $k+2 \leq 5$ (т.к. число $\overline{a_{k+2} \ldots a_1}$ не может иметь больше пяти ~~знако~~ разрядов) $\Rightarrow k \leq 3$.

при этом $k > 1$, т.к. тогда

$\overline{a_1} + \overline{a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1}$ и т.д. имеет не более 4 знаков цифр

то есть $k = \{2; 3\}$.

Пусть $k=2 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} n \underset{100}{\equiv} \overline{a_2 a_1} \\ n \underset{1000}{\equiv} \overline{a_3 a_2 a_1} \\ n \underset{10000}{\equiv} \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} =$

$= 10a_2 + a_1 + 100a_3 + 10a_2 + a_1 + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + 1 =$

$= 1000a_4 + 200a_3 + 30a_2 + 4a_1 \Rightarrow 40$

т.к. $4a_1$ - четное число, то в разряде единиц у получившейся суммы будет четная цифра $\Rightarrow$ такая сумма не может быть равна

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3 6 12 15 18 21 ~~27~~ 24 ~~27~~

12345

$k=3$:

$n \underset{1000}{\equiv} \overline{a_3 a_2 a_1} = 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$n \underset{10000}{\equiv} \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} = 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$

$n \equiv \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = 10000a_5 + 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ их сумма равна $10000a_5 + 2000a_4 + 300a_3 + 30a_2 + 3a_1$

~~Если что~~ Пусть $10^4 a_5 + 2\cdot 10^3 a_4 + 3\cdot 10^2 a_3 + 3\cdot 10 a_2 + 3a_1 = 12345$

тогда $3a_1 \underset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow a_1 = 5$ ($a_1 \in [0;9]$, т.к. это цифра) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot a_1 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^4 \cdot a_5 + 2\cdot 10^3 a_4 + 3\cdot 10^2 a_3 + 3\cdot 10 a_2 + 10 + 5 = 12345$

$10^4 a_5 + 2\cdot 10^3 a_4 + 3\cdot 10^2 a_3 + 4\cdot 10 a_2 + \cancel{5} = 12340$ $|:10$

$3\cdot 10a_2 + 10 =$

~~$40a_2 \equiv 40 \Rightarrow a_2 \equiv$~~ $4a_2 \equiv 4$

$10^3 a_5 + 2\cdot 10^2 a_4 + 30a_3 + 4a_2 = 1234$

$= 10$

$4a_2 \underset{10}{\equiv} 4 \Rightarrow a_2 = \{1; 6\}$

если $a_2 = 1$:

$10^3 a_5 + 2\cdot 10^2 a_4 + 30a_3 = 1230$ $|:10$

$10^2 a_5 + 2\cdot 10 a_4 + 3a_3 = 123$

$3a_3 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 = 1$

$10^2 a_5 + 20a_4 + 3 = 123$

$10a_5 + 2a_4 = 12$

$2a_4 \underset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow a_4 = \{1; 6\}$

$a_4 = 6$:

$10a_5 + 12 = 12$

$10a_5 = 10$

$a_5 = 0 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_4 \neq 6$

$a_4 = 1$:

$10a_5 + 2 = 12$

$10a_5 = 10$

$a_5 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$n = 11115$~~

$n = a_7 a_6 11115$

если $a_2 = 6$:

$10^3 a_5 + 200a_4 + 30a_3 + 20 + 4 = 1234$

$10^3 a_5 + 200a_4 + 1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$\sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 9 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + 9\cancel{\cos}\sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin x$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{9}{2} \cdot \sin x$

$\sin x\left(\cos y - \frac{9}{2}\right) + \cos x\left(\sin y - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\cos(\cancel{2x}\ \cancel{x} + 2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \ \Big| :2$

~~cos x cos 2y − sin x sin 2y − √3 sin x cos 2y~~

$\frac{1}{2}\cos(x+2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+2y) = -\cancel{16}\,8\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{\pi}{3}\cos(x+2y) - \cos\pi/3 \cdot \sin(x+2y) = -\cancel{16}\,8\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x - 2y\right) = -8\sin\left(x + \frac{\pi}{}\right.}$

$\cancel{\delta}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $n = \overline{a_7 a_6 \ldots a_1}$ $\quad 10^k, 10^{k+1}, 10^{k+2}$.

$n \underset{10^k}{\equiv} \overline{a_k \ldots a_1}$

$n \underset{10^{k+1}}{\equiv} \overline{a_{k+1} \ldots a_1}$

$n \underset{10^{k+2}}{\equiv} \overline{a_{k+2} \ldots a_1}$

$k+2 < 7$, т.к. ~~тогда~~ иначе

ц. $n \underset{10^7}{\equiv} n > 12345$

$k+2=6$ тогда и только тогда, когда $a_6 = 0$

(иначе $n \underset{10^6}{\equiv} \overline{a_6 \ldots a_1} > 12345$)

$\overline{a_7\ a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1}$

$k+2=6 \Rightarrow k=4$.

$n = \overline{a_7 0 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$

$n \underset{10^4}{\equiv} 10^3 a_4 + 100 a_3 + 10 a_2 + a_1$

$n \underset{10^5}{\equiv} 10^4 a_5 + 10^3 a_4 \ldots + a_1$

$n \underset{10^6}{\equiv} 10^4 a_5 + 10^3 a_4 \ldots + a_1$

$\Rightarrow$ такая сумма равна

$2 \cdot 10^4 a_5 + 3 \cdot 10^3 a_4 + 3 \cdot 10^2 a_3 + 3 \cdot 10 a_2 + 3a_1 = 12345$

~~Пусть $10^4 a_5 + 10^3 a_4 + \ldots + a_1 + 10^4 a_5 + 10$~~

тогда $3a_1 \underset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 10^4 a_5 + 3 \cdot 10^3 a_4 + 3 \cdot 10^2 a_3 + 30 a_2 = 12330$

$2 \cdot 10^3 a_5 + 3 \cdot 10^2 a_4 + 30 a_3 + 3a_2 = 1233$

$3a_2 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_2 = 1$

$2 \cdot 10^2 a_5 + 30 a_4 + 3a_3 = 123$

$3a_3 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_3 = 1$

$20 a_5 + 3a_4 = 12$

$3a_4 \underset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow a_4 = 4$

$20 a_5 + 12 = 12$

$a_5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \overline{a_7 004115}$

$a_7 = \{1; 2 \ldots 9\} \Rightarrow$ таких чисел 9

Ответ: таких чисел 9

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$10^4 a_5 + 2\cdot 10^3 a_4 + 3\cdot 10^2 a_3 + 3\cdot 10 a_2 + 10 + 5 = 12345$

$10^4 a_5 + 2\cdot 10^3 a_4 + 3\cdot 10^2 a_3 + 30 a_2 = 12330$

$\cancel{10^4 a_5 + 2\cdot 10^3 a_4 + 300 a_3}$

$10^3 a_5 + 2\cdot 10^2 a_4 + 30 a_3 + 3a_2 = 1233$

$3a_2 \underset{10}{\equiv} 3$

$a_2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^3 a_5 + 2\cdot 10^2 a_4 + 30 a_3 + 3 = 1233$

$10^3 a_5 + 200 a_4 + 30 a_3 = 1230$

$100 a_5 + 20 a_4 + 3a_3 = 123$

$3a_3 \underset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow a_3 = 1$

$10 a_5 + 2a_4 = 12$

$2a_4 \underset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow a_4 = \{1, 6\}$

$a_4 = 6$:

$10 a_5 + 12 = 12$

$10 a_5 = 0$

$a_5 = 0 \Rightarrow$ ~~противоречие.~~

$a_4 = 1$:

$10 a_5 = 10$

$a_5 = 1 \Rightarrow \overline{n = a_7 a_6 a_5 1 1 1 1 5}$

~~как~~ $a_7 = \{1; 2 \ldots 9\}$

$a_6 = \{0 \ldots 9\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во таких $n = 9\cdot 10 = 90$

то есть $n = \{\overline{a_7 a_6 0 6 1 1 1 5}, \overline{a_7 a_6 1 1 1 1 5}\}$

$a_7 = \{1; 2 \ldots 9\}$

$a_6 = \{0; \ldots 9\}$ $\Rightarrow$ таких чисел $= 2\cdot 10\cdot 9 = 180$

Отв

$$\begin{array}{r} 4115 \\ \times\quad 3 \\ \hline 12345 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$.

ОДЗ:
$\begin{cases} \log_{3x} x^4 \geq 0 \\ 3x > 0,\ 3x \neq 1 \\ x^2 \neq 0 \\ 9x > 0,\ 9x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 \geq 1 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow x \in [1; +\infty)$

$\log_{3x} x^4 = \frac{1}{\log_{x^4} 3x} = \frac{1}{\frac{1}{4}\log_x 3x} = \frac{4}{\log_x 3x}$

$\log_{9x} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{x^2}} 9x} = \frac{1}{\log_{(x)^{-2}} 9x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\log_x 9x} = \frac{-2}{\log_x 9x}$

$\frac{4}{\log_x 3x} = \cancel{\frac{4}{\log_x 3}}$

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

$\frac{2}{\sqrt{\log_x 3x}} \le \frac{-2}{\log_x 9x}$

т.к. $x > 0$ и $x \neq 1$, то

$3x > x$ и $9x > x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $\begin{cases} \log_x 3x = n \\ \log_x 9x = n_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = 3x \\ x^{n_1} = 9x \end{cases}$, то n и $n_1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_x 3x > 0 \\ \log_x 9x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\log_x 3x}} > 0 \\ \frac{-2}{} \end{cases}$

$115 + 1115 + 11115 =$

$$\begin{array}{r} 11115 \\ +\ 1115 \\ \hline 12230 \\ +\ 115 \\ \hline 12345 \end{array}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+y - 2\sqrt[3]{y^2-16x^2} = 24 \\ 4x-y = 64 \Rightarrow y-4x = -64 \Rightarrow \end{cases}$$

$y^2-16x^2 = (y-4x)(y+4x) = -64(y+4x) \Rightarrow \sqrt[3]{y^2-16x^2} =$

$= \sqrt[3]{-64(y+4x)} = \cancel{-8} -4\sqrt[3]{y+4x}$

$4x+y + 8\sqrt[3]{y+4x} = 24 \qquad \sqrt[3]{4x+y} = t$

$t^3 + 8t = 24$

$t(t^2+8) = 24$

т.к. $t^2+8>0 \Rightarrow t>0 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ когда при увеличении t увеличивается~~

~~и t $\Rightarrow t^3+8t>0$~~

~~пусть t_1~~ пусть $f(t)=t^3+8t \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(t) = 3t^2+8 \Rightarrow f'(t)>0$

при любых t (в области определения) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ – возрастающая функция $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$f(t)$ и y~~ = функции ~~$y=t^3$~~ $f(t)$ и $c=24$

имеют одну точку пересечения, и

такая точка равна $2 \Rightarrow \sqrt[3]{4x+y}=2$

$$\left.\begin{aligned} 4x+y&=8 \\ 4x-y&=64 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8x = 72 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

6115 × 3 = 45

6115 + 2 = 12230 + 115 = 12345

$\Rightarrow 4x+y=8$

$36+y=8$

$y=-28$

Ответ: $\begin{cases} x=9 \\ y=-28 \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases}$

$4x - \cancel{\sqrt[3]{y^2-16x^2}} - y + \cancel{\sqrt[3]{y^2-16x^2}} = 44+20$

$4x - y = 64 \Rightarrow y-4x = -64$

$64 = 2^6 = 4^3$

$y^2-16x^2 = (y-4x)(y+4x) = -64(y+4x)$

$4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} + y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 24$

$(4x+y) - 2\sqrt[3]{-64(y+4x)} = 24$

$(4x+y) + 8\sqrt[3]{y+4x} = 24$

$\sqrt[3]{y+4x} = t$

$t^3 + 8t = 24$

$y-4x = -64$

$4x = y+64.$

$t^3+8t-24=0$

$\cancel{t^3+2t^2+t}$

$\cancel{2y+64=t}$

$\cancel{t^3+4t^2+4t} + 4t^2+4t-24=0$

$t^3 \cancel{+6t^2+9t-t\,6t^2} -24=0$

$4x+y+8\sqrt[3]{y+4x} = 24$

$y+64+y+8\sqrt[3]{y+y+64} = 24.$

$2y+64+8\sqrt[3]{2y+64} = 24, \quad |:2$

$y+32+4\sqrt[3]{2y+64} = 24.$

$y+4\sqrt[3]{2y+64} = -8$

$y+4\sqrt[3]{2y+64}+8=0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

то есть т.к. $\angle QPN = \angle NPB$ и $\angle BNP = \angle QPN$ (накр. леж.) =>

=> $\angle BNP = \angle BPN$ => $NB = BP$ ($\triangle BNP$ – равнобедренный)

$NP \cap QC = O$ $\angle CPD = \angle BPP = \angle BCD$ => ~~$BP = BC = QB$~~ $= NB$

$\angle QQP = \angle$ $BC = BP$ => $NB = BC = BP = BQ$

=> $\angle BQP = \angle BPQ$ => $\angle NCQ = \angle QPN$ =>

=> около $NCPQ$ можно описать окружность

(т.к. NQ виден из точек P и C под равным углом) =>

=> $\angle NQC = \angle NPC$ (опираются на NC) => $\angle NQC = 90$

т.к. $NCPQ$ – вписанный => $NQ = CP$ (стягивают хорды, на которые опираются равные углы CNP и QCN)

$NQ = PC$

NC – общая гипотенуза $\triangle NQC$ и $\triangle NPC$ прямоуг. } => $\triangle NQC = \triangle NCP$ => $QC = NP = 12$.

$\angle CPH = \angle NCP = arctg\frac{12}{5}$ => $tg\angle CPH = \frac{12}{5}$ => $\frac{CH}{PH} = \frac{12}{5}$ =>

=> $12PH = 5CH$ => $CH = 2{,}4PH$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot 13 - 50}{13} \cdot \frac{60}{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot 11 \cdot 60}{13^2} =$

$CP^2 = PH^2 + CH^2 = 5{,}76PH^2 + PH^2$ $=$

$25 = 6{,}76PH^2$

$PH^2 = \left(\frac{5}{2{,}6}\right)^2$ => $PH = \frac{5}{2{,}6} = \frac{50}{26}$ => $CH = \frac{24 \cdot 50}{260} = \frac{120}{26} = \frac{60}{13}$

$BC = NB = \frac{1}{2}NC = \frac{13}{2}$ => $BC = AP$, $BC \parallel AP$ } => $ABCP$ – параллелограмм =>

=> $AB = CP$ => $AD = CP$ => $\angle CDP = \angle PCB = arctg\frac{12}{5}$

~~т.к. $NCPQ$ – вписанная трапеция => $NCPQ$~~

т.к. $NQ = CP$ => $AB = CP = CD = NQ$ => $NCDQ$ – параллелограмм =>

=> ~~$S_{NCDQ} = CH \cdot NC$~~ => $QD = NC$ => $QP = NC - PD = 12 - \frac{100}{26}\frac{20}{13}$

S_{NCPQ} $S_{NCPQ} = \frac{1}{2}(NC + QP) \cdot CH = \frac{1}{2}\left(13 + 12 - \frac{100}{13}\frac{50}{13}\right) \cdot \frac{60}{13} =$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2. $\sqrt{\cancel{\log_{3x} x^4} \cancel{< \log_{3x}\frac{1}{x^2}}} + ()^2$

$\cancel{\log_{3x} x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 \geq 1} \Rightarrow x >$

$\cancel{\log_{3x}\frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

ОДЗ: $\begin{cases} \begin{cases} 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \end{cases} \\ x^4 > 0 \\ \begin{cases} 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \end{cases} \\ \frac{1}{x^2} > 0 \\ \log_{3x} x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0) \\ x \in (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 0) \\ x^4 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

$\log_{3x} x^4 \geq 0 \Rightarrow \log_{3x}\frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 \leq 1 \\ \text{т.к. } x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x = 1}$

5. $\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3} - x) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin(x + \frac{\pi}{6}) \end{cases}$

$\sin(x+y) = 9\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cos x + 9\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x = 4{,}5\cancel{\sqrt{3}}\cos x + 4{,}5\sqrt{3}\sin x =$

$= \cancel{4{,}5(\sqrt{3}\cos x + \sin x} = 4{,}5(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$

$\cos(x+2y) = \cos((x+y)+y) = \cos(x+y)\cdot\cos y - \sin(x+y)\cdot\sin y$

$\sin(x+2y) = \sin((x+y)+y) = \sin(x+y)\cdot\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y =$

$= 4{,}5(\cos x \cdot$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le ax+b \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$

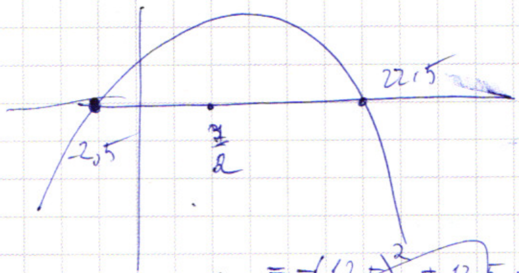
$\frac{275}{4}+25x-x^2 \qquad -x^2+25x+\frac{275}{4}$

$D=625+275=900$

$x_1=\frac{-25-30}{-2}=\boxed{22,5}=\frac{45}{2}$

$x_2=\frac{-25+30}{-2}=\boxed{-2,5}=\frac{-5}{2}$

$\sqrt{-(x-22,5)(x+2,5)} \le ax+b \le$



$y_{max}=-(12,5)^2+12,5\cdot25+\frac{275}{4}=-156,25+312,5+68,75=$

$=156,25+68,75=157+68=165+60=225$

$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}$ на $\left[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$ возрастает

$\sqrt{\frac{275}{4}+12,5\cdot7-\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{226}{4}+87,5}=\sqrt{56,5+87,5}=\sqrt{57+87}=12$

$-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}=\frac{-4x^2+20x+135}{12}$

$D=400+135\cdot16=2560=(16\sqrt{10})^2$

$-20-16\sqrt{10}$

$x_1=$

$-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$

$x_0=\frac{-b}{2}=\frac{5}{6}\Rightarrow$

$\Rightarrow y_0=-\frac{25}{36\cdot3}+\frac{25}{18}+\frac{45}{4}=$

$=-\frac{25}{108}+\frac{25}{18}+\frac{45}{4}=\frac{-25+150+1215}{}$

$-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}=\frac{-12x^2+60x+135}{}=\frac{-x^2+5x}{3}+\frac{45}{4}=\frac{-4x^2+20x+135}{12}$

$D=400+16\cdot135=2560$

$D=\frac{25}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{45}{4}=\frac{25}{9}+15=\frac{160}{9}=\left(\frac{4\sqrt{10}}{3}\right)^2$

$135\cdot16=2160$; $125\cdot125=15625$; $275:4=68,75$; $125\cdot25=3125$; $226:4=56,5$; $45\cdot27=1215$; $2560:5=512$; $256\cdot5=1280$; $256=16^2$; $16\sqrt{10}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик

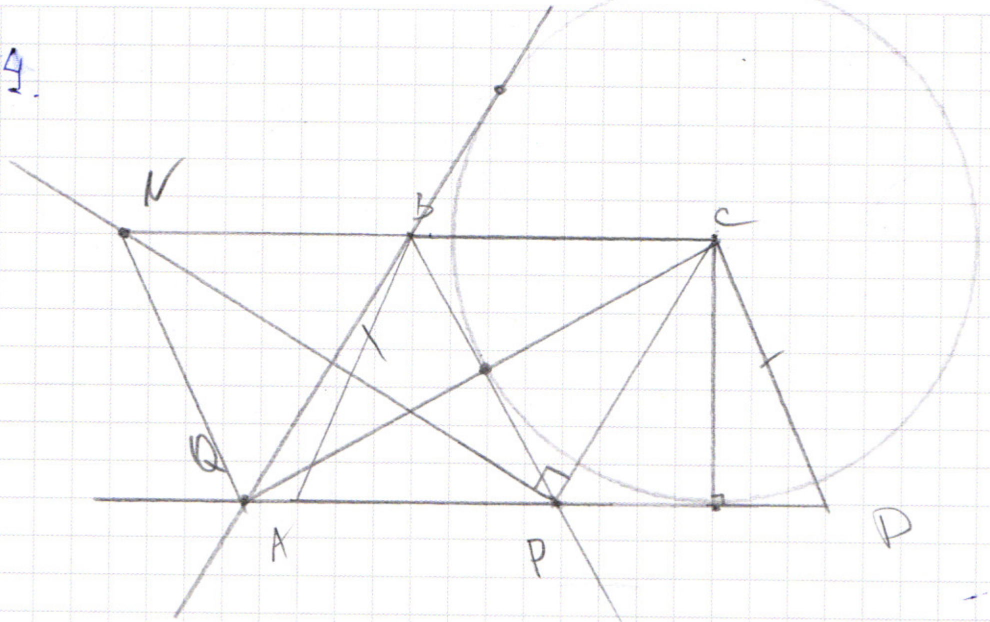
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

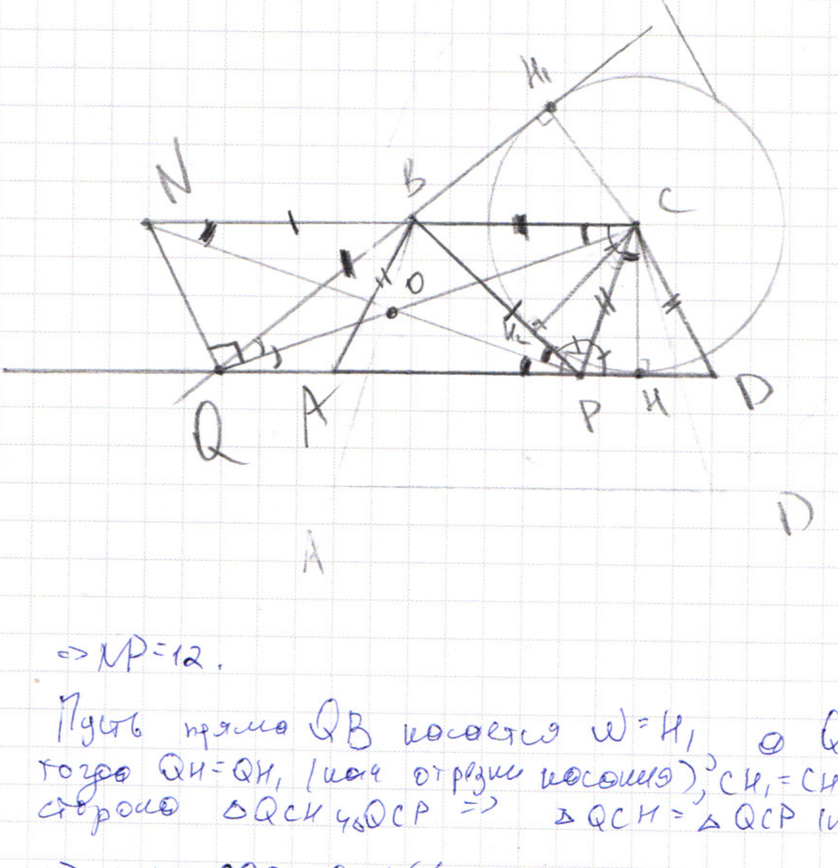
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

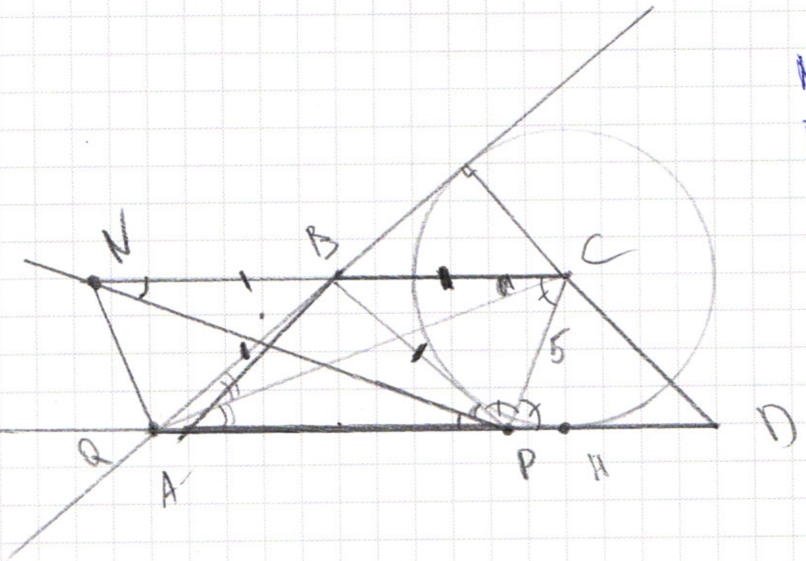


$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$
$AP = \frac{13}{2}$
$NC = 13$
Найти:
$\angle ADC$, $\angle NQC$,
S_{NCDQ}



$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\angle NCP = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{NP}{CP} = \frac{12}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 12CP = 5NP \Rightarrow NP = \overset{2,4}{\cancel{1,6}}CP$
$\angle NPC$ – прямой $\Rightarrow NC^2 = NP^2 + CP^2$
$NC^2 = 5,76CP^2 + CP^2$
$13^2 = 6,76CP^2$
$13^2 = (2,6)^2CP^2$
$\left(\frac{2,6 \cdot 5}{2,6}\right)^2 = CP^2 \Rightarrow CP^2 = 5^2 \Rightarrow CP = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow NP = 12.$

Пусть прямо QB косается $\omega = H_1$, а QD косается $\omega = H$.
тогда $QH = QH_1$ (как отрезки косания), $CH_1 = CH$ (как радиусы), QC-общая сторона $\triangle QCH$ и $\triangle QCP \Rightarrow$ $\triangle QCH = \triangle QCP$ (по 3 пр.) $\Rightarrow \angle H_1QC = \angle CQP = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $\angle CQP = \angle QCN$ (накрест лежащие при $NC \parallel QP$ и секущей QP), то
и $\angle BQC = \angle \overset{QCN}{\cancel{BCQ}} \Rightarrow \triangle BQC$ – равнобедренный $\Rightarrow QB = BC$
Аналогично PC – биссектриса $\angle BPD$, а т.к. $NP \perp CP$, то AP – биссектриса $\angle QPB$ (т.к. биссектрисы смежных углов $\perp$)



$NP = 12$

$NC = 13$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)